- Zavedení pojmu zobrazení a pojmu funkce
- Reálná funkce reálné proměnné
- Spojitost funkce
- Polynom a racionální lomená funkce
- Funkce složená a funkce inverzní. Elementární funkce

2. Funkce a jejich vlastnosti

Cíl kapitoly

- Zopakovat si pojem zobrazení, pojem funkce.
- Zopakovat si pojem spojitosti funkce.
- Zopakovat si vlastnosti funkce spojité na intervalu.
- Zopakovat pojem polynomu a rozklad reálného polynomu.
- Podrobněji se seznámit s pojmem složené funkce a s pojmem funkce inverzní.
- Zopakovat si elementární funkce: $\sqrt[n]{x}$, mocniny s racionálním exponentem, funkce exponenciální, logaritmické a obecnou mocninu.

Časová zátěž

10 hodin samostudia. Časová zátěž silně závisí na znalostech s nimiž přicházíte studovat.

2.1 Zavedení pojmu zobrazení a pojmu funkce

Pojem zobrazení

Zopakujme si důležitý pojem „**zobrazení**“. S tímto pojmem se v denním životě neustále „setkáváme“, aniž bychom jej vyslovovali. Uveďme příklad „přiřazení“ – přiřazení se specifickými vlastnostmi se pak nazývá zobrazením. Zvláštním případem zobrazení je pak reálná funkce reálné proměnné.

Datum narození žijícího člověka lze vyjádřit jako uspořádanou trojici reálných čísel, označme ji (r, m, d), kde r značí rok, m měsíc a d den narození.

Označme B množinu všech dat narození pro $r > 1800$ do dnešního dne. Označme y proměnnou s oborem B. (Tedy y zastupuje kterékoliv datum z B.)

Dále označme A množinu jistých žijících lidí. Označme x symbol, který zastupuje kteréhokoliv člověka z uvedené množiny A lidí. (Tedy x je proměnná s oborem A).

Označme dále D pravidlo, jimž ke každému člověku x z množiny A přiřadíme uspořádanou trojici y reálných čísel z množiny B podle data jeho narození. Budeme psát

$$y = D(x) \text{ pro } x \in A.$$

Tento zápis vyjadřuje okolnost, že ke každému $x \in A$ se pravidlem D (tj. podle data narození člověka x), přiřazuje uspořádaná trojice čísel z B.)

Uvedené přiřazení má důležitou vlastnost – ke každému $x \in A$ je přiřazeno **právě jedno** $y \in B$. Takovéto přiřazení nazýváme zobrazením.

Uveďme si nyní definici zobrazení.

Definice 2.1.

Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Pravidlo F, jimž ke každému prvku $x \in A$ je *přiřazen právě jeden prvek* $y \in B$, nazýváme *zobrazením množiny A do množiny B*. Označíme-li x proměnnou s oborem A a y proměnnou s oborem B, píšeme

$$y = F(x).$$

O prvku y přiřazenému k prvku x říkáme, že je obrazem prvku x, a o prvku x říkáme, že je vzorem prvku y.

Množinu A (to jest množinu prvků, k nimž v zobrazení F přiřazujeme prvky z B), nazýváme *definičním oborem nebo též neodvislým oborem* zobrazení F. Značíme jej často D_F, resp. $D(F)$ a množinu B nazýváme *odvislým oborem zobrazení F*.

Podmnožinu množiny B, která obsahuje všechny ty prvky $y \in B$, která jsou v zobrazení F přiřazana k prvkům x z množin A, nazýváme *oborem zobrazení F*. Značíme ji $H(F)$, resp. H_F.

Jestliže $H_F \subseteq B$, potom říkáme, že zobrazení F je *zobrazením množiny A do B*.

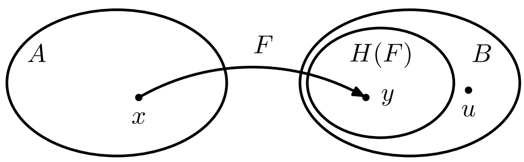
Jestliže $H_F = B$, potom říkáme, že zobrazení F je *zobrazením množiny A na B*.

Jestliže $B \subseteq A$, potom říkáme, že zobrazení F je *zobrazením množiny A do sebe*.

Jestliže $H_F = A$, říkáme, že zobrazení F je zobrazením *na sebe*.

Proměnnou s oborem hodnot A nazýváme *neodvisle proměnnou* a proměnnou s oborem hodnot B nazýváme *závisle proměnnou*. V této definici jsme použili symbol x pro neodvisle proměnnou a symbol y pro odvisle proměnnou.

Na obrázku 2.1 je znázorněno zobrazení F množiny A do množiny B, rovněž je znázorněn obor zobrazení F, to jest množina $H(F)$. Je zde znázorněn též prvek $u \in B$, který nepatří do $H(F)$. Není tedy obrazem žádného prvku $x \in A$.



Obrázek 2.1: Zobrazení A do B

V některých případech je možno přiřazení G, v němž je ke každému prvku z množiny A přiřazen prvek z množiny B, popsat tabulkou utvořenou takto: V prvním řádku tabulky se uvádějí prvky z množiny A a v druhém řádku jsou pod nimi uvedeny k nim přiřazené prvky z množiny B . Ne každé pravidlo, jimž je **ke každému prvku** $x \in A$ přiřazen prvek z B, je zobrazením. Toto přiřazení je zobrazením A do B pouze tehdy, jestliže **ke každému** $x \in A$ je přiřazen **právě jeden** prvek $y \in B$.

Příklad 2.1. Nechť A je množina určité skupiny studentů, B množina reálných nezáporných čísel. Označme x proměnnou množiny A, (to jest x je symbol, který zastupuje kteréhokoliv studenta ze skupiny A). Označme nyní y proměnnou s oborem hodnot B. Ke každému $x \in A$ (to jest, ke každému studentovi z A), přiřaďme jeho aktuální tělesnou výšku v centimetrech, tedy číslo y z množiny B. (Tedy právě jedno číslo.) Toto pravidlo přiřazení označíme V. Ke každému $x \in A$ jsme tedy přiřadili právě jedno číslo y z množiny B. Je tedy V zobrazením množiny A do množiny B podle nahoře uvedené definice. Zobrazení V není zobrazením množiny A na množinu B, poněvadž existují čísla v B, která nejsou přiřazena v zobrazení V k žádnému prvku x z množiny A. (To vyplývá např. z toho, že A je konečná množina a B obsahuje nekonečně mnoho čísel.)

Jako konkrétní přiřazení uveďme toto. Předpokládejme, že A je skupina studentů, které si pro náš účel označíme a, b, c. Ke každému studentovi přiřaďme jeho tělesnou výšku. Toto přiřazení označme V. Nechť je $V(a) = 175$, $V(b) = 175$, $V(c) = 180$. Toto přiřazení lze znázornit následující tabulkou.

x	a	b	c
y	175	175	180

Uvedené přiřazení V je zobrazením množiny A do množiny $\mathbb{R}$, poněvadž ke každému prvku $x \in A$ je přiřazen právě jeden prvek y z množiny $\mathbb{R}$. Toto zobrazení však není zobrazením množiny A na množinu $\mathbb{R}$, poněvadž např. číslo 190 není přiřazeno žádnému prvku z A. (V uvažované skupině tří studentů není žádný student s tělesnou výškou 190 cm.) Toto zobrazení je však zobrazením množiny A na množinu $C = \{175, 180\}$. Zřejmě $C = H_V$.

Příklad 2.2. Uvažujme tři matky, označme je a, b, c. Nechť matka a má syna, označme ho s_1, matka b má syna, označme ho s_2 a matka c má dva syny, označme je s_3 a s_4. Označme A množinu matek, tedy $A = \{a, b, c\}$ a B množinu synů, tedy $B = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Označme nyní D přiřazení, kterým ke každé matce přiřadíme každého z jejich synů. Tedy nechť $D(a) = s_1$, $D(b) = s_2$, $D(c) = s_3$, $D(c) = s_4$. Toto přiřazení D znázorněme tabulkou

x	a	b	c	c
y	s_1	s_2	s_3	s_4

Toto přiřazení **není** zobrazením množiny A do množiny B, neboť k prvku c z množiny A jsou přiřazeny dva prvky z množiny B, totiž prvky s_3, s_4.

Zaveďme si několik pojmů souvisejících se zobrazením.

Zobrazení prosté

Zobrazení prosté. *Nechť F je zobrazení množiny A do množiny B. Toto zobrazení nazýváme* prostým, *jestliže má tuto vlastnost: Jestliže $x, y \in A$ a $x \neq y$, potom $F(x) \neq F(y)$.*

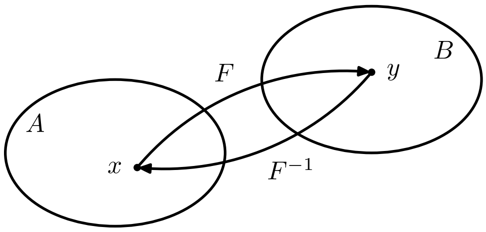
Příklad 2.3. Nechť $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Zobrazení F dané následující tabulkou je prostým zobrazením A na B.

x	a	b	c
y	α	β	γ

Inverzní zobrazení

> ***Inverzní zobrazení.*** *Nechť F je* prosté zobrazení množiny A na množinu B. *Potom existuje zobrazení, nazveme ho* inverzním zobrazením *množiny B na množinu A a označíme je F^{-1}, kterým ke každému $y \in B$ přiřadíme ten prvek $x \in A$, pro nějž platí $F(x) = y$. (Viz obr.2.2)*

Označení. Symbolem F^{-1} jsme označili inverzní zobrazení k zobrazení F, nejedná se o umocnění zobrazení F na číslo (-1).



Obrázek 2.2: Inverzní zobrazení

Příklad 2.4. Nechť zobrazení F množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ na množinu $B = \{\phi, \varphi, \chi, \psi\}$ je dáno tabulkou :

x	1	2	3	4
y	ϕ	φ	χ	ψ

Tedy $F(1) = \phi$, $F(2) = \varphi$, $F(3) = \chi$, $F(4) = \psi$. Toto zobrazení je prosté zobrazení množiny A na množinu B. Existuje proto k němu inverzní zobrazení, označme je F^{-1}. V tomto zobrazení platí $F^{-1}(\phi) = 1$, $F^{-1}(\varphi) = 2$, $F^{-1}(\chi) = 3$, $F^{-1}(\psi) = 4$. Toto inverzní zobrazení lze popsat tabulkou.

y	ϕ	φ	χ	ψ
x	1	2	3	4

V inverzním zobrazení je množina B neodvislým oborem a množina A je odvislým oborem.

Všimněte si, že v tabulce popisující inverzní zobrazení, je neodvisle proměnná označena y (zastupuje kterýkoliv prvek z B) a závisle proměnná je označena x (zastupuje kterýkoliv prvek množiny A). Poněvadž jsme zvyklí označovat symbolem x neodvisle proměnnou a y odvisle proměnnou, můžeme pro inverzní zobrazení zavést

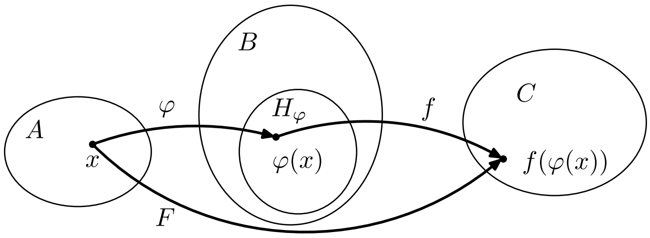
- symbol x pro neodvisle proměnnou (symbol x může zastupovat kterýkoliv prvek neodvislého oboru, to jest množiny B)
- symbol y pro odvisle proměnnou (symbol y může zastupovat kterýkoliv prvek odvislého oboru, to jest množiny A)

Tabulka pro toto inverzní zobrazení má pak tvar

x	ϕ	φ	χ	ψ
y	1	2	3	4

Složené zobrazení

Složené zobrazení. Nechť φ je zobrazení množiny A do množiny B. Nechť funkce f zobrazuje množinu H_φ do množiny C. Potom zobrazení, označujeme je F, kterým ke každému $x \in A$ je přiřazen prvek $z = f(\varphi(x)) \in C$, nazýváme *složeným zobrazením.* Zobrazení φ nazýváme jeho vnitřní složkou a zobrazení f nazýváme jeho vnější složkou. Píšeme $y = F(x)$. Viz obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Složené zobrazení

Příklad 2.5. Nechť $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $C = \{1, 2, 3\}$. Nechť zobrazení φ množiny A do množiny B je dáno tabulkou

x	a	b	c
$u = \varphi(x)$	α	β	α

zobrazení f množiny H_φ do množiny C je dáno tabulkou

u	α	β
$y = f(u)$	1	2

Zřejmě $H_\varphi = \{\alpha, \beta\}$.

Potom složené zobrazení $F = f(\varphi(x))$ zobrazuje A do C takto :

$$F(a) = f(\varphi(a)) = f(\alpha) = 1, \tag{2.1}$$
$$F(b) = f(\varphi(b)) = f(\beta) = 2, \tag{2.2}$$
$$F(c) = f(\varphi(c)) = f(\alpha) = 1. \tag{2.3}$$

Toto složené zobrazení F můžeme popsat následující tabulkou:

x	a	b	c
y	1	2	1

Poznamenejme, že φ je vnitřní složkou a f je vnější složkou zobrazení F.

Pojem funkce. Uveďme si nyní některé speciální pojmy zobrazení.

Pojem funkce

V případě, že v dříve uvedené definici zobrazení F je množina B množina čísel, budeme většinou místo pojmu zobrazení používat pojem **funkce**. Řada pojmů svázaných s pojmem zobrazení se přenáší na pojem funkce. Např. místo obor hodnot zobrazení se používá obor hodnot funkce, nebo místo pojmu prosté zobrazení se používá pojem prostá funkce.

Je-li v definici zobrazení F množina B množina reálných čísel, mluvíme o **reálné funkci**, je-li množina B množina komplexních čísel, mluvíme o komplexní funkci.

Příklad 2.6. Jako příklad si uveďme funkci, která vyjadřuje výsledky voleb do poslanecké sněmovny. Nechť čtyři politická seskupení, označme je a, b, c, d, získala křesla v poslanecké sněmovně, a to postupně v počtech 70, 50, 60, 20. Potom přiřazení, označme je f, kterým ke každému z politických seskupení a, b, c, d přiřadíme počet křesel, která ve volbách získalo, je reálnou funkcí. Je tedy $f(a) = 70$, $f(b) = 50$, $f(c) = 60$, $f(d) = 20$. Označíme-li $A = \{a, b, c, d\}, B = \{20, 50, 60, 70\}$, potom A je neodvislý obor funkce f a B je odvislý obor funkce f. Funkce f zobrazuje A na B. Funkce je prostá.

Jestliže v definici zobrazení jsou množiny A, B množiny reálných čísel, mluvíme o **reálné funkci reálné proměnné**. Jestliže v definici zobrazení je množina A množinou uspořádanách skupin o n-reálných číslech (tedy $A \subseteq \mathbb{R}^n$), B je množina reálných čísel, potom zobrazení F množiny A do B nazýváme **reálnou funkcí n-proměnných**.

Tato závislost může být dána nejrůznějším způsobem. Nejjednodušší způsob jejího zadání je zadání výrazem. Příkladem je funkce $y = x^2 + 1$, pro $x \in (-\infty, \infty)$.

Jako další příklad reálné funkce reálné proměnné uveďme úlohu, s kterou se setkáváme v bankovnictví. Jde o spojité úročení. Při tomto úročení vzroste základní kapitál, označme jej P, $(P \geq 0)$ za dobu t, počítanou v rocích, při nominální úrokové míře j (roční úroková míra, $j \geq 0$) na splatnou částku S podle vztahu

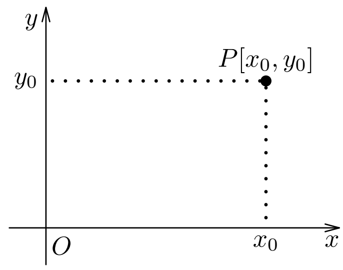
$$S = P \cdot e^{j \cdot t}. \tag{2.4}$$

Zde t značí neodvisle proměnnou a podle jejího významu je $t \in \langle 0, \infty)$ a $S \in \langle 0, \infty)$. Na vztah (2.4) se lze dívat též jako na funkci proměnných P, j, t. Při sledování závislosti splatné částky na čase t považujeme veličiny P, j za *parametry* a funkci S považujeme pro každé dva parametry jako funkci proměnné t.

> *V některých případech je funkce f zadána pouze předpisem $y = f(x)$ bez udání definičního oboru. V takovémto případě se jím rozumí množina všech těch x, pro něž má předpis f smysl.*

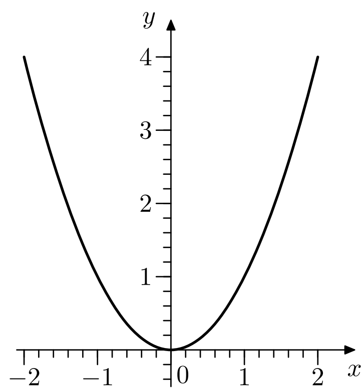
Např., je-li reálná funkce zadaná předpisem $y = \sqrt{1 - x^2}$, rozumí se definičním oborem této funkce interval $\langle -1, 1 \rangle$, neboť druhá odmocnina je definovaná jen z nezáporných čísel a $1 - x^2$ je nezáporné číslo jen pro čísla $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Pro jiná x nemá výraz $\sqrt{1 - x^2}$ v reálném oboru smysl.

Graf reálné funkce reálné proměnné. Představu o reálné funkci reálné proměnné a o jejich vlastnostech nám často dobře poskytne její grafické znázornění, neboli graf funkce. V rovině zvolíme např. pravoúhlý souřadný systém Oxy, kde O je počátkem a x, y jsou souřadné osy (označení není závazné). Jsou to dvě navzájem kolmé číselné osy se společným bodem O, který nazýváme počátkem. Osu x budeme volit v horizontální poloze a osu y ve vertikální poloze. (Dohoda.) Kladnou orientaci osy x budeme volit zleva doprava, kladnou orientaci osy y budeme volit zdola nahoru. Měřítka na souřadných osách mohou být obecně odlišná. Jsou-li stejná, mluvíme o **kartézském souřadném systému**. Každému bodu v rovině odpovídá uspořádaná dvojice reálných čísel. Prvnímu z nich říkáme x-ová souřadnice a druhému říkáme y-ová souřadnice a naopak, každé uspořádané dvojici reálných čísel odpovídá bod v rovině v daném souřadném systému. (obr.2.4).



Obrázek 2.4: Souřadnice bodu

Na následujícím obr.2.5 je znázorněn graf funkce $y = x^2$ definované na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$.



Obrázek 2.5: Graf paraboly $y = x^2$

Je-li množina B množina komplexních čísel, mluvíme o **komplexní funkci**.

Jestliže v definici zobrazení jsou množiny A, B množiny komplexních čísel, mluvíme o **komplexní funkci komplexní proměnné**. Jako příklad uveďme funkci

$$\omega = z^2 - z + 1,$$

kde $z, \omega \in \mathbb{C}$, ($\mathbb{C}$ je množina komplexních čísel).

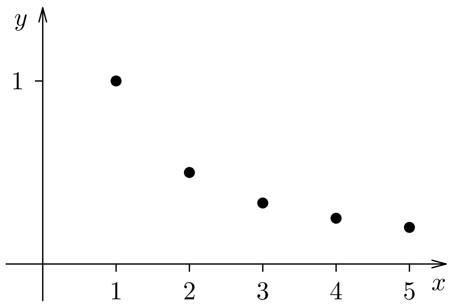
Posloupnost reálných čísel. *Reálnou funkci f, jejíž nezávislý obor je množina přirozených čísel, nazýváme posloupností. Je tedy posloupnost pravidlo, jimž je ke kažému přirozenému číslu n přiřazen prvek z nějeké množiny B. Je-li B množina reálných čísel, mluvíme o posloupnosti reálných čísel.*

Číselná posloupnost

V této části budeme mluvit jen o posloupnostech reálných čísel. Číslu n je přiřazeno číslo $f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Místo $f(n)$ je u posloupností zvykem psát f_n. Číslo f_n nazýváme n-tým členem posloupnosti. Tuto posloupnost bývá zvykem zapisovat též symbolem $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, nebo stručněji $\{f_n\}_1^{\infty}$, resp.

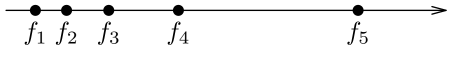
$$f_1,\ f_2,\ \ldots \tag{2.5}$$

Příklad 2.7. Jako příklad si uveďme posloupnost $\{1/n\}_1^{\infty}$. Tedy např. 5. člen této posloupnosti je roven 1/5. Na následujícím obrázku obr.2.6 je znázorněno prvních pět členů posloupnosti $\{1/n\}_1^{\infty}$.



Obrázek 2.6: Posloupnost $\{1/n\}_1^{\infty}$

Často se znázorňují pouze hodnoty f_1, f_2, f_3, … na číselné ose, která se kreslí ve vodorovné poloze. Např. na obr.2.7 je znázorněno několik členů posloupnosti $\{f_n\}_1^{\infty}$.



Obrázek 2.7: Posloupnost $\{1/n\}_1^{\infty}$

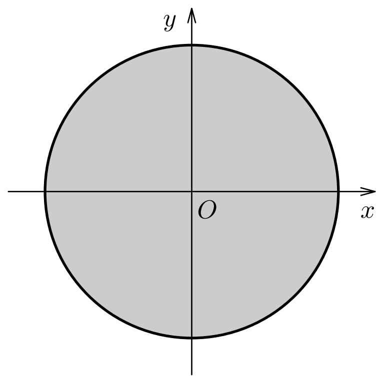
Jestliže množina A je množina uspořádaných dvojic reálných čísel a B je množina reálných čísel, potom zobrazení f množiny A do množiny B nazýváme **reálnou funkcí dvou reálných proměnných**. Označíme-li tyto proměnné symboly x, y, potom uspořádaná dvojice symbolů $[x, y]$ je symbol pro označení proměnné definičního oboru A funkce f.

Jako příklad uveďme reálnou funkci f dvou reálných proměnných x, y definovanou vztahem

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Poněvadž definiční obor této funkce není uveden, rozumíme jim množinu všech těch uspořádaných dvojic reálných čísel $[x, y]$, pro něž má předpis, jimž je funkce definovaná, smysl. Zřejmě $1 - x^2 - y^2$ má smysl pro všechny body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Avšak druhá odmocnina je v reálném oboru definovaná jen z nezáporných čísel, proto $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ má v reálném oboru smysl pouze pro ty body $[x, y]$, pro něž je výraz pod odmocninou nezáporný, to znamená pro ty body, pro něž je $1 - x^2 - y^2 \geq 0$. Rovnice $1 - x^2 - y^2 = 0$ je rovnice kružnice se středem v počátku o poloměru 1. Tato kružnice rozděluje rovinu xy na dvě části. Body v jedné části vyhovují nerovnici $1 - x^2 - y^2 > 0$ a body v druhé části vyhovují nerovnici $1 - x^2 - y^2 < 0$. Poněvadž pro bod $[0, 0]$ platí $1 - x^2 - y^2 > 0$, vyhovují nerovnici $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ všechny body uvnitř kruhu se středem v počátku o poloměru 1 a na jeho obvodu a body vně tohoto kruhu nerovnici nevyhovují. Na obr.2.8 je znázorněn definiční obor diskutované funkce

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$



Obrázek 2.8: Definiční obor funkce $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Kontrolní otázky

1. Co je to zobrazení F množiny A do množiny B? Co je to definiční obor zobrazení, co je to obor zobrazení?

2. Vysvětlete, co je to prosté zobrazení A na B.

3. Co je to inverzní zobrazení?

4. Co je to funkce jedné proměnné? Co je to funkce více proměnných?

2.2 Reálná funkce reálné proměnné

Pojem reálné funkce

Předpokládejme, že A, B jsou neprázdné množiny reálných čísel. Potom *předpis* f, jimž ke každému prvku $x \in A$ je přiřazen právě jeden prvek $y \in B$, nazýváme reálnou funkcí reálné proměnné. Pokud nemůže dojít k omylu, budeme v dalším zkráceně mluvit jen o *funkci*. Tuto funkci budeme většinou zapisovat takto

$$y = f(x), \qquad x \in A. \tag{2.6}$$

Množinu A nazýváme *neodvislým oborem*, proměnnou x s oborem hodnot A nazýváme neodvisle proměnnou. Množinu B nazýváme odvislým oborem. Je nutno si uvědomit, že v B mohou existovat čísla, která nejsou přiřazena žádnému číslu $x \in A$. Množinu všech těch čísel $y \in B$, která jsou přiřazena ke všem číslům $x \in A$, nazýváme oborem funkce f. Neodvislý obor funkce f nazýváme též definičním oborem, budeme jej značit $D(f)$, resp. D_f. Obor funkce budeme značit $H(f)$, resp. H_f. Zřejmě $H_f \subseteq B$. Bude-li funkce f zadaná předpisem bez udání definičního oboru, rozumí se jím množina všech těch čísel, pro něž má předpis přiřazení význam. *Jestliže $M \subseteq D_f$, potom množinu $\{f(x) : x \in M\}$ lze označit jako $f(M)$.*

Uveďme si několik příkladů.

Příklad 2.8. Položme

$$y = 2x + 1, \qquad x \in \langle 1, 4 \rangle. \tag{2.7}$$

Ke každému číslu $x \in \langle 1, 4 \rangle$ se přiřazuje vztahem (2.7) právě jedno číslo, totiž číslo $2x + 1$. Je tedy $2x + 1$ funkce definovaná na intervalu $\langle 1, 4 \rangle$. Pro pohodlnější zápis si například označme tuto funkci jako $g(x)$, takže

$$g(x) = 2x + 1.$$

Např. k číslu 3 je touto funkcí přiřazeno číslo $2 \cdot 3 + 1$, to jest číslo 7. Místo rčení „k číslu 3 je přiřazeno číslo 7“ můžeme též říci, že funkce g nabývá v bodě (čísle) 3 hodnotu 7. Píšeme pak $g(3) = 7$. Podobně $g(1{,}5) = 2 \cdot 1,5 + 1$, to jest $g(1{,}5) = 4$. Lehce nahlédneme, že oborem funkce g je interval $\langle 3, 9 \rangle$. Píšeme též $g(\langle 1, 4 \rangle) = \langle 3, 9 \rangle$

Příklad 2.9. Položme

$$y = \sqrt{2x + 1}. \tag{2.8}$$

Předpisem (2.8) je definovaná funkce. Poněvadž není uveden její definiční obor, rozumí se jím množina všech těch čísel x, pro něž má předpis $\sqrt{2x + 1}$ význam. Tedy $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \geq 0\}$. Tedy

$$D(f) = \left\langle -\frac{1}{2}, \infty \right).$$

Příklad 2.10. Označme h funkci

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

s definičním oborem $A = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$. Tuto funkci lze zapsat též takto

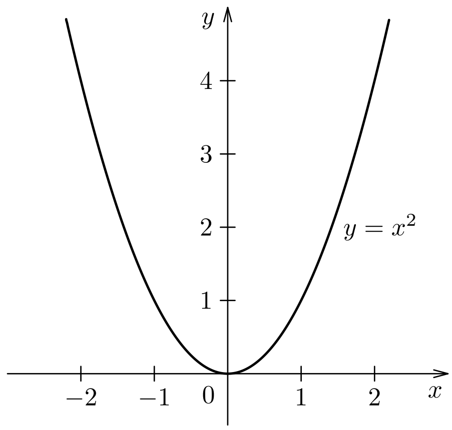
$$\begin{aligned} h : (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\rightarrow \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Grafem *funkce* $f : A \rightarrow B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ *v pravoúhlém souřadném systému* $0xy$ *rozumíme množinu všech bodů* $[x, f(x)]$, $x \in A$.

Grafy většiny funkcí, které se vyskytují v ekonomických aplikacích, odpovídají intuitivnímu chápání křivky v rovině. Jako příklad si uveďme graf funkce

$$y = x^2, \qquad x \in \langle -2, 2\rangle$$

uvedený na obr. 2.9



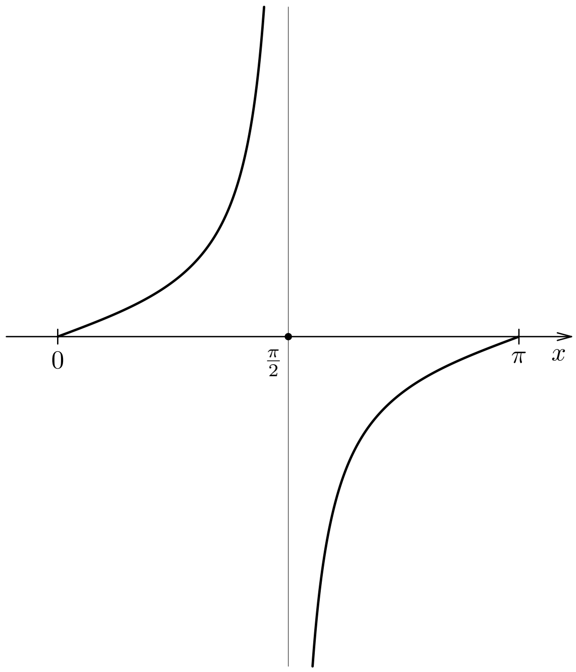
Obrázek 2.9: Graf funkce $y = x^2$.

Grafy některých funkcí si nedovedeme vykreslit. Příkladem je funkce

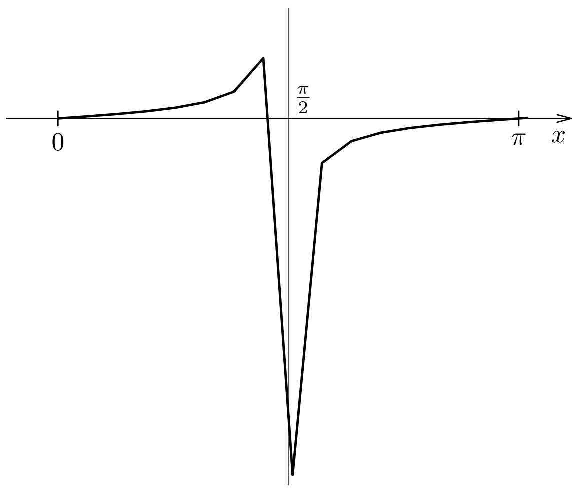
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \{-1, 1\} \\ x &\rightarrow \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \text{ racionální}, \\ -1, & \text{je-li } x \text{ iracionální}. \end{cases} \end{aligned}$$

K vytvoření si hrubé představy o grafu vyšetřované funkce $f : A \rightarrow B$ si v množině A můžeme zvolit body $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ a v nich vypočítat funkční hodnoty $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. Jestliže pro nějaké i je $\langle x_i, x_{i+1}\rangle \subset A$, spojíme body $[x_i, f(x_i)]$, $[x_{i+1}, f(x_{i+1})]$ úsečkou. Pro „slušné“ funkce, nejsou-li vzdálebosti bodů x_i, x_{i+1} velké, nám tyto úsečky dají dobrou představu o grafu funkce. Tímto způsobem se provádí i vykreslování grafů funkcí užitím počítače pro jemné dělení intervalu, v němž graf vyšetřujeme. Na obr. 2.10 je schematický náčrtek grafu funkce

$$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{pro } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle, \\ 0, & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{2.9}$$



Obrázek 2.10: Graf funkce definované vztahem (2.9).



Obrázek 2.11: Pokus o vykreslení funkce $y = \mathrm{tg}(x)$

Na obr. 2.11 je graficky „znázorněna“ funkce (2.9) propojením bodů

$$[x_k, \mathrm{tg}(x_k)], \quad \text{kde } x_k = k \cdot 0{,}2, \quad k = 0, \cdots, 31.$$

Porovnáním obr. 2.11 s obr. 2.10 vidíme, že došlo ke značnému zkreslení. Daná funkce není „slušná“. Je v bodě $\frac{\pi}{2}$ nespojitá. Pojem nespojitosti funkce si vysvětlíme později, zatím poznamenejme alespoň to, že hodnoty této funkce se v bodech blízkých k číslu $\frac{\pi}{2}$ značně liší od hodnoty této funkce v bodě 0, tj. od čísla 0.

Obdržený výsledek ukazuje, že výše *uvedený postup „znázornění funkce" není postačující, je nutno jej kombinovat s vyšetřením některých vlastností funkce.*

V ekonomických rozvahách se bez pojmu funkce neobejdeme. Jako příklad funkce, která se v ekonomických aplikacích vyšetřuje, je funkce $C(x)$, která vyjadřuje vztah mezi výrobou x jednotek produkce a celkovými náklady na jejich výrobu. Tyto výrobní náklady jsou součtem fixních nákladů a nákladů variabilních, závislých na počtu x jednotek produkce. Funkce $\frac{C(x)}{x}$ se pak nazývá funkcí průměrných nákladů. Uveďme si tento příklad.

Příklad. Při kalkulaci nákladů se odhadnou fixní náklady na 300 p.j. (peněžních jednotek). Jsou to náklady, které vznikají, ať se vyrábí nebo ne. Kromě toho se zjistí, že na výrobu x jednotek je zapotřebí $4x$ p.j. Tedy variabilní náklady jsou $4x$. Celkové náklady jsou tedy

$$C(x) = 300 + 4x.$$

Tuto funkci lze pak použít k dalším úvahám, např. ke stanovení průměrných nákladů AC

$$AC = 4 + \frac{300}{x}.$$

Funkce $C(x)$ ovšem nemusí být lineární. Dále v praktických úlohách nemůže x přesáhnout jistou hodnotu K. Tedy $1 \le x \le K$.

Poznamenejme, že x v uvedeném příkladě značí počet jednotek produkce. Tedy x může být v konrétním případě jen přirozené číslo. *Kvůli zjednodušení zkoumané ekonomické problematiky se často používá model s proměnou x, která nabývá všech hodnot jistého intervalu reálných čísel. Tím můžeme dostat zkreslené výsledky.*

Funkce rostoucí, funkce klesající

Funkce monotónní, funkce sudá a funkce lichá

Uveďme si nyní některé význačné třídy funkcí, to jest funkcí s některými třídě charakteristickými vlastnostmi. Začněme s *monotónními funkcemi.*

Definice 2.2.

Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na množině A rostoucí (neklesající), jestliže

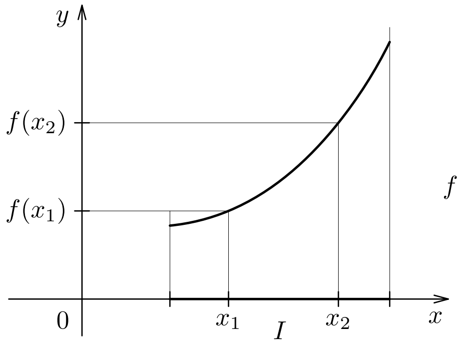
$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2), \quad (f(x_1) \le f(x_2)). \tag{2.10}$$

Definice 2.3.

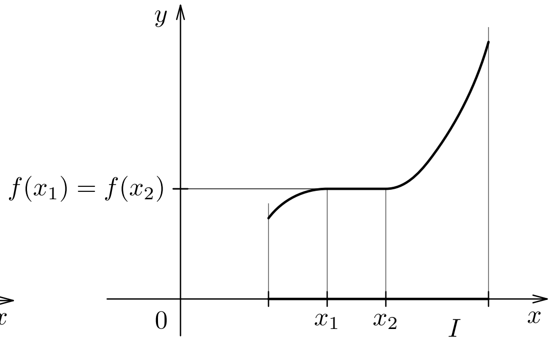
Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na množině A klesající (nerostoucí), jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2), \quad (f(x_1) \geq f(x_2)). \tag{2.11}$$

Na obr. 2.12 je uveden příklad grafu funkce rostoucí a na obr. 2.13 je uveden příklad grafu funkce neklesající na intervalu I.



Obrázek 2.12: Graf rostoucí funkce.



Obrázek 2.13: Graf neklesající funkce.

Funkce na obr. 2.10 je na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, je rovněž rostoucí na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$. Není rostoucí ani na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ ani na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$. Není ani rostoucí na intervalu $(0, \pi)$. Zdůvodněte!

Poznámka. Uveďme si, kdy funkce f není na množině A, na níž je definovaná, rostoucí. Negujme tedy (2.10) v definici 2.2. Dostáváme:

Funkce $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ není na A rostoucí, jestliže existují taková čísla $x_1, x_2 \in A$, že $x_1 < x_2$ a $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Podobně vyjádřete, že f není na množině A neklesající, resp. klesající, resp. nerostoucí. Funkce nerostoucí a funkce neklesající na dané množině nazýváme společným názvem *funkce monotónní*. Funkce rostoucí a funkce klesající na dané množině nazýváme společným názvem *funkce ryze monotónní*. Je-li funkce ryze monotónní, je i monotónní. Opak nemusí platit.

Funkce prostá. *Dalším důležitým pojmem je funkce prostá. Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkci f nazveme prostou na A, jestliže f má tuto vlastnost*

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \ \text{ je } \ f(x_1) \neq f(x_2). \tag{2.12}$$

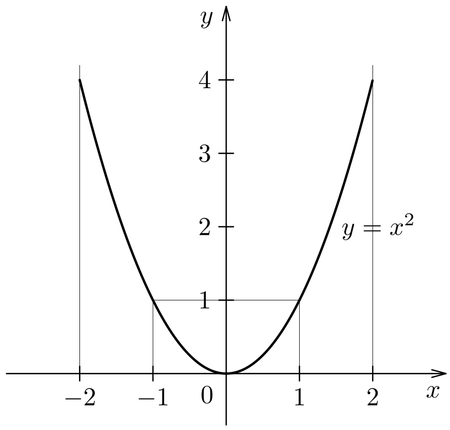
Funkce prostá

Příklad 2.11. Nechť funkce $y = f(x)$ je dána tabulkou

x	1	3	3,5	4	5
y	3	1	0	2	4

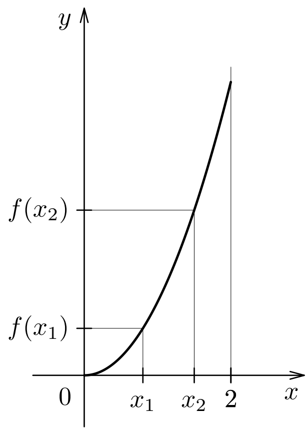
Tedy např. $f(3) = 1$, $f(4) = 2$ atd. Tato funkce je prostá. Není však ani rostoucí ani klesající.

Příklad 2.12. Funkce $y = x^2$ není na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ prostá. Označme $f(x) = x^2$. Zvolme např. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Je tedy $x_1 \neq x_2$, avšak $f(x_1) = f(x_2) = 1$. Viz obr. 2.14.



Obrázek 2.14: Funkce $y = x^2$ definovaná na intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

Funkce $y = x^2$ je na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ prostá. Viz obr. 2.15



Obrázek 2.15: Funkce $y = x^2$ je na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ prostá.

Porovnáním definicí rostoucí funkce, klesající funkce a prosté funkce dospějeme k tomuto závěru:

Funkce ryze monotónní na $A \subseteq \mathbb{R}$ je na A též prostá.

Existuje však funkce prostá, která není ryze monotónní (viz příklad 2.11).

Funkce sudá, funkce lichá

Definice 2.4.

Řekneme, že *funkce* $y = f(x)$ je *sudá (lichá)*, má-li tuto vlastnost: Je-li definovaná v bodě x, je definovaná i v bodě $(-x)$ a platí $f(-x) = f(x)$, $\quad (f(-x) = -f(x))$.

Z definice je tedy patrno, že graf sudé funkce je symetrický vzhledem k ose y a graf liché funkce je symetrický vzhledem k počátku.

Příkladem sudé funkce je funkce $y = x^2$. Skutečně, tato funkce je definovaná pro všechna x a platí $(-x)^2 = x^2$. Příkladem liché funkce je funkce $y = x^3$. Skutečne, tato funkce je definovaná pro všechna x a platí $(-x)^3 = -x^3$.

Kontrolní otázky

1. Nechť $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$. Vypočítejte

a) $f(2)$ [7]

b) $f(\langle 0,3\rangle)$ [nelze, v bodě $1 \in \langle 0,3\rangle$ není $f(x)$ definováno]

c) $f(\langle 5,6\rangle)$ [$\langle \frac{17}{5}, 4\rangle$]

2. Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$.
[$D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$]

3. Zjistěte, zda funkce jsou sudé, resp. liché:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^4-1}$ [sudá]

b) $g(x) = \frac{x}{x^3+2}$ [není ani sudá, ani lichá]

c) $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ [lichá]

d) $u(x) = \frac{x^2+1}{x}$ [lichá]

4. Co je to funkce rostoucí, klesající, monotonní?

5. Načrtněte grafy funkcí

a) $y = 2x - 1$

b) $y = x^3 + 1$

c) $y = \frac{3x+1}{x-2}$

2.3 Spojitost funkce

Spojitost funkce v bodě

Začněme s grafem funkce $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (obr. 2.16) a s grafem funkce $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (obr. 2.17) a všimněme si, jak se tyto funkce chovají v „blízkosti“ bodu $x = a \in A$.

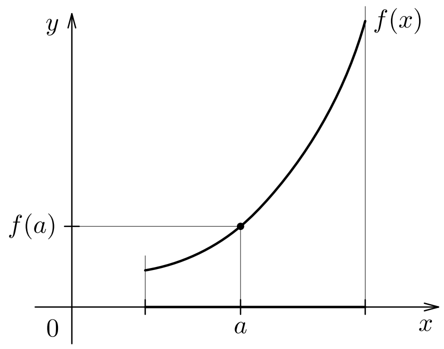
Funkce f se v číslech x blízkých k číslu a málo liší od hodnoty $f(a)$. Naproti tomu funkce g se v číslech x blízkých k číslu a hodně liší od hodnoty $g(a)$. Tuto charakteristickou vlastnost funkce f lze volně popsat tak, že řekneme, že graf funkce f je v bodě a „nepřetržitý“. Podobně uvedenou charakteristickou vlastnost funkce g lze volně popsat tak, že řekneme, že graf funkce g je v bodě a „přetržitý“.

Použitá rčení „x je blízko k číslu a“, „$f(x)$ se málo liší od $f(a)$“ a „$g(x)$ se hodně liší od $g(a)$“, graf je „přetržitý“ je nutno upřesnit. Upřesníme je v následující definici.

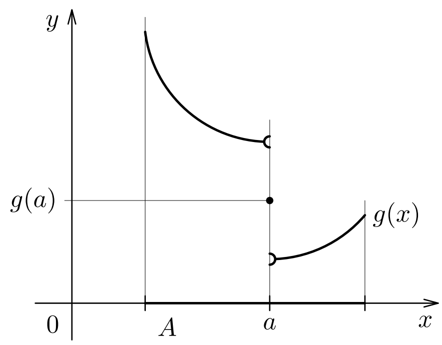
Definice 2.5. (Spojitost funkce.)

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I. Nechť a je vnitřním bodem intervalu I. Řekneme, že funkce $f(x)$ je

v bodě a spojitá, jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že
1. $U_\delta(a) \subset I$,
2. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad$ pro $x \in U_\delta(a)$.



Obrázek 2.16:
Funkce spojitá v bodě $x = a$.

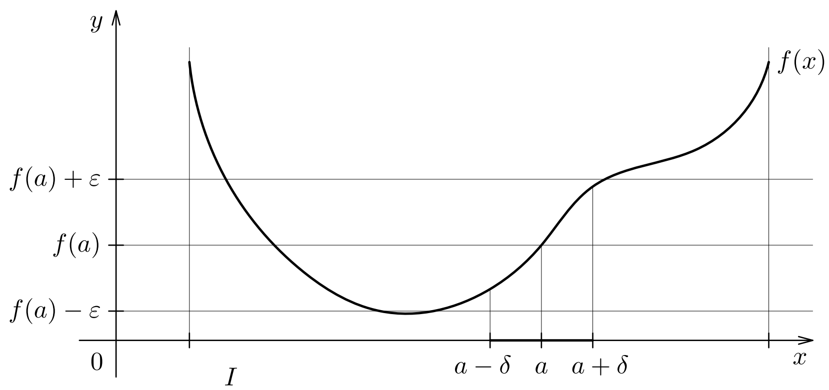


Obrázek 2.17:
Funkce nespojitá v bodě $x = a$.

Vztah $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ v definici vyjadřuje, že hodnota funkce f v bodě x se liší od $f(a)$ o méně než ε. Číslo ε může znamenat libovolné kladné číslo. Okolnost, že $x \in U_\delta(a)$ znamená, že

$$a - \delta < x < a + \delta, \tag{2.13}$$

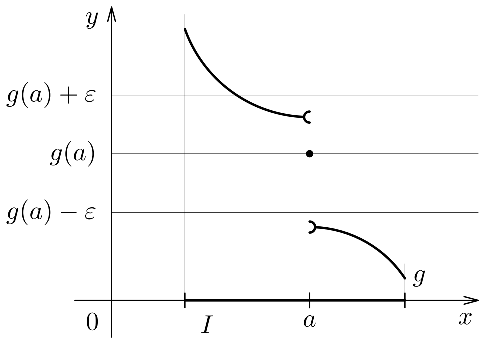
tedy, že bod x je od bodu a vzdálen o méně než δ. Funkce $f(x)$ znázorněna



Obrázek 2.18: Funkce spojitá v bodě a.

na obrázku 2.18 je v bodě a spojitá. K libovolně zvolenému číslu ε existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro $x \in (a - \delta, a + \delta)$ leží graf funkce v pásu omezeném přímkami $y = f(a) - \varepsilon$, $y = f(a) + \varepsilon$. Číslo ε je zvoleno libovolně, číslo $\delta > 0$ se určuje k zvolenému $\varepsilon > 0$.

Význam definice 2.5 je graficky znázorněn na obr. 2.19 pro funkci g, která není v bodě a spojitá.



Obrázek 2.19: Graf nespojité funkce.

Na grafu 2.19 je patrno, že lze zvolit takové číslo $\varepsilon > 0$, že k němu neexistuje číslo $\delta > 0$ tak, aby graf funkce g probíhal v intervalu $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ v pásu omezeném přímkami $y = g(a) - \varepsilon$, $y = g(a) + \varepsilon$. Tedy funkce g není spojitá v bodě a.

Příklad 2.13. Funkce $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Skutečně. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $\delta > 0$ platí

$$U_\delta(a) \subset \mathbb{R},$$

$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon, \qquad x \in U_\delta(a).$$

Je tedy funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.14. Funkce $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Skutečně. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Pak

$$U_\delta(a) = U_\varepsilon(a) = \{x : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} \subset \mathbb{R}$$

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon, \qquad x \in U_\delta(a).$$

Je tedy funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Podobně definujeme spojitost zprava a spojitost zleva funkce $f(x)$.

Definice 2.6. (Spojitost funkce zleva a zprava.)

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I. Nechť $a \in I$ je levým (pravým) koncovým bodem intervalu I. Řekneme, že funkce $f(x)$ je v bodě a spojitá zprava (zleva), jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že

1. $U_\delta^+(a) \subset I \qquad (U_\delta^-(a) \subset I)$,
2. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad$ pro $x \in U_\delta^+(a) \qquad (x \in U_\delta^-(a))$.

Poznámka. Z definic 2.5, 2.6 vyplývá toto tvrzení:

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I a nechť a je jeho vnitřním bodem. Potom funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a právě tehdy, když je v bodě a spojitá zprava i zleva.

Zodpovězme si nyní otázku, zda funkce $F(x)$, která vznikne z funkcí $f(x)$, $g(x)$ spojitých v bodě a sečtením, resp. odečtením, resp. násobením, resp. dělením, je rovněž v bodě a spojitá. Platí tato věta. (Analogická věta platí pro spojitost zleva (zprava) a v bodě a.)

Věta 2.1.

Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou definovány v intervalu I a nechť jsou spojité v jeho vnitřním bodě a. Potom i funkce $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je i funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v bodě a.

Důkaz:

a) Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž $f(x)$ je spojitá v bodě a, existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $U_{\delta_1}(a) \subset I$ a pro $x \in U_{\delta_1}(a)$ platí

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.14}$$

Podobně, poněvadž $g(x)$ je spojitá v bodě a, existuje $\delta_2 > 0$ tak, že $U_{\delta_2}(a) \subset I$ a pro $x \in U_{\delta_2}(a)$ platí

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.15}$$

Položme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom pro $x \in U_\delta(a)$ dostáváme

$$|(f(x) \pm g(x)) - (f(a) \pm g(a))| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.16}$$

Jsou tedy funkce $f(x) \pm g(x)$ spojité v bodě a.

b) Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Položme

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|f(a)| + |g(a)| + 1},$$

takže $\varepsilon_1 > 0$. Existuje tedy $\delta_1 > 0$ tak, že funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou definovány v $U_{\delta_1}(a)$ a pro $x \in U_{\delta_1}(a)$ platí

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1, \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon_1. \tag{2.17}$$

Dále existuje takové $\delta_2 > 0$ tak, že pro $x \in U_{\delta_2}(a)$ platí $|f(x) - f(a)| < 1$. Je tedy

$$|f(x)| = |f(a) + (f(x) - f(a))| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| < |f(a)| + 1. \tag{2.18}$$

Položme
$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2).$$
Potom pro $x \in U_\delta(a) \subset I$ platí
$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| = |f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))|,$$
to jest
$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(a)| + |g(a)| \cdot |f(x) - f(a)|.$$
Úpravou s ohledem na (2.17), (2.18)
$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq (|f(a)| + 1)\varepsilon_1 + |g(a)|\varepsilon_1 = \varepsilon. \qquad (2.19)$$
Je tedy funkce $f(x)g(x)$ spojitá v bodě a.

c) Důkaz posledního vztahu pro spojitost funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ v bodě a se provádí podobně. Přenechávám jej čtenáři. □

Důsledek 1. *Poněvadž funkce $g(x) = c$ pro $x \in \mathbb{R}$ je spojitá, dostáváme z věty 2.1 tento závěr:*

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I a nechť a je jeho vnitřní bod. Potom funkce $cf(x)$ je spojitá v a.

Toto tvrzení lze zobecnit:

Nechť funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ jsou definované na intervalu I a jsou spojité v jeho vnitřním bodě a. Nechť $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Potom funkce
$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) \qquad (2.20)$$
$$f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) \qquad (2.21)$$
jsou spojité v bodě a. (Dokažte!)

Slovy: Lineární kombinace funkcí spojitých v bodě a je opět spojitá v bodě a.

Důsledek 2.

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu I a je spojitá v jeho vnitřním bodě a. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce
$$f^n(x) \qquad (2.22)$$
spojitá v bodě a. (Dokažte!)

Spojitost reálného polynomu.

Nechť

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0, \tag{2.23}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$*. Potom funkce* (2.23)*, zvaná reálný polynom stupně* n*, je spojitá v každém bodě* $a \in \mathbb{R}$*.*

Důkaz: Podle příkladu 2.14 je funkce $y = x$ spojitá v bodě a a podle příkladu 2.13 je funkce $y = c$ spojitá v bodě $x = a$. Podle důsledku 2 jsou spojité i funkce x^m pro $m = 1, 2, \ldots, n$. Podle důsledku 1 je v bodě a spojitá i funkce (2.23). □

Příklad 2.15. Funkce $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$ jsou spojité v každém bodě. Podle věty 2.1 je i funkce $\frac{x+1}{x^2+1}$ jakožto podíl dvou spojitých funkcí spojitá v bodech, v nichž je $x^2 + 1 \neq 0$. Poněvadž $x^2 + 1 \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je daná funkce spojitá v každém bodě $x \in I$.

Příklad 2.16. Funkce $y = \frac{x-1}{x^2-1}$ není v bodě 1 spojitá, poněvadž v něm není ani definovaná.

Příklad 2.17. Funkce

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{pro } x \neq 1, x \neq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 1 \end{cases} \tag{2.24}$$

je spojitá v bodě $x = 1$.

Skutečně. Pro $x \neq 1$ je

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}. \tag{2.25}$$

Položme $g(x) = \frac{1}{1+x}$ pro $x \in \mathbb{R}, x \neq -1$. Funkce $g(x)$ je v bodě 1 spojitá podle věty 2.1, neboť $g(x)$ je podíl dvou funkcí spojitých v bodě 1. Tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta >$ tak, že $U_\delta(a) \subset Dg$ a platí

$$\left| g(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \qquad \text{pro } x \in U_\delta(a). \tag{2.26}$$

Tedy

$$F(x) = g(x) \qquad \text{pro} \;\; x \in U_\delta(a), \tag{2.27}$$

$$F(1) = g(1) = \frac{1}{2}.$$

Je tedy funkce $F(x)$ rovna spojité funkci $g(x)$, $x \in U_\delta(a)$. Je tedy funkce $F(x)$ v bodě a spojitá.

Funkce spojité na intervalu. Vraťme se znovu k pojmu spojitosti funkce. Některé funkce, např. funkce $y = x^2 + 3x + 1$, jsou spojité v každém bodě $x \in (-\infty, \infty)$. Zavedeme si nyní pojem spojitosti funkce na intervalu. Připomeňme si napřed, že bod $a \in I$ je *vnitřním bodem intervalu* I, není-li jeho krajním bodem.

Definice 2.7. (Funkce spojitá na intervalu)

Budeme říkat, že *funkce* $f(x)$ je *spojitá na intervalu* I, jestliže

i) je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I,

ii) je-li a levým (pravým) koncovým bodem intervalu I, a $a \in I$, potom $f(x)$ je v bodě a spojitá zprava (zleva).

Funkce spojitá na intervalu – vlastnosti

Příklad 2.18. Funkce $F(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 2, 3\rangle$.

Skutečně. Funkce $f(x) = 1$, $g(x) = x$ jsou spojité na intervalu $(-\infty, \infty)$ a $g(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$. Podle věty 2.1 je funkce $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v každém bodě intervalu $(2, 3)$. Dále $f(x)$ je spojitá též zprava (zleva) v bodě $a = 2$ $(b = 3)$. Odtud dostáváme, že $F(x)$ je spojitá na $\langle 2, 3\rangle$.

Uveďme si několik důležitých vlastností funkcí spojitých na intervalu I.

Věta 2.2. (Zobrazení intervalu)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I. Potom zobrazuje interval I buďto na jednobodovou množinu, nebo na interval.

Důkaz: Bez důkazu. □

Příklad 2.19. Funkce $f(x) = 3$, $x \in \langle 1, 2\rangle$ zobrazuje interval $\langle 1, 2\rangle$ na množinu $\{3\}$. Funkce $g(x) = 3x + 2$ zobrazuje interval $\langle 5, 7)$ na interval $\langle 17, 23)$. Načrtněte grafy obou funkcí a na obrázku zdůvodněte toto tvrzení.

Věta 2.3. (Existence maxima a minima funkce)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom v něm nabývá své maximální i minimální hodnoty alespoň v jednom bodě.

Důkaz: Bez důkazu. □

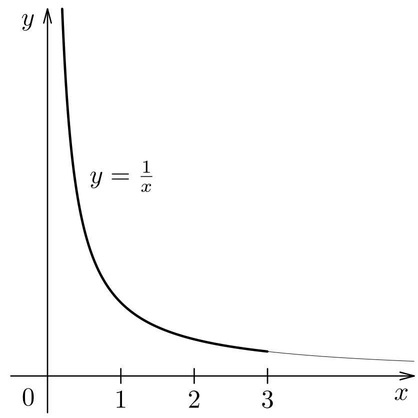
Příklad 2.20. Funkce $f(x) = x^2$, $x \in \langle -1, 3\rangle$ nabývá své minimální hodnoty v bodě $x = 0$ a maximální hodnoty v bodě $x = 3$.

Příklad 2.21. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 3\rangle$ nabývá v intervalu $(0, 3\rangle$ své minimální hodnoty v bodě 3, maximální hodnoty nenabývá. Funkce $F(x)$ je spojitá na intervalu $(0, 3\rangle$, v bodě 0 není definovaná. Viz obr. 2.20.

Znamení spojité funkce

Znamení funkce

Nulový bod funkce. Číslo α nazýváme nulovým bodem funkce f, jestliže $f(\alpha) = 0$.



Obrázek 2.20: Funkce $y = \frac{1}{x}$ definovaná na intervalu $(0, 3\rangle$

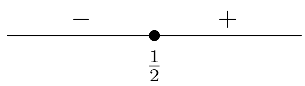
co je to znamení funkce

> *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I. Určit znamení funkce $f(x)$ znamená určit její nulové body a intervaly, v nichž funkce f nabývá jen kladné hodnoty a intervaly, v nichž nabývá jen záporné hodnoty.*

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I, jehož levý (pravý) koncový bod je $a \in \mathbb{R}^*$ ($b \in \mathbb{R}^*$). Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou nulové body funkce $f(x)$, které jsou vnitřními body intervalu I. Položme $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$. Potom funkce $f(x)$ je na každém intervalu (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, \dots, n$ kladná nebo záporná.

Příklad 2.22. Určete znamení funkce $f(x) = 2x - 1$.

Řešení. Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$. Má jediný kořen $x = \frac{1}{2}$, který dostaneme řešením rovnice $f(x) = 0$, tj. rovnice $2x - 1 = 0$. Položme $x_1 = \frac{1}{2}$. Poněvadž např. pro $x = 0 \in (-\infty, \frac{1}{2})$ je $f(0) = -1 < 0$, je $f(x) < 0$ na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$. Podobně, poněvadž např. pro $x = 1$ je $f(1) = 1 > 0$, je $f(x) > 0$ na intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$. Graficky znázorníme znamení této funkce takto:



Kontrolní otázky

1. Vysvětlete pojem spojitosti funkce v bodě.

2. Uveďte, zda funkce je spojitá v daném bodě a.

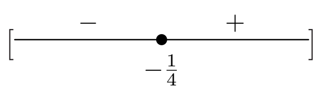
a) $y = x^2 + 1$, $a = 2$ [je spojitá]

b) $y = \frac{1}{x-1}$, $a = 1$ [není spojitá]

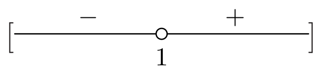
3. Nechť $f(x) = -x + 2$. Určete $f(\langle 0, 2\rangle)$. [$\langle 0, 2\rangle$]

4. Určete znamení funkcí

a) $y = 4x + 1$



b) $y = \frac{1}{x-1}$



2.4 Polynom a racionální lomená funkce

Polynom

Příkladem komplexní funkce komplexní proměnné je polynom.

Nechť $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ *jsou komplexní čísla. Jestliže ke každému komplexnímu číslu* $x \in \mathbb{C}$ *přiřadíme číslo* $f(x)$ *vztahem*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2.28}$$

je jím definována komplexní funkce na množině všech komplexních čísel $\mathbb{C}$*. Tato funkce se nazývá* polynom*. Čísla* $a_n, \dots, a_0$ *nazýváme koeficienty polynomu* $f(x)$*. Číslo* a_0 *nazýváme absolutním členem polynomu* $f(x)$*. Jestliže* $a_n \neq 0$*, polynom* $f(x)$ *nazýváme polynomem* n*-tého stupně.*

Např. $f(x) = x^2 + 1$ je polynom 2. stupně. Podle definice stupně není polynomu $f(x) = 0$ přiřazen žádný stupeň. Nazýváme jej *nulovým polynomem.*

Číslo α *nazýváme kořenem (nulovým bodem) polynomu* $f(x)$*, jestliže*

$$f(\alpha) = 0.$$

Např. polynom

$$P(x) = x^3 + x \tag{2.29}$$

má kořeny $0, i, -i$, neboť $P(0) = 0$, $P(i) = i^3 + i = 0$. Podobně $P(-i) = (-i)^3 + (-i) = 0$.

Jestliže $P(x)$ je polynom a α je jeho kořen, potom polynom prvního stupně $x - \alpha$ se nazývá *kořenovým činitelem odpovídajícímu kořenu* α.

O polynomu platí tyto věty:

Věta 2.4.

Nechť α *je kořenem polynomu* $f(x)$ *stupně* $n \geq 1$*. Potom existuje takový polynom* $g(x)$ *stupně* $n - 1$*, že pro každé komplexní číslo* x *platí*

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x).$$

$x - \alpha$ *nazýváme kořenovým činitelem polynomu* $f(x)$*.*

Důkaz: Poněvadž $f(\alpha) = 0$ lze polynom $f(x)$ zapsat jako

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\alpha) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) - \\ &\quad -(a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0). \end{aligned}$$

Úpravou dostáváme

$$f(x) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha).$$

Poněvadž

$$x^k - \alpha^k = (x-\alpha)(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \cdots + \alpha^{k-1}), \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n,$$

lze psát

$$f(x) = (x-\alpha)\cdot[a_n(x^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1],$$

to jest

$$f(x) = (x-\alpha)g(x),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Příkladem je polynom

$$f(x) = x^2 - x - 2,$$

který má číslo 2 za svůj kořen, neboť $f(2) = 0$. Existuje tedy polynom $g(x)$ stupně 2 tak, že

$$f(x) = (x-2)g(x).$$

Dělením polynomu $f(x)$ kořenovým činitelem $x - 2$ dostáváme

$$\begin{array}{l} (\ \ x^2 - \ \ x - 2\,) : (x-2) = x + 1 \\ \underline{\pm x^2 \mp 2x} \\ \qquad\quad\ x - 2 \\ \qquad\ \ \underline{\pm\ \ x \mp 2} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

tj.

$$(x^2 - x - 2) : (x - 2) = x + 1,$$

takže

$$f(x) = (x-2)(x+1).$$

Kořeny polynomu

Zatím jsme pouze zavedli pojem kořene polynomu, ale nezabývali jsme se problémem existence kořene polynomu. O tom vypovídá následující věta:

Věta 2.5. (Fundamentální věta algebry)

Každý polynom stupně $n \geq 1$ má v oboru komplexních čísel kořen.

Důkaz: Bez důkazu. □

Definice 2.8.

Říkáme, že číslo α je *k–násobným kořenem polynomu* $f(x)$, jestliže pro každé komplexní číslo x platí

$$f(x) = (x - \alpha)^k g(x),$$

kde $g(x)$ je takový polynom, že $g(\alpha) \neq 0$.

Příklad 2.23. Polynom $x^3 - 3x^2 + 4$ lze zapsat ve tvaru

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1).$$

Je tedy $x = 2$ dvojnásobným a $x = -1$ jednoduchým kořenem polynomu $x^3 - 3x^2 + 4$.

Důsledek. *Polynom n–tého stupně, $n \geq 1$,*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

má právě n kořenů, počítáme-li k–násobný kořen za k kořenů.

Důkaz: Jestliže $n = 0$, $a_0 \neq 0$, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $f(x)$ je polynom stupně 1. Potom $f(x) = a_1 x + a_0$, kde $a_1 \neq 0$. Potom $f(x) = a_1(x + \frac{a_0}{a_1})$, takže $f(x) = (x - \alpha)a_1$, kde $\alpha = -\frac{a_0}{a_1}$.
Předpokládejme, že věta platí pro polynomy stupně $n - 1$ a dokažme, že pak věta platí také pro polynomy stupně n. Nechť tedy

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Podle fundamentální věty algebry má polynom $f(x)$ kořen v oboru komplexních čísel, označme jej α. Tedy

$$f(x) = (x - \alpha)g(x),$$

kde $g(x)$ je polynom stupně $n - 1$, který má podle předpokladu $n - 1$ kořenů. Poněvadž α je kořenem polynomu $f(x)$, má $f(x)$ právě n kořenů. □

Příklad 2.24. Poněvadž

$$x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = (x + 2)^3(x - 2),$$

je $x = 2$ jednoduchým a $x = -2$ trojnásobným kořenem tohoto polynomu. Má tedy daný polynom 4 kořeny.

Důsledek. *Jestliže polynom $f(x)$ je roven nule v nekonečně mnoha číslech, pak je to polynom nulový.*

Důkaz: Kdyby polynom byl stupně $n \geq 1$, byl by roven nule nejvýše v n navzájem různých číslech. To je spor, takže polynom má všechny koeficienty nulové. Pro $n = 0$ je věta zřejmá. □

Důsledek. *Jestliže dva polynomy $f(x), g(x)$ nabývají stejné hodnoty v nekonečně mnoha číslech, pak mají stejné koeficienty u stejných mocnin x.*

Důkaz: Označme

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Polynom $h(x)$ má nulovou hodnotu v nekonečně mnoha číslech, takže všechny jeho koeficienty jsou nulové. Odtud snadno plyne tvrzení. □

Reálný polynom

Polynom s reálnými koeficienty budeme nazývat reálným polynomem.

Věta 2.6.

Je-li $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ jednoduchým kořenem reálného polynomu

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n+1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{2.30}$$

je též číslo $\alpha - i\beta$ jeho kořenem.

Důkaz: Dosazením $x = \alpha + i\beta$ do (2.30) dostáváme

$$\begin{aligned} f(\alpha + i\beta) &= a_n(\alpha + i\beta)^n + a_{n-1}(\alpha + i\beta)^{n-1} + \cdots + a_1(\alpha + i\beta) + a_0 \\ &= A + iB, \end{aligned}$$

kde $A = \mathrm{Re}(f(\alpha+i\beta))$, $B = \mathrm{Im}(f(\alpha+i\beta))$. Poněvadž $f(\alpha+i\beta) = A+iB = 0$, je $A = 0$, $B = 0$. Poněvadž $(\alpha - i\beta)^r$ je číslo komplexně sdružené k číslu $(\alpha + i\beta)^r$ pro $r = 1, 2, \dots, n$, platí

$$\begin{aligned} f(\alpha - i\beta) &= a_n(\alpha - i\beta)^n + a_{n-1}(\alpha - i\beta)^{n-1} + \cdots + a_1(\alpha - i\beta) + a_0 \\ &= A - iB. \end{aligned}$$

Poněvadž $A = B = 0$, je $f(\alpha - i\beta) = 0$, takže $\alpha - i\beta$ je kořenem polynomu (2.30). □

Je tedy polynom (2.30) dělitelný součinem kořenových činitelů

$$(x - (\alpha + i\beta)) \cdot (x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2,$$

tedy reálným polynomem druhého stupně. Je tedy

$$f(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2] f_1(x), \tag{2.31}$$

kde $f_1(x)$ je reálný polynom stupně $n-2$. Kdyby $\alpha+i\beta$ byl dvojnásobným kořenem reálného polynomu $f(x)$, byl by $\alpha+i\beta$ jednoduchým kořenem reálného polynomu $f_1(x)$, určeného vztahem (2.31). Tedy $\alpha-i\beta$ by byl podle věty 2.6 též jeho kořenem. Bylo by tedy možné psát

$$f_1(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]f_2(x), \tag{2.32}$$

kde $f_2(x)$ je reálný polynom stupně $n-4$. Tedy

$$f(x) = [(x-\alpha)^2+\beta^2]^2 f_2(x).$$

Tímto jsme dospěli k tomuto závěru

Je-li $\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$, k–násobným kořenem reálného polynomu $f(x)$, je i $\alpha-i\beta$ k–násobným kořenem polynomu $f(x)$.

Poznámka. Jestliže polynom není reálný, tvrzení věty nemusí být splněno. Např. polynom $f(x)=x^2+x(1-i)-i$ má číslo i za svůj kořen, avšak $-i$ není jeho kořenem.

Z toho, co jsme o kořenech polynomu uvedli, lze dospět k tomuto tvrzení.

Rozklad reálného polynomu

Nechť $f(x)$ je reálný polynom. Nechť $\alpha,\beta,\dots,\gamma$ jsou všechny jeho navzájem různé reálné kořeny a to α k–násobný, β l–násobný, ... , γ m–násobný. Nechť $a\pm ib,\dots,c\pm id$ jsou všechny jeho navzájem různé dvojice nereálných komplexně sdružených kořenů. Nechť $a+ib$ je p–násobný,..., $c+id$ je q–násobný kořen. Potom platí

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n\cdot(x-\alpha)^k\cdot(x-\beta)^l\cdot\dots\cdot(x-\gamma)^m\cdot \\ &\quad\cdot[(x-a)^2+b^2]^p\cdot\dots\cdot[(x-c)^2+d^2]^q. \end{aligned} \tag{2.33}$$

pro každé komplexní číslo x.
Polynom $f(x)$ zapsaný ve tvaru (2.33) nazýváme rozkladem reálného polynomu v reálném oboru.

Hledání kořenů polynomů

Hledání kořenů polynomů. Vyslovili jsme sice větu o existenci kořenů polynomů, avšak neuvedli jsme zatím nic o způsobu jejich hledání. Tato problematika je značně rozsáhlá a její výklad v plném rozsahu je nad rámec tohoto textu. Uvedeme zde alespoň několik úvodních poznámek k této problematice.

Hledání kořenů polynomů 1. a 2. stupně by Vám mělo být všem dobře známo. Některým z Vás možná není znám případ, kdy kořeny kvadratické rovnice jsou komplexní. Proto si uvedeme i případ hledání kořenů polynomů 1. a 2. stupně. Zde není uvedeno podrobné odvozování. Výklad týkající se polynomů 2. stupně je nutno chápat jen jako připomenutí poznatků z matematiky v dřívějším studiu. Ukážeme si i metody na hledání kořenů polynomů 3. a 4. stupně, jimž tyto kořeny určíme z jejich koeficientů konečným počtem aritmetických operací a odmocňováním. Je dokázáno, že *neexistuje výpočtový postup, kterým by bylo možno v obecném případě určit kořeny každého polynomu stupně většího než 4 z jeho koeficientů provedením konečného počtu aritmetických operací a odmocňování.* Výpočtové postupy, kterými by bylo možné určit kořeny každého polynomu 3. a 4. stupně z jeho koeficientů konečným počtem aritmetických operací a odmocňování, které uvedeme, dávají někdy výsledky v nepřehledném tvaru, takže se dává často přednost numerickým postupům, které jsou použitelné pro hledání kořenů polynomů stupňů větších než 2.

Hledání kořenů polynomu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{2.34}$$

kde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, vede na řešení algebraické rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{2.35}$$

Číslo α je kořenem polynomu (2.34), když a jenom když je řešením rovnice (2.35).

Kořeny polynomu 1. stupně. Pro $n = 1$ dostáváme z (2.34) polynom

$$P_1(x) = a_1 x + a_0, \quad a_1 \neq 0. \tag{2.36}$$

Příslušnou algebraickou rovnici

$$a_1 x + a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0, \tag{2.37}$$

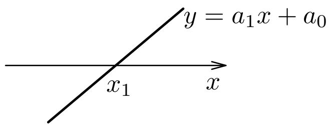
nazýváme *lineární rovnicí.* Má jediný kořen, označíme jej x_1, kde

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1}. \tag{2.38}$$

Polynom $P_1(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$, má jediný kořen $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. Grafem reálného polynomu 1. stupně (2.36) je přímka

$$y = a_1 x + a_0, \tag{2.39}$$

která protíná osu x v bodě $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$. (Viz obr. 2.21.)



Obrázek 2.21: Graf lineární funkce (2.39).

Příklad 2.25. Např. polynom

$$P_1(x) = 2x + 3 \tag{2.40}$$

má právě jeden kořen x_1, který je kořenem rovnice

$$2x + 3 = 0.$$

Tímto kořenem je číslo $x_1 = -\frac{3}{2}$. (Nakreslete si jeho graf.)

Kořeny polynomu 2. stupně. Pro $n = 2$ dostáváme z (2.34) polynom

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0. \tag{2.41}$$

Kořeny tohoto polynomu jsou řešením kvadratické rovnice

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_2 \neq 0. \tag{2.42}$$

Kořeny x_1, x_2 (ve stručném zápisu $x_{1,2}$) polynomu (2.41)*, tedy řešení kvadratické rovnice* (2.42)*, lze určit podle vztahu*

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}. \tag{2.43}$$

(Vztah (2.43) *platí i pro polynomy, které nejsou reálné.) Číslo*

$$D = a_1^2 - 4a_2a_0 \tag{2.44}$$

se nazývá diskriminant kvadratické rovnice (2.42).

Řešení kvadratické rovnice

Diskuze – reálný polynom 2. stupně. Nechť

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{2.45}$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$, je reálný polynom 2. stupně. Mohou nastat tyto případy.

a) $D = 0$. V tomto případě dostáváme z (2.43)

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2}. \tag{2.46}$$

b) $D > 0$. V tomto případě je $\sqrt{D}$ reálné číslo a z (2.43) dostáváme

$$x_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2a_2}, \qquad x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2a_2}. \tag{2.47}$$

c) $D < 0$. V tomto případě dostáváme z (2.43)

$$x_1 = \frac{-a_1 - i\sqrt{|D|}}{2a_2}, \qquad x_2 = \frac{-a_1 + i\sqrt{|D|}}{2a_2}. \tag{2.48}$$

Příklad 2.26. Určete kořeny polynomů

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$,
b) $g(x) = x^2 - 5x + 6$,
c) $h(x) = x^2 + x + 1$.

Řešení.

a) Kořeny polynomu $f(x)$ jsou kořeny rovnice

$$2x^2 - 3x = 0. \tag{2.49}$$

Poněvadž rovnice nemá absolutní člen, není nutno k jejímu řešení použít vztah (2.43). Rovnici (2.49) přepíšeme na tvar

$$x(2x - 3) = 0. \tag{2.50}$$

Poněvadž součin dvou výrazů je roven 0, když alespoň jeden z nich je roven 0, z (2.50) vyplývá $x = 0$ nebo $2x - 3 = 0$. Odtud

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{3}{2}.$$

b) Kořeny polynomu $g(x)$ dostaneme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Diskriminant D této rovnice počítáme podle (2.44). Dostáváme $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$, tedy $D = 1$. Podle (2.47) dostáváme

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2}, \qquad x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2},$$

tedy

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 3.$$

c) Kořeny polynomu $h(x)$ dostaneme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Diskriminant této rovnice počítáme podle (2.44). Dostáváme

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1, \text{ takže } D = -3.$$

Podle (2.48) dostáváme

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

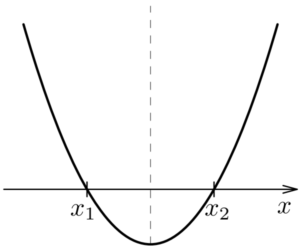
Graf polynomu 2. stupně

Grafem reálného polynomu 2. stupně (2.41)

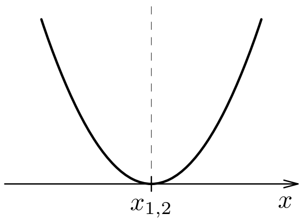
$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0,$$

je parabola, která je pro $a_2 > 0$ otevřena ve směru kladné osy y a pro $a_2 < 0$ je otevřena ve směru záporné osy y.

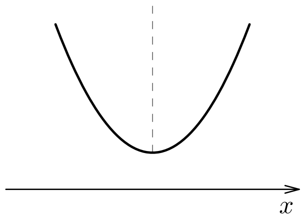
Označíme $D = a_1^2 - 4a_2a_0$. Je-li $D > 0$, parabola protíná osu x ve dvou různých bodech x_1, x_2 daných vztahem (2.47). *Je-li $D = 0$, parabola se dotýká osy x v bodě $x_1 = x_2$ daném vztahem* (2.46). *Je-li $D < 0$, parabola neprotíná osu x. Viz obr.* 2.22—2.27.



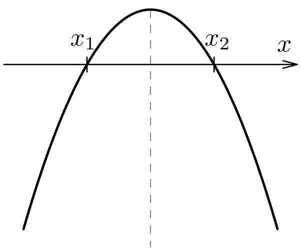
Obrázek 2.22:
$a_2 > 0,\ D > 0$



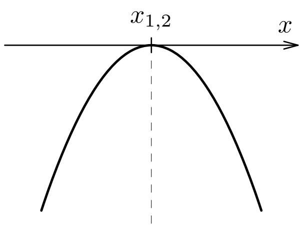
Obrázek 2.23:
$a_2 > 0,\ D = 0$



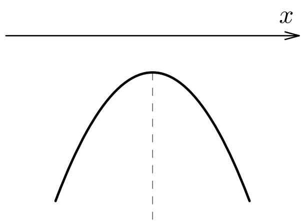
Obrázek 2.24:
$a_2 > 0,\ D < 0$



Obrázek 2.25:
$a_2 < 0,\ D > 0$



Obrázek 2.26:
$a_2 < 0,\ D = 0$



Obrázek 2.27:
$a_2 < 0,\ D < 0$

Řešení rovnice 3. stupně – informativně

Kořeny polynomu 3. stupně. Pro $n = 3$ dostáváme z (2.34) polynom

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{2.51}$$

kde $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_3 \neq 0$. Tento polynom má podle důsledku věty 2.5 právě tři kořeny, počítáme-li k–násobný kořen za k kořenů. Tyto kořeny nalezneme řešením kubické rovnice

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_3 \neq 0.$$

Následující výklad je stručný, je uveden pro Vaši představu o postupu řešení. Dělením této rovnice číslem a_3 dostáváme rovnici, kterou zapišme jako

$$x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0. \tag{2.52}$$

Existuje řada metod na řešení rovnice (2.52). Naznačme stručně jednu z nich. Místo proměnné x zaveďme proměnnou y vztahem

$$x = y - \frac{1}{3}b_2. \tag{2.53}$$

Jejím dosazením do (2.52) dostáváme

$$\left(y - \frac{1}{3}b_2\right)^3 + b_2\left(y - \frac{1}{3}b_2\right)^2 + b_1\left(y - \frac{1}{3}b_2\right) + b_0 = 0.$$

Úpravou této rovnice obdržíme

$$y^3 + py + q = 0, \tag{2.54}$$

kde jsme položili

$$p = b_1 - \frac{1}{3}b_2^2, \qquad q = b_0 - \frac{1}{3}b_2 b_1 + \frac{2}{27}b_2^3.$$

Pro $p = 0$ by rovnice (2.54) přešla ve tvar

$$y^3 + q = 0.$$

Jejím řešením je

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-q}.$$

Zde chápeme $\sqrt[3]{\cdot}$ v komplexním oboru jako trojznačnou.
Nechť $p \neq 0$. Místo neznámé y zavedeme dvě neznámé vztahem

$$y = u + v \tag{2.55}$$

a zvolíme mezi nimi takový vztah, že celý problém se zjednoduší. Dosazením (2.55) do (2.54) dostáváme

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0. \tag{2.56}$$

Úpravou (2.56) obdržíme

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{2.57}$$

Zmíněný vztah mezi u, v zvolme takto:

$$3uv = -p. \tag{2.58}$$

Tím se rovnice (2.57) převede na tvar

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{2.59}$$

Z rovnic (2.58) a (2.59) obdržíme

$$u^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad v^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Odtud dostáváme

$$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{2.60}$$

kde každá veličina u, v je trojznačná. Máme tedy celkem 9 jejich kombinací. Uvažujme ta u, v, která vyhovují rovnicím (2.58), (2.59). Jejich výběrem a dosazením do (2.55) dostáváme

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\\
y_2 &= \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\\
y_3 &= \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},
\end{aligned} \tag{2.61}$$

kde

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Závěr: Postup hledání kořenů polynomu

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

kde $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_3 \neq 0$, určíme v těchto krocích:

a) Položme

$$b_2 = \frac{a_2}{a_3}, \qquad b_1 = \frac{a_1}{a_3}, \qquad b_0 = \frac{a_0}{a_3}. \tag{2.62}$$

b) Položme

$$p = b_1 - \frac{1}{3}b_2^2, \qquad q = b_0 - \frac{1}{3}b_2b_1 + \frac{2}{27}b_2^3. \tag{2.63}$$

c) Vypočítejme y_1, y_2, y_3 podle (2.61).

d) Položme

$$x_i = y_i - \frac{1}{3}b_2, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.64}$$

Příklad 2.27. Nalezněte kořeny polynomu

$$P_3(y) = y^3 - 9y - 28. \tag{2.65}$$

Řešení. V našem případě je

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = -1, \qquad b_0 = -28.$$

Podle (2.63) dostáváme

$$p = -9, \qquad q = -28.$$

Dosazením do (2.61) dostáváme

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(-28) + \sqrt{\frac{28^2}{4} - \frac{9^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}(-28) - \sqrt{\frac{28^2}{4} - \frac{9^3}{27}}}.$$

Úpravou

$$y_1 = 3 + 1, \text{ tedy } y_1 = 4.$$

Dále

$$y_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot 1,$$
$$y_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot 1.$$

Úpravou

$$y_2 = -2 + i\sqrt{3}, \qquad y_3 = -2 - i\sqrt{3}.$$

Příklad 2.28. Nalezněte kořeny polynomu

$$P_3 = y^3 - 5y + 4. \tag{2.66}$$

Řešení. Je zřejmé, že $y_1 = 1$ je kořenem $P_3(y)$. (Přesvědčíme se dosazením.) Dělením $y^3 - 5y + 4$ kořenovým činitelem $y - 1$ dostáváme

$$y^3 - 5y + 4 = (y - 1) \cdot (y^2 + y - 4).$$

Řešením rovnice

$$y^2 + y - 4 = 0$$

dostáváme další kořeny

$$y_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Tedy

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \qquad y_3 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

jsou kořeny polynomu $P_3(x)$.

Hledejme kořeny daného polnomu $P_3(x)$ výše uvedeným postupem. V tomto případě je

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = -5, \qquad b_0 = 4.$$

Podle (2.63) dostáváme

$$p = -5 - \frac{1}{3} \cdot 0, \qquad q = 4 - \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot (-5) + \frac{2}{27} \cdot 0^3.$$

Úpravou

$$p = -5, \qquad q = 4.$$

Podle (2.61) dostáváme

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \cdot 4 + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{(-5)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \cdot 4 - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{(-5)^3}{27}}}.$$

Úpravou

$$y_1 = \sqrt[3]{-2 + \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{17}{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{17}{3}}},$$

$$y_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-2 + \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{17}{3}}} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-2 - \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{17}{3}}},$$

$$y_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-2 + \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{17}{3}}} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-2 - \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{17}{3}}}.$$

Řešení rovnice 4. stupně – informativně

Kořeny polynomu 4. stupně. Pro $n = 4$ dostáváme z (2.34) polynom

$$P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{2.67}$$

kde $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_4 \neq 0$. Tento polynom má podle důsledku věty 2.5 právě čtyři kořeny. Tyto kořeny nalezneme řešením algebraické rovnice 4. stupně

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_4 \neq 0. \tag{2.68}$$

K řešení této rovnice je známa řada metod. Uvedeme jeden ze známých výpočtových postupů.

Postup hledání kořenů polynomu

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_4 \neq 0.$$

a) Položme

$$b_3 = \frac{a_3}{a_4}, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_4}, \quad b_1 = \frac{a_1}{a_4}, \quad b_0 = \frac{a_0}{a_4}.$$

Tím rovnici (2.68) převedeme na rovnici

$$x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0. \tag{2.69}$$

Substitucí

$$x = y - \frac{b_3}{4} \tag{2.70}$$

do rovnice (2.69) dostaneme rovnici

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{2.71}$$

kde

$$\begin{aligned} p &= b_2 - \tfrac{3}{8}b_3, \\ q &= b_1 - \tfrac{1}{2}b_3b_2 + \tfrac{1}{8}b_3^3, \\ r &= b_0 - \tfrac{1}{4}b_3b_1 + \tfrac{1}{16}b_3^2b_2 - \tfrac{3}{256}b_3^4. \end{aligned} \tag{2.72}$$

b) Řešme kubickou rovnici

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0. \tag{2.73}$$

Označme t_1, t_2, t_3 její kořeny.

c) Určeme kořeny y_1, y_2, y_3, y_4 rovnice (2.71) podle vztahů

$$\begin{aligned} 2y_1 &= \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}, \\ 2y_2 &= \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, \\ 2y_3 &= -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}, \\ 2y_4 &= -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

d) Kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 polynomu $P_4(x)$ určíme ze vztahů

$$x_i = y_i - \frac{b_3}{4}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{2.75}$$

Určení kořenů polynomu 4. stupně je tedy převedeno na řešení kubické rovnice.

Shrňme si nyní dosažené poznatky o hledání kořenů polynomů.

Kořeny polynomů 1. a 2. stupně se hledají výše uvedeným způsobem. Kořeny polynomů 3. a 4. stupně lze sice řešit výše uvedenými postupy, resp. jinými algoritmy, avšak výsledky bývají vyjádřeny často v komplikovaném tvaru. Pro obecné polynomy stupňů větších než 4 je dokázáno, že nelze nalézt postupy, jimiž by z jejich koeficientů bylo možno v obecném případě nalézt kořeny konečným počtem aritmetických operací a odmocňování. To ovšem neznamená, že kořeny některých speciálních polynomů nelze určit konečným počtem zmíněných operací. Je tomu např. pro polynomy $P_n(x) = x^n - a_0$. K určení kořenů polynomů stupňů větších než 2 se používají *numerické metody.* Ucelený výklad těchto metod přesahuje rámec tohoto studijního textu. V dalším pojednání se k této problematice vrátíme. V případě potřeby je možno určit kořeny na počítači, pokud jsou na něm zabudované vhodné programy.

Racionální lomená funkce

Racionální lomenou funkcí nazýváme každou funkci tvaru

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \not\equiv 0,$$

kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou polynomy. Poněvadž polynom je definován v každém komplexním čísle, je racionální lomená funkce definována ve všech komplexních číslech v nichž je $g(x) \neq 0$, tj. ve všech číslech x, která nejsou kořeny funkce $g(x)$.

Příklad 2.29. Funkce

$$F(x) = \frac{2x+3}{x^3+x}$$

je racionální lomená funkce. Jmenovatel, funkce $g(x) = x^3 + x$, lze psát ve tvaru $g(x) = x(x+i)(x-i)$. Je tedy $F(x)$ definovaná ve všech komplexních číslech různých od $0, -i, i$.

Nechť čitatel i jmenovatel racionální lomené funkce $F(x)$ mají společného kořenového činitel $x - \alpha$. Zkrátíme-li tímto společným kořenovým činitelem, dostaneme novou racionální lomenou funkce, označme ji $G(x)$. Funkce $F(x)$, $G(x)$ mají stejné hodnoty pro $x \neq \alpha$. Může se ale stát, že funkce $G(x)$ je v α definována, zatímco $F(x)$ není v čísle α definována. V dalším budeme předpokládat, že čitatel a jmenovatel racionální lomené funkce nemají žádný stejný kořen.

Nechť n je stupeň polynomu čitatele a m je stupeň polynomu jmenovatele racionální lomené funkce $F(x)$. Jestliže je $n < m$, funkci $F(x)$ nazýváme *ryze lomenou*, jestliže $n \geq m$, nazýváme funkci $F(x)$ *neryze lomenou.*

Nechť

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

je neryze lomená funkce. Dělením funkce $f(x)$ funkcí $g(x)$ dostaneme

$$f(x) = P(x) \cdot g(x) + Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Polynom $Q(x)$ je zbytek po dělení, jeho stupeň je menší než stupeň polynomu $g(x)$. Je tedy

$$F(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{g(x)}.$$

Funkce $\frac{Q(x)}{g(x)}$ je ryze lomená racionální funkce.

Slovy: *Neryze lomenou racionální funkci lze napsat jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.*

Příklad 2.30. Funkce

$$R(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

je neryze lomená. V čitateli je polynom stupně 4, ve jmenovateli je polynom stupně 2. Dělením dostáváme

$$\begin{array}{rrrrrl}
(3x^4 & -2x^3 & & & +1\,) & : (x^2+1) = 3x^2 - 2x - 3 + \frac{2x+4}{x^2+1} \\
\pm 3x^4 & & \pm 3x^2 & & & \\
\hline
 & -2x^3 & -3x^2 & & +1 & \\
 & \mp 2x^3 & & \mp 2x & & \\
\hline
 & & -3x^2 & +2x & +1 & \\
 & & \mp 3x^2 & & \mp 3 & \\
\hline
 & & & 2x & +4 &
\end{array}$$

Kontrolní úlohy

1. V kterých bodech je funkce $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4}$ spojitá? Zdůvodněte.
[ve všech bodech různých od ± 2]

2. Určete kořeny polynomu

a) $x^2 - 7x + 12$ [3, 4]

b) $x^2 + x + 1$ $[-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}]$

c) $x^3 + 1$ $[-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}]$

3. Rozložte na kořenové činitele polynom

$$x^4 - x^3 + 12x^2 - 13x + 45$$

víte-li, že má kořen $1 + 2i$. $[(x-1+2i)(x-1-2i)(x - \frac{-1+i\sqrt{35}}{2})(x - \frac{-1-i\sqrt{35}}{2})]$

4. Dokažte, že polynom

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 9x + 27$$

má dvojnásobný kořen 3.

5. Řešte rovnici

$$x^5 - 7x^4 + 9x^3 - x^2 + 7x - 9 = 0$$

víte-li, že má za kořeny všechny třetí odmocniny z jedné. $[1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}]$

6. Rozložte v reálném oboru polynom $x^4 + 1$.
[Návod: $x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2$, $x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2$. Odtud $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$.]

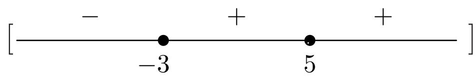
7. Rozložte na součet polynomu a ryze lomenné racionální funkce:

$$\frac{x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}$$

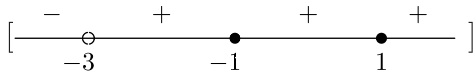
$[1 + \frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}]$

8. Určete znamení funkcí

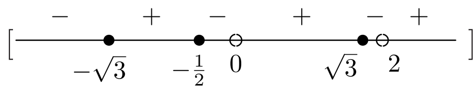
a) $(x^3+27)^3(x-5)^2$



b) $\dfrac{(x^2-1)^2}{x+3}$



c) $\dfrac{(2x+1)^3(x^2-3)^3}{x(x-2)}$



2.5 Funkce složená a funkce inverzní. Elementární funkce

Složená funkce

Složená funkce. *Nechť A je neodvislý obor funkce $u = \varphi(x)$. Označme $B = \varphi(A)$ odvislý obor funkce φ. Nechť $f(u)$ je funkce definovaná na množině B. Ke každému číslu $x \in A$ přiřaďme číslo $F(x)$ vztahem*

$$F(x) = f(\varphi(x)), \tag{2.76}$$

to jest hodnotu funkce f v čísle $u = \varphi(x) \in B$. Funkci f nazýváme vnější složkou a funkci φ vnitřní složkou funkce F.

Příklad 2.31. Funkci

$$y = (x^2+1)^7, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

můžeme chápat jako složenou funkci. Položme

$$A = (-\infty, \infty),$$

$$u = \varphi(x), \quad \text{kde} \quad \varphi(x) = x^2+1,\ x \in A.$$

Označme

$$B = \varphi(A), \qquad \text{tedy} \quad B = \langle 1, \infty).$$

Položme

$$y = f(u), \quad \text{kde} \quad f(u) = u^7,\ u \in B.$$

Potom ke každému $x \in A$ je funkcí φ přiřazeno $u = \varphi(x) \in B$. K tomuto číslu u je funkcí f přiřazeno číslo $y = f(u)$. Tedy $y = f(\varphi(x))$.

Je tedy $f(u) = u^7$ vnější a $u = x^2+1$ vnitřní složkou funkce $y = (x^2+1)^7$.

Poznámka. *Složená funkce může být vícenásobně složená.* Např. jestliže f je její vnější složkou a φ je její vnitřní složkou, potom vnitřní složka φ může být opět složenou.

O spojitosi složené funkce platí tato věta.

Věta 2.7. (Spojitost složené funkce)

Nechť funkce $\varphi(x)$ je spojitá na intervalu I. Nechť $\varphi(I)$ je interval J, na němž je funkce $y = f(u)$ spojitá. Potom složená funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá na intervalu I.

Důkaz: Je nutno dokázat, že věta o spojitosti platí v libovolném bodě $a \in I$. Omezíme se na případ, že a je vnitřní bod intervalu I a $\alpha = \varphi(a)$ je vnitřní bod intervalu J. Sami si promyslete jiné případy.

Nechť tedy a je vnitřním bodem intervalu I a $\alpha = \varphi(a)$ je vnitřním bodem intervalu J. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Poněvadž $f(u)$ je funkce spojitá v bodě α, existuje $\kappa > 0$ tak, že pro $u \in (\alpha - \kappa, \alpha + \kappa)$ je f definovaná a platí zde

$$|f(u) - f(\alpha)| < \varepsilon. \tag{2.77}$$

Poněvadž $\varphi(x)$ je funkce spojitá v bodě a, k číslu κ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je funkce φ definovaná a platí zde

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \kappa, \quad \text{tj. } |\varphi(x) - \alpha| < \kappa.$$

Tedy pro $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je funkce $f(\varphi(x))$ definovaná a platí zde podle (2.77)

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon.$$

□

Zavedení inverzní funkce

Příklad 2.32. Funkce $u = \varphi(x) = x^2 + 1$ je spojitá na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Funkce $y = f(u) = u^7$ je spojitá na intervalu $K = (-\infty, \infty)$. Dále $J = \varphi(I) = \langle 1, \infty) \subset K$, takže funkce f je spojitá na intervalu J. Je tedy složená funkce $y = (x^2 + 1)^7$ spojitá na intervalu I.

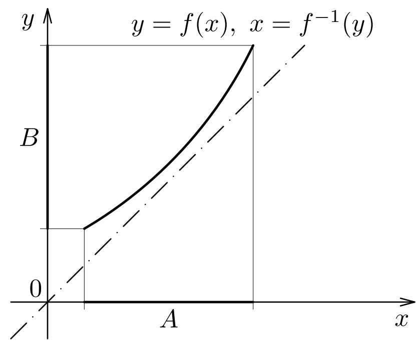
Inverzní funkce.

Nechť funkce $y = f(x)$ je definovaná na množině A a je na ní prostá. To znamená, že pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Označme $B = f(A)$. Ke každému $y \in B$ přiřaďme to číslo *$x \in A$*, pro nějž je *$f(x) = y$. Tím jsme zavedli pravidlo, jimž ke každému $y \in B$ je přiřazeno $x \in A$. Je tak definovaná nová funkce, označme ji f^{-1}, jejímž neodvislým oborem je množina B a odvislým oborem je množina A. Ponecháme-li označení y pro proměnnou s oborem B a x pro proměnnou s oborem A, píšeme*

$$x = f^{-1}(y), \qquad y \in B,\ x \in A.$$

V definici inverzní funkce je podstatný předpoklad, že f je na svém definičním oboru prostá. Takovými funkcemi jsou např. funkce ryze monotónní na svém definiční oboru.

Na obr. 2.28 je znázorněn graf funkce $y = f(x)$ rostoucí na intervalu $A = D(f)$, tedy graf funkce prosté. Graf funkce $x = f^{-1}(y)$ je totožný s grafem funkce $y = f(x)$, pokud bychom *proti zvyklostem* znázornili neodvislý obor na ose y a odvislý obor na ose x.



Obrázek 2.28: Graf funkcí $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$.

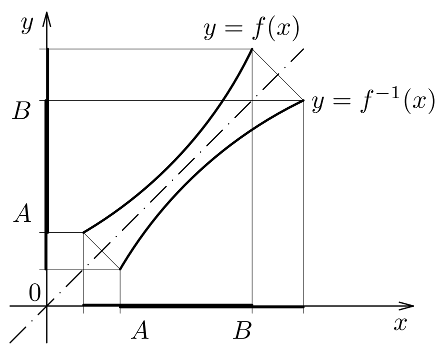
Z definice inverzní funkce vyplývá

- je-li $a \in D(f),$ potom $a = f^{-1}(f(a)),$ (2.78)
- je-li $\alpha \in D(f^{-1}),$ potom $\alpha = f(f^{-1}(\alpha)).$ (2.79)

Označíme-li x neodvisle proměnnou jak pro funkci f, tak i pro funkci f^{-1}, zapíšeme obě funkce takto

$$y = f(x), \quad x \in A,\ y \in B, \qquad y = f^{-1}(x), \quad x \in B,\ y \in A. \tag{2.80}$$

Jestliže jejich neodvislé obory vyznačíme na vodorovné ose, jsou grafy funkcí (2.80) symetrické s osou symetrie $y = x$, viz. obr. 2.29. Graf inverzní funkce $f^{-1}(x)$ jsme dostali překlopením grafu $f(x)$ kolem přímky $y = x$.



Obrázek 2.29: Graf funkcí $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$.

Poznámka. Je-li prostá funkce daná rovnicí

$$y = f(x), \tag{2.81}$$

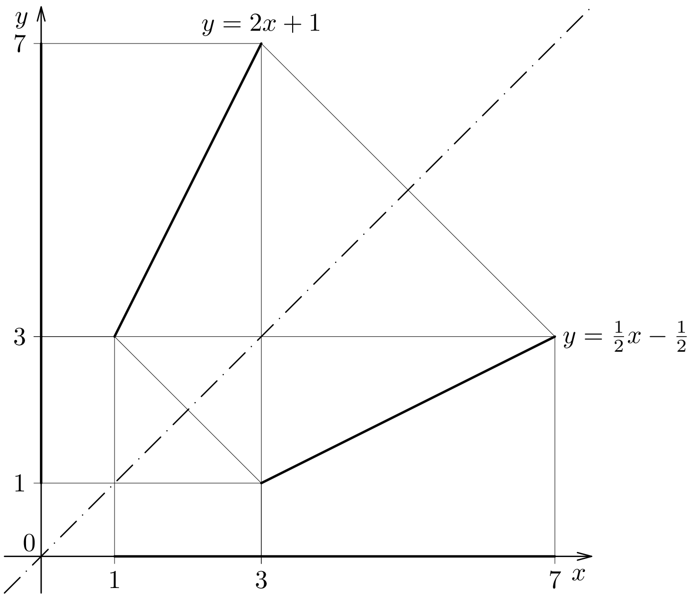
dostaneme k ní funkci inverzní tak, že z rovnice (2.81) vypočítáme x pomocí y. Pojem inverzní funkce vede k zavedení nových funkcí, jak později uvidíme.

Příklad 2.33. K funkci $y = 2x + 1,\ x \in \langle 1, 3\rangle$ určete funkci inverzní.

Řešení. Označme $f(x) = 2x + 1, I = \langle 1, 3\rangle$. Označme $J = f(I)$. Dostáváme $J = \langle 3, 7\rangle$. Z rovnice $y = 2x + 1$ vypočítáme x. Dostáváme $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. Tedy funkce $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ je inverzní k zadané funkci f, je definovaná na intervalu J. Změnou označení pro neodvisle a odvisle proměnnou dostáváme hledanou inverzní funkci

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad x \in J, \quad y \in I.$$

Grafy zadané funkce a funkce k ní inverzní jsou na obrázku 2.30.



Obrázek 2.30: Graf funkcí z příkladu 2.33.

Následující věta vypovídá o vzájemném vztahu mezi spojitosti funkce $f(x)$ a k ní inverzní funkce $f^{-1}(x)$.

Věta 2.8. (Inverzní funkce)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $I = D(f)$. Označme její odvislý obor (je jím interval) $J = f(I)$. K funkci f existuje funkce inverzní f^{-1}, jejím neodvislým oborem je interval J a odvislým oborem je interval I. Funkce f^{-1} je na svém definičním oboru J spojitá a rostoucí (klesající).

Důkaz: Důkaz provedeme pro funkce f rostoucí na inervalu I. Pro funkce klesající je důkaz analogický. Předpokládejme tedy, že $f(x)$ je na intervalu I spojitá a rostoucí.

Dokažme, že funkce $f^{-1}(x)$ je rostoucí na intervalu J. Nechť $x_1, x_2 \in J$,

$x_1 < x_2$. Kdyby bylo $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2)$, platilo by

$$f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2)), \tag{2.82}$$

neboť f je rostoucí na I. Podle (2.79) dostáváme z (2.82) $x_1 \geq x_2$, což je spor s předpokladem, že $x_1 < x_2$. Je tedy funkce $f^{-1}(x)$ rostoucí na intervalu J.

Dokažme dále, že funkce $f^{-1}(x)$ je spojitá na J. Nechť $a \in J$ je libovolný bod, který není jeho pravým koncovým bodem. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo. Potom $f^{-1}(a) \in I$ a není to pravý koncový bod intervalu I. Jestliže $f^{-1}(a) + \varepsilon \notin I$, označme b libovolný bod z J, pro nějž je $b > a$. Jestliže $f^{-1}(a) + \varepsilon \in I$, položme $b = f(f^{-1}(a) + \varepsilon) \in J$. Pak pro všechna $x \in \langle a, b)$ je $f^{-1}(x)$ definována. Zároveň z monotónie této funkce plyne

$$f^{-1}(a) \leq f^{-1}(x) < f^{-1}(a) + \varepsilon,$$

to jest

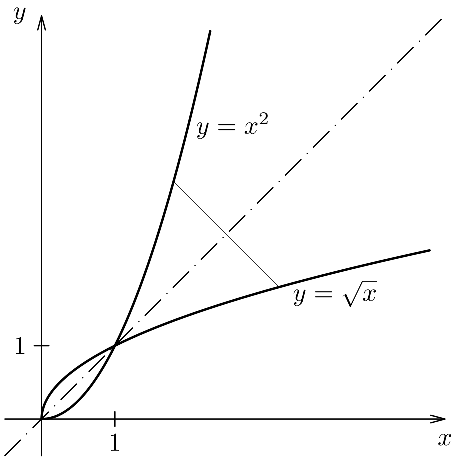
$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(a)| < \varepsilon.$$

Tedy $f^{-1}(x)$ je v bodě a spojitá zprava. Podobně se dokáže, že funkce $f^{-1}(x)$ je spojitá zleva v každém bodě $a \in J$, který není levým koncovým bodem intervalu J. Je tedy $f^{-1}(x)$ funkce spojitá v J. □

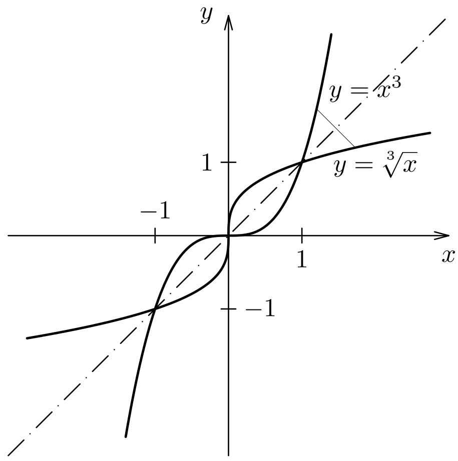
Funkce $\sqrt[n]{x}$

Uvažujme funkci $y = x^n$, kde n je přirozené. Tato funkce je zřejmě definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$.
Pro n liché je tato funkce na svém definičním oboru $I = (-\infty, \infty)$ spojitá a rostoucí. Označme $J = (-\infty, \infty)$ obor hodnot této funkce. Proto k ní existuje funkce inverzní na intervalu J. Podle věty 2.8 je tato inverzní funkce rostoucí a spojitá na J. Označíme ji $\sqrt[n]{x}$. Funkce $\sqrt[n]{x}$ pro n liché je lichá.
Pro n sudé je sice funkce x^n rovněž definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$, avšak není na něm prostá. Např. $(-2)^n = 2^n$ pro každé sudé n. Budeme proto uvažovat její zúžení na interval $I = \langle 0, \infty)$ na němž je tato zúžená funkce $y = x^n$ rostoucí a spojitá, tedy prostá. Obor hodnot této zúžené funkce je interval $J = \langle 0, \infty)$. Proto k ní existuje funkce inverzní, definovaná na intervalu J. Podle věty 2.8 je tato inverzní funkce rostoucí a spojitá. Označíme ji $\sqrt[n]{x}$.

Na obr. 2.31 jsou narýsovány grafy funkcí $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, \infty)$ a na obr. 2.32 jsou narýsovány grafy funkcí $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.



Obrázek 2.31: Grafy funkcí x^2 a $\sqrt{x}$.



Obrázek 2.32: Grafy funkcí x^3 a $\sqrt[3]{x}$.

Poznámka. *Uvažme dva případy.*
a) n sudé. Potom $\sqrt[n]{x}$ je definována jen pro $x \geq 0$. Je tedy

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad n \text{ sudé}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Např. $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.
b) n liché. Potom $\sqrt[n]{x}$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$\text{je-li } x < 0, \; \text{potom } \sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}.$$

Pravidla pro počítání s odmocninami. Vzhledem k uvedené poznámce stačí se omezit na odmocniny s nezápornými argumenty.

Věta 2.9. (Odmocniny – pravidla)
Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \tag{2.83}$$

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y} \tag{2.84}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, \quad \text{pokud } y \neq 0. \tag{2.85}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} \tag{2.86}$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m} \tag{2.87}$$

Důkaz: Dokažme jen vztah (2.83). Uvědomte si, že z existence $\sqrt[n]{x}$ vyplývá existence $\sqrt[n]{x^m}$. Položme

$$\sqrt[n]{x} = y, \quad \sqrt[n]{x^m} = u \tag{2.88}$$

kde y a u jsou taková reálná čísla, že

$$y^n = x \quad u^n = x^m \tag{2.89}$$

Ze vztahů (2.89) vyplývá

$$y^{nm} = x^m = u^n.$$

To znamená, že

$$(y^m)^n = u^n.$$

Odtud

$$y^m = u.$$

Vzhledem k (2.88) dostáváme dokazovaný vztah

$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}.$$

Dokažte další pravidla! □

Příklady na procvičení odmocnin

a) $\sqrt{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{125 \cdot 5} = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$

b) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$

c) $\sqrt[3]{-\dfrac{81}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

d) $\sqrt[3]{32\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{32^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^{10} \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^{11}}} = 2\sqrt[6]{2^5}$

e) $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^2 = (-\sqrt[3]{8})^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

f) $\left(\sqrt{9}\right)^4 = \left(\sqrt{3^2}\right)^4 = 3^4 = 81$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[4]{3}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{-4}}$ neexistuje v $\mathbb{R}$

i) $\sqrt{8} + \sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 2} + \sqrt{6^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$

j) $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \dfrac{x^2+2x+1}{x} \quad \text{pro } x > 0$

k) $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt[6]{x^3}\sqrt[6]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 =$

$= \left(\dfrac{\sqrt[6]{x^5} - 1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = \dfrac{\sqrt[3]{x^5} - 2\sqrt[6]{x^5} + 1}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{x^3} - 2\sqrt[6]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} =$

$= x - 2\sqrt[6]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x - 2\sqrt[6]{x} + \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} \quad \text{pro } x > 0$

nebo

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = x-2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x-2\sqrt[6]{x^3}\frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x}} =$$

$$x-2\sqrt[6]{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x} \quad \text{pro } x>0$$

Mocniny s racionálním exponentem

V kapitole 1 byly zavedeny celočíselné mocniny reálných čísel a zavedeny operace jejich násobení a umocňování. Byly prezentovány Vám dobře známé jejich vlastnosti. Mocniny reálných čísel nyní rozšíříme i pro racionální mocnitele, a to tak, že zachováme základní vlastnosti mocnin s celočíselným mocnitelem. Vlastnosti odmocnin reálných čísel uvedené ve větě 2.9 nás vedou k rozšíření celočíselných mocnin reálných čísel na mocniny reálných čísel s racionálním exponentem.

Definice 2.9.

Nechť $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ a nechť x je kladné reálné číslo. Definujme $x^{\frac{p}{q}}$ vztahem

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}. \tag{2.90}$$

Pro $x=0$, $p,q \in \mathbb{N}$ položme $x^{\frac{p}{q}}=0$.

Pro $x>0$ je při této definici splněn nezbytný požadavek platnosti vztahu

$$x^r = x^s,$$

kde r,s jsou odlišné zápisy téhož racionálního čísla. Nechť tedy $r=\frac{pk}{qk}$, pro $k \in \mathbb{N}$, je odlišné vyjádření téhož racionálního čísla $\frac{p}{q}$. Potom podle (2.90) je

$$x^{\frac{pk}{qk}} = \sqrt[qk]{x^{pk}}.$$

Avšak $\sqrt[qk]{x^{pk}} = \sqrt[qk]{(x^p)^k}$ a podle (2.83) je $\sqrt[qk]{(x^p)^k} = \sqrt[q]{x^p}$. Je tedy

$$x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{pk}{qk}} \qquad \text{pro } k \in \mathbb{N}. \tag{2.91}$$

Odvození vztahů – informativně

Ukažme si nyní následující vlastnosti takto zavedených mocnin reálných čísel s racionálním exponentem. Především si všimněme, že pro $q=1$ je $x^{\frac{p}{q}} = x^p$, tedy mocnina s celočíselným exponentem. Každé pravidlo pro počítání s mocninami s racionálním exponentem platí tedy i pro celočíselné mocniny.

1) Nechť $x>0$, $r=\frac{p}{q}$, $s=\frac{u}{v}$, kde $p,u \in \mathbb{Z}$, $q,v \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}, \qquad \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}.$$

Skutečně, postupně dostáváme

$$x^r \cdot x^s = x^{\frac{p}{q}} \cdot x^{\frac{u}{v}} = x^{\frac{pv}{qv}} \cdot x^{\frac{qu}{qv}} = \sqrt[qv]{x^{pv}} \cdot \sqrt[qv]{x^{qu}}$$

Podle (2.84) je tedy

$$x^r \cdot x^s = \sqrt[qv]{x^{pv} \cdot x^{qu}}.$$

Poněvadž $pv, uq \in \mathbb{Z}$, lze psát

$$x^r \cdot x^s = \sqrt[qv]{x^{pv+qu}}.$$

Užitím (2.90) je tedy

$$x^r \cdot x^s = x^{\frac{pv+qu}{qv}},$$

tj.

$$x^r \cdot x^s = x^{\frac{pv}{qv}+\frac{qu}{qv}}.$$

Dospěli jsme ke vztahu

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}.$$

Vztah $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$ se dokazuje obdobně.

2) Nechť $x > 0$, $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{u}{v}$, kde $p, u \in \mathbb{Z}$, $q, v \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$(x^r)^s = x^{rs}.$$

Skutečně. postupně dostáváme

$$(x^r)^s = (x^{\frac{p}{q}})^{\frac{u}{v}} = \sqrt[v]{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^u} = \sqrt[v]{\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^u}.$$

Podle (2.83) dostáváme odtud

$$(x^r)^s = \sqrt[v]{\sqrt[q]{x^{pu}}}.$$

Podle (2.86) dostáváme odtud

$$(x^r)^s = \sqrt[vq]{x^{pu}},$$

takže užitím (2.90)

$$(x^r)^s = x^{\frac{pu}{vq}} = x^{\frac{p}{q}\cdot\frac{u}{v}} = x^{r \cdot s}.$$

3) Nechť $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Nechť $x > 1$. Ukažme, že

$$x^r < x^s.$$

Nechť $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{u}{v}$, kde $p, u \in \mathbb{Z}$, $q, v \in \mathbb{N}$. Potom

$$x^r = \sqrt[q]{x^p}, \qquad x^s = \sqrt[v]{x^u}.$$

Podle (2.91) lze zapsat x^r, x^s ve tvaru

$$x^r = \sqrt[qv]{x^{pv}}, \qquad x^s = \sqrt[qv]{x^{qu}}.$$

Poněvadž $r < s$, tj. $\frac{p}{q} < \frac{u}{v}$, je

$$pv < qu.$$

poněvadž $x > 1$, je $x^{pv} < x^{qu}$. Poněvadž qv–tá odmocnina je funkce rostoucí, je

$$x^r = \sqrt[qv]{x^{pv}} < \sqrt[qv]{x^{qu}} = x^s.$$

Podobně platí: Nechť $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$, $0 < x < 1$, potom

$$x^r > x^s.$$

Obdržené výsledky shrneme do následující věty.

Věta 2.10. Mocninami s racionálním exponentem

Nechť $r, s \in \mathbb{Q}$, $x > 0$. Potom platí

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s},$$

$$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s},$$

$$(x^r)^s = x^{rs},$$

Je-li $x > 1$ a $r < s$ je $x^r < x^s$.

Je-li $0 < x < 1$ a $r < s$ je $x^r > x^s$.

Poznámka. Rozvažte případ $x = 0$.

Mocniny s reálným exponentem

Zavedeme si nyní mocniny kladných reálných čísel s reálným exponentem jako rozšíření mocnin kladných reálných čísel s racionálním exponentem. Jeden z možných způsobů tohoto rozšíření je uveden v následující definici.

Definice 2.10. (Zavedení x^γ, $\gamma \in \mathbb{R}$)

Nechť $x > 0$. Označme

$$D = \{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \leq \gamma\}.$$

a) Nechť $x > 1$. Položme

$$x^\gamma = \sup D.$$

b) Nechť $0 < x < 1$. Položme

$$x^\gamma = \inf D.$$

c) Nechť $x = 1$. Položme

$$x^\gamma = 1.$$

d) Nechť $x = 0$, $\gamma > 0$. Položme $0^\gamma = 0$.
e) 0^0 není definováno.

Odvození vlastností – informativně

Ukažme, že takto zavedené číslo x^γ má tuto vlastnost.

Nechť $x > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Označme

$$H = \{x^\beta : \beta \in \mathbb{Q},\ \beta > \gamma\}.$$

Potom platí
ã) Nechť $x > 1$. Potom platí

$$x^\gamma = \inf H.$$

$\tilde{\text{b}}$) Nechť $0 < x < 1$. Potom platí

$$x^\gamma = \sup H.$$

Dokažme ã).

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a k němu určeme $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$n > \frac{x^\gamma(x-1)}{\varepsilon}.$$

Zvolme α, β tak, že $\alpha < \gamma < \beta$, $0 < \beta - \alpha < \frac{1}{n}$. Potom platí

$$1 < x^{\beta-\alpha} < x^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta. \tag{2.92}$$

Tedy

$$x^{\beta-\alpha} - 1 < \delta.$$

Z (2.92) dostáváme $x = (1+\delta)^n > 1 + n\delta$. Odtud

$$\delta < \frac{x-1}{n}.$$

Ukažme nyní, že $x^\beta - x^\alpha < \varepsilon$.

$$x^\beta - x^\alpha = x^\alpha(x^{\beta-\alpha} - 1) < x^\alpha \cdot \delta < x^\alpha \frac{x-1}{n} < x^\gamma \frac{x-1}{n} < \varepsilon.$$

Poněvadž $x^\beta - x^\gamma < x^\beta - x^\alpha$ pro všechna α, dostáváme

$$x^\beta - x^\gamma < \varepsilon.$$

K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze tedy nalézt β tak, že $x^\beta - x^\gamma < \varepsilon$. Je tedy $\inf H = x^\gamma$.

Poznámka. Důlaz $\tilde{\text{b}}$) je analogický.

Pro mocniny reálných čísel s reálným exponentem se definují aritmetické operace a operace umocňování pomocí mocnin s racionálním exponentem. Tuto konstrukci zde nebudeme uvádět. Uvedeme si pouze vlastnosti mocnin reálných čísel s reálným exponentem.

Na množině mocnin reálných čísel lze zavést aritmetické operace a jejich umocňování reálnými čísly rozšířením odpovídajících operací zavedených pro racionální čísla. Pro tyto mocniny platí tato pravidla.

Věta 2.11. Mocniny s reálným exponentem

Nechť $r, s \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Potom platí

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s},$$

$$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s},$$

$$(x^r)^s = x^{rs},$$

Je-li $x > 1$ a $r < s$, je $x^r < x^s$.

Je-li $0 < x < 1$ a $r < s$, je $x^r > x^s$.

Exponenciální funkce a logaritmus

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. Definicí 2.10 jsme zavedli a^x pro každé $x \in \mathbb{R}$. Vztahem

$$y = a^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

je tedy pro $a > 0$, $a \neq 1$ definována funkce. Nazýváme ji *exponenciální funkcí o základu a*. Oborem jejich funkčních hodnot je interval $(0, \infty)$.

Požadavek $a > 0$ je nutný, neboť a^x je pro všechna $x \in \mathbb{R}$ definovaná jen pro $a > 0$. Pro $a = 1$ je sice a^x definováno pro všechna x, ale v tomto případě je $1^x = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tuto funkci neřadíme mezi exponenciální funkce.

Exponenciální funkci o základu $a = 10$ nazýváme dekadickou exponenciální funkcí.

Z definice mocniny a^x lehce vyplývá její spojitost v každém bodě.
Pro $a > 1$ je funkce $y = a^x$ rostoucí, pro $0 < a < 1$ je funkce $y = a^x$ klesající. Existuje proto k ní funkce inverzní. Označíme ji $y = \log_a x$. Je tedy $\log_a x$ pro $x \in (0, \infty)$ to číslo $y \in (-\infty, \infty)$, pro něž $a^y = x$.

Příklad 2.34. $\log_{10} 100 = 2$, neboť $10^2 = 100$, $\log_{10} 0{,}01 = -2$, neboť $10^{-2} = 0{,}01$.

Ukažme si některé vlastnosti funkce $y = log_a x$.

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. Dále nechť $x_1, x_2 > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \tag{2.93}$$
$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \tag{2.94}$$
$$\log_a x_1^s = s \log_a x_1. \tag{2.95}$$

Dokažme např. (2.93). Položme

$$\log_a x_1 = y_1, \quad \log_a x_2 = y_2, \quad \log_a(x_1x_2) = y. \tag{2.96}$$

Potom
$$x_1 = a^{y_1}, \quad x_2 = a^{y_2}, \quad x_1x_2 = a^y. \tag{2.97}$$

Odtud dostáváme
$$x_1x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2} = a^y.$$

Tedy
$$y = y_1 + y_2.$$

Vzhledem k (2.96) dostáváme

$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Vztahy (2.94), (2.95) se dokazují analogicky.

Ukažme ještě jednu vlastnost.

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Potom

$$x = a^{\log_a x}.$$

Skutečně. Položme
$$\log_a x = y. \tag{2.98}$$

Je tedy $x = a^y$. Dosadíme-li sem za y (2.98), dostáváme

$$x = a^{\log_a x}.$$

Dosažené výsledky můžeme shrnout do následující věty.

Věta 2.12.

Funkce $y = a^x$, kde a je kladná reálná konstanta různá od jedné, je spojitá. Pro $a > 1$ je rostoucí na intervalu $(-\infty, \infty)$

a pro $0 < a < 1$ je klesající na intervalu $(-\infty, \infty)$. Oborem jejich hodnot je v obou případech interval $(0, \infty)$. Nazývá se exponenciální funkcí se základem a. Speciálním případem je funkce $y = a^x$ pro $a = 10$, tedy funkce $y = 10^x$. Nazývá se dekadická exponenciální funkcí.

K funkci a^x existuje funkce inverzní, značíme ji $\log_a x$ (čteme logaritmus x při základě a). Je definována na intervalu $(0, \infty)$. Funkce $\log_a x$ je pro $a > 1$ rostoucí a pro $0 < a < 1$ klesající na intervalu $(0, \infty)$. Je v něm spojitá.
Jsou-li $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$ potom platí

$$
\begin{aligned}
\log_a(x_1 \cdot x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2, && (2.99)\\
\log_a \frac{x_1}{x_2} &= \log_a x_1 - \log_a x_2, && (2.100)\\
\log_a x^s &= s \cdot \log_a x. && (2.101)
\end{aligned}
$$

Je-li b kladné reálné číslo různé od 1 platí

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Funkci $y = \log_{10} x$ nazýváme dekadickým logaritmem a většinou ji zkráceně zapisujeme jako $y = \log x$.

Na obr. 2.33 jsou grafy funkcí $y = a^x$, $y = \log_a x$ pro $a > 1$. Na obr. 2.34 jsou grafy funkcí $y = a^x$, $y = \log_a x$ pro $0 < a < 1$.

Zavedení Eulerova čísla

Eulerovo číslo. Velký význam má exponenciální funkce se základem iracionálního čísla, zvaného Eulerovo číslo. Značí se e. Toto číslo lze definovat jako

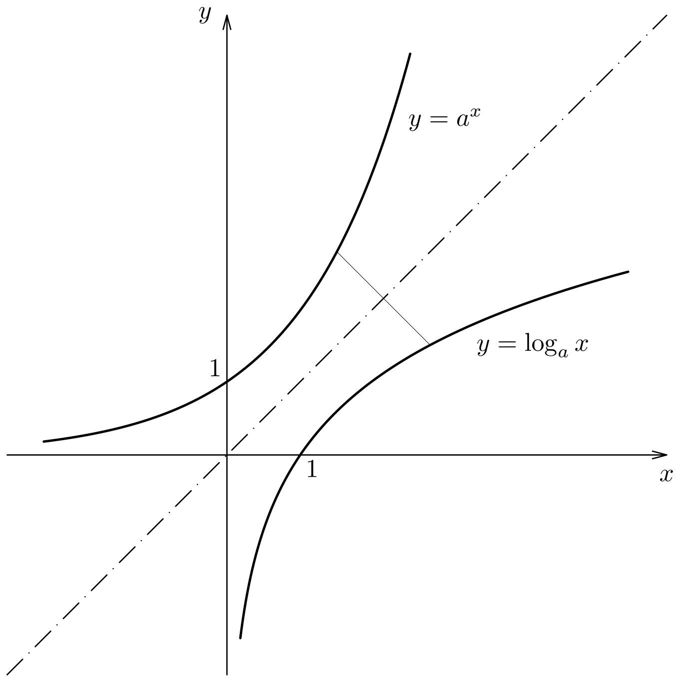
$$e = \sup A, \qquad \text{kde } A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Označíme-li $B = \{(1 + \frac{1}{n-1})^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, platí $\inf B = e$. Dále platí

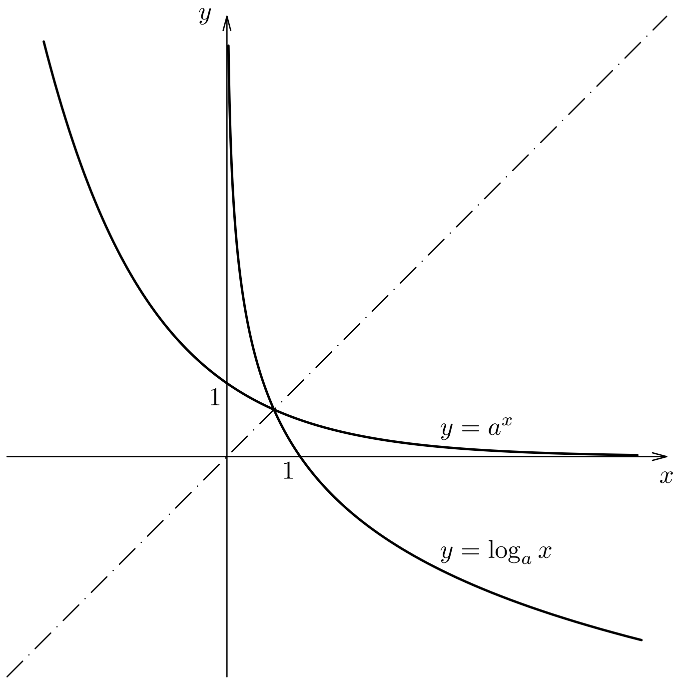
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Lze ukázat, že

$$e \doteq 2{,}7182818284590452354\ldots$$



Obrázek 2.33: Graf funkce a^x a $\log_a x$ pro $a > 1$.



Obrázek 2.34: Graf obecné exponenciální a logaritmické funkce, $0 < a < 1$.

Funkce

$$y = e^x, \qquad (-\infty, \infty),$$

je tedy speciálním případem funkce $y = a^x$ *pro* $a > 1$. *Jejím definičním oborem je* $(-\infty, \infty)$. *Oborem jejích funkčních hodnot je interval* $(0, \infty)$. *Nazývá se* přirozenou exponenciální funkcí.
K funkci $y = e^x$ *existuje funkce inverzní. Místo* $y = \log_e x$ *se většinou píše*

$$y = \ln x, \qquad x \in (0, \infty).$$

Nazývá se přirozenou logaritmickou funkcí.

Obecná mocnina. Funkci

$$y = x^s, \qquad s \in \mathbb{R}$$

definujeme vztahem

$$x^s = \left(e^{\ln x}\right)^s = e^{s \ln x}.$$

Odtud je vidět, že je to funkce spojitá na intervalu $(0, \infty)$.

Trigonometrické funkce

Dříve než začneme s vlastním výkladem, zopakujme si některé Vám dobře známé pojmy.

periodická funkce

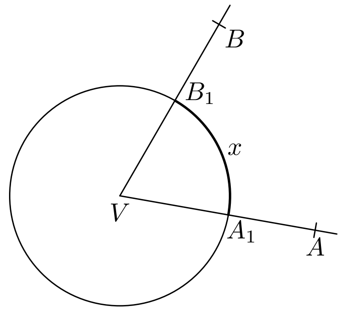
Funkci $f(x)$ nazýváme periodickou, *jestliže má tuto vlastnost: Existuje takové číslo* ω, *zvané perioda funkce* $f(x)$, *že platí: Je-li funkce* $f(x)$ *definovaná v čísle* x, *je definovaná ve všech číslech* $x + k\omega, k \in \mathbb{Z}$ *a platí*

$$f(x + k\omega) = f(x), k \in \mathbb{Z}. \tag{2.102}$$

Nejmenší číslo ω *pro něž platí (2.102) se nazývá* základní periodou.

Úhly měříme jak ve stupních tak i v míře obloukové. Nechť AVB je libovolný úhel.

Oblouková míra úhlů. Sestrojme v rovině AVB jedotkovou kružnici (to jest kružnici o poloměru 1) se středem v bodě V, viz obr. 2.35. Označme A_1 (B_1) její průsečík s přímkou VA (VB). Potom velikostí úhlu AVB v obloukové míře rozumíme délku x kruhového oblouku A_1B_1 vyznačeného na obrázku (2.35). Jedotkový úhel obloukové míry se nazývá radián. Označuje se *rad*. Je tedy 1 rad velikost úhlu, který na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu vytíná oblouk jednotkové délky. Při označování velikosti úhlu se většinou vynechává označení rad. Tedy např. pravý úhel v obloukové míře je roven $\frac{\pi}{2}rad$, zkráceně zapsáno $\frac{\pi}{2}$.



Obrázek 2.35: Úhel v obloukové míře.

Stupňová velikost úhlů. Jednotkový stupeň úhlové míry, zvaný (úhlový) stupeň je roven $\frac{1}{90}$ pravého úhlu. Jako menší jednotky stupňové velikosti úhlu se používají minuty a vteřiny. Stupně, minuty a vteřiny vyznačujeme jako „°, ′, ″“. Platí $1° = 60', 1' = 60''$. Je tedy

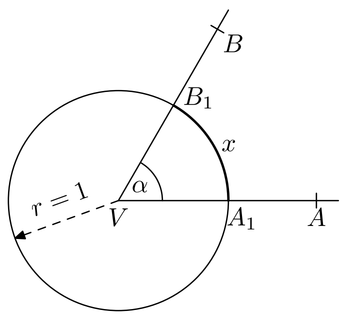
$$1° = 60' = 3600''.$$

Velikost úhlu AVB ve stupňové míře nazýváme nezáporné číslo, které vyjadřuje kolikrát je úhel AVB větší (menší) než jeden stupeň (míněno úhlový stupeň).

Vztah mezi velikosti úhlu v obloukové míře a velikosti úhlu v míře stupňové. Úhlu 360° ve stupňové míře odpovídá úhel 2π v obloukové míře. Tedy mezi velikosti úhlu α ve stupňové míře a velikosti x téhož úhlu v obloukové míře platí vztah

$$\alpha : x = 180 : \pi.$$

(Viz obr. 2.36.) Odtud dostáváme např. $x = \frac{\pi}{180}\alpha$. Např. pro úhel $\alpha = 90°$ dostáváme $x = \frac{\pi}{2}$.



Obrázek 2.36: Vztah mezi velikosti úhlu ve stupních a v obloukové míře.

úhel ve stupních	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
úhel v radiánech	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Tabulka 2.1: Vztah mezi velikostmi úhlů ve stupních a v radiánech.

V následující tabulce 2.1 je vyznačen vztah mezi velikosti úhlů v míře stupňové a v míře obloukové pro některé význačné úhly.

Orientovaný úhel. Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. V této dvojici první polopřímku nazýváme počátečním ramenem a druhou koncovým ramenem orientovaného úhlu. Společný počátek těchto polopřímek nazýváme vrcholem úhlu. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB budeme označovat $\widehat{AVB}$.

Uvažujme orientovaný úhel $\widehat{AVB}$. Jeho velikostí v obloukové míře rozumíme každé číslo tvaru (viz.(2.36))

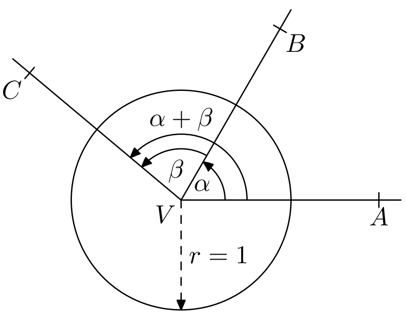
$$\alpha + 2k\pi \tag{2.103}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a α určíme takto:

a) Jestliže $VA = VB$, je $\alpha = 0$.

b) Jestliže $VA \neq VB$ je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v kladném smyslu, to jest proti pohybu hodinových ručiček. Je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$. Takto definované číslo α se nazývá základní velikostí orientovaného úhlu.

Součet a rozdíl orientovaných úhlů. Nechť $\widehat{AVB}, \widehat{BVC}$ jsou orientované úhly. Koncové rameno prvního z nich je počátečním ramenem druhého z nich. Jejich součtem se nazývá orientovaný úhel $\widehat{AVC}$. Jestliže velikost prvního z nich je $\alpha + 2k_1\pi$ a velikost druhého je $\beta + 2k_2\pi$, kde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, potom jejich sučtem je úhel $\alpha + \beta + 2k\pi$, kde $k = k_1 + k_2$. Jestliže úhel $\widehat{AVC}$ je součtem úhlů $\widehat{AVB}$ a $\widehat{BVC}$, pak úhel $\widehat{BVC}$ nazýváme rozdílem úhlů $\widehat{AVC}$ a $\widehat{AVB}$.



Obrázek 2.37: Součet úhlů $\widehat{AVB}$ a $\widehat{BVC}$.

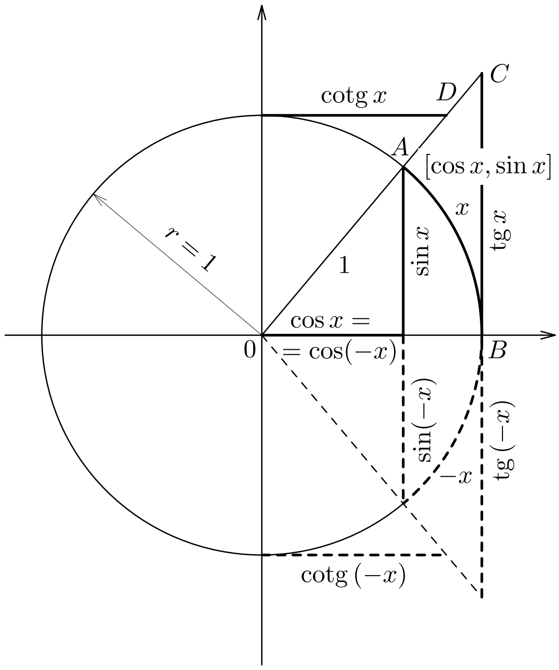
Zavedení funkcí $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x$

Zabývejme se nyní trigonometrickými funkcemi, zvanými někdy též funkce *goniometrické*. Omezíme se na funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$. V pravoúhlém souřadném systému sestrojme kružnici o jednotkovém poloměru se středem v počátku. Zvolme libovolně x a sestrojme polopaprsek vycházející z počátku, který svírá s kladnou osou úhel x. Tento polopaprsek protne kružnici v jednom bodě. Jeho souřadnice označme $\cos x, \sin x$ (viz obr. 2.38). Tyto souřadnice závisí na x, takže $\cos x$ a $\sin x$ jsou funkce definované pro každé reálné x.

Pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$ definujeme další trigonometrické funkce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

pro ty úhly x, pro něž je jmenovatel různý od 0.



Obrázek 2.38: Zavedení funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.

Trigonometrické funkce jsou dostatečně známy ze střední školy a proto zde jen zopakujeme jejich základní vlastnosti.

Z definice a z konstrukce je vidět, že $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin 2\pi = 0$, $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos(-2\pi) = 1$. Z definice je vidět, že obě funkce jsou periodické s periodou 2π a že $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$. Pro $x \in \langle\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ nabude $\sin x$ všech hodnot z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a $\cos x$ všech hodnot z intervalu $\langle -1, 0\rangle$. Pro $x \in \langle\pi, \frac{3\pi}{2}\rangle$ nabude $\sin x$ všech hodnot z intervalu $\langle -1, 0\rangle$, $\cos x$ všech hodnot z intervalu $\langle -1, 0\rangle$; konečně pro $x \in \langle\frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle$ nabude $\sin x$ všech hodnot z intervalu $\langle -1, 0\rangle$ a $\cos x$ všech hodnot z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Funkce $\sin x$ *je kladná pro úhly v prvním a ve druhém kvadrantu a záporná pro úhly ve třetím a ve čtvrtém kvadrantu. Funkce* $\cos x$ *je kladná pro úhly v prvním a ve čtvrtém kvadrantu a je záporná pro úhly ve druhém a ve třetím kvadrantu. Obě tyto funkce jsou periodické s periodou* 2π.

Funkce $\operatorname{tg} x$ *je definována pro všechna* x *různá od lichých násobků* $\frac{\pi}{2}$, *funkce* $\operatorname{cotg} x$ *je definována pro* x *různá od násobků* π. *Funkce* $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$ *jsou kladné pro úhly pro* x *v prvním a ve třetím kvadrantu v němž jsou definovány a záporné pro úhly ve druhém a ve třetím kvadrantu v němž jsou definovány. Tyto funkce jsou periodické s periodou* π.

Ze střední školy jsou známy součtové vzorce:

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \sin x_2 \cdot \cos x_1, \quad (2.104)$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2. \quad (2.105)$$

Z těchto vzorců lze lehce odvodit řadu dalších velice užitečních vztahů. Klademe-li v těchto vzorcích $x_1 = x_2 = x$, dostaneme z (2.104)

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Dosadíme-li $x_1 = x_2 = x$ do vzorce pro kosinus rozdílu do (2.105), dostáváme

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Tento vzorec se vzorcem pro $\cos 2x$ dává:

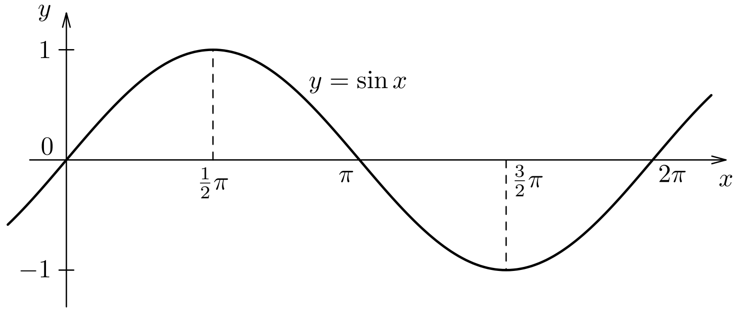
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Ze vzorců pro $\sin(x_1 \pm x_2)$ a $\cos(x_1 \pm x_2)$ snadno dostaneme:

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \cdot \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \cos \frac{x_1 - x_2}{2},$$

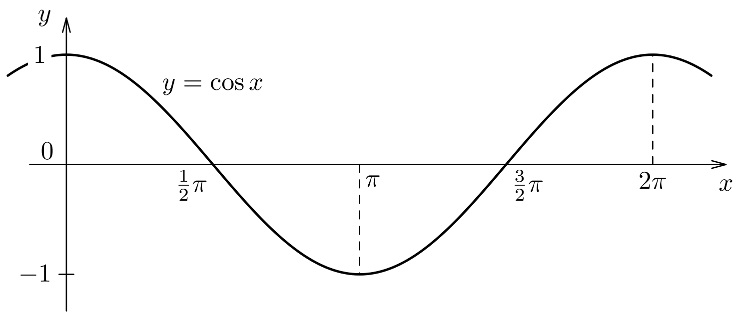
$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cdot \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2},$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cdot \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \cos \frac{x_1 - x_2}{2},$$
$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \cdot \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2}.$$



Obrázek 2.39: Graf funkce $\sin x$.

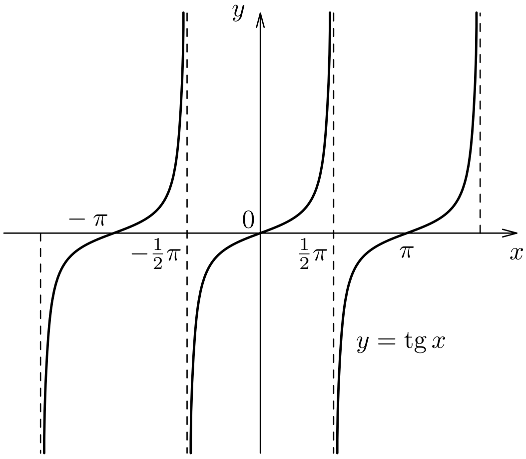
Pro $x_1, x_2 \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, je $(x_1 + x_2)/2 \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$; je-li $x_1 > x_2$, je $0 < x_1 - x_2 < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, takže $(x_1 - x_2)/2 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Z periodičnosti funkce $\cos x$ plyne, že pro $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$ má kosinus takové hodnoty, jako v intervalu $\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle$, tj. ≥ 0. Je tedy za daných předpokladů $\cos[(x_1 + x_2)/2] > 0$ a podobně $\sin[(x_1 - x_2)/2] > 0$. Je tedy $\sin x_1 - \sin x_2 > 0$, $\sin x_1 > \sin x_2$, takže funkce $\sin x$ v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ roste. Podobně lze ukázat, že $\sin x$ v intervalu $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ klesá, $\cos x$ v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ klesá a v intervalu $\langle \pi, 2\pi \rangle$ roste. Na základě těchto úvah lze narýsovat grafy funkcí $\sin x$ (viz obr. 2.39) a $\cos x$ (viz obr. 2.40).

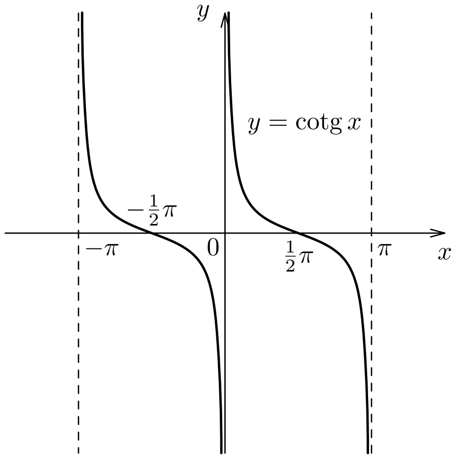


Obrázek 2.40: Graf funkce $\cos x$.

Podobným způsobem jako u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ lze ukázat, že funkce $\operatorname{tg} x$ stále roste v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a nabude všech reálných hodnot. Podobně funkce $\operatorname{cotg} x$ stále klesá v intervalu $(0, \pi)$ a nabývá zde všech reálných hodnot.

Grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou na obrázcích 2.39 až 2.42.





Obrázek 2.41: Graf funkce $\operatorname{tg} x$.

Obrázek 2.42: Graf funkce $\operatorname{cotg} x$.

Spojitost funkcí $\sin x$ **a** $\cos x$**.**

Věta 2.13. *Funkce* $\sin x$ *je v čísle* 0 *spojitá.*

Důkaz: (Sleduj obr. 2.38.) Buď $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Z definice a konstrukce je patrno, že zde platí $0 < \sin x < x$. Zvolme $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ libovolně a položme $\delta = \varepsilon$. V $U_\delta^+(0)$ je funkce $\sin x$ definována a platí $|\sin x - 0| = |\sin x| = \sin x < x < \varepsilon$, takže funkce $\sin x$ je v 0 zprava spojitá. Poněvadž funkce $\sin x$ je lichá, lehce nahlédneme, že funkce $\sin x$ je v čísle 0 také zleva spojitá a proto je v čísle 0 spojitá. □

Věta 2.14. *Funkce* $\cos x$ *je v čísle* 0 *spojitá.*

Důkaz: Buď $\varepsilon > 0$. Zvolme číslo $\delta = \sqrt{2\varepsilon} > 0$. Pak v okolí $U_\delta^+(0)$ je funkce $\cos x$ definována a je v tomto okolí

$$|\cos x - 1| = |1 - \cos x| = 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon.$$

Je tedy funkce $\cos x$ v čísle 0 zprava spojitá. Poněvadž

$$\cos(x) = \cos(-x),$$

je funkce $\cos x$ i zleva spojitá a proto je i spojitá v bodě 0. □

Věta 2.15. *Funkce* $\sin x$ *je spojitá ve všech bodech.*

Důkaz: Nechť a je libovolné číslo. Dokažme, že je v něm funkce $\sin x$ spojitá. Z definice spojitosti funkce vyplývá, že funkce $\sin x$ je spojitá v bodě a když a jenom když funkce $\sin(a+h)$ je spojitá v bodě $h = 0$. Podle (2.104) dostáváme

$$\sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h. \tag{2.106}$$

Poněvadž funkce $\sin h, \cos h$ jsou funkce spojité v bodě $h = 0$, dostáváme odtud, že pravá strana v (2.106) je spojitá v bodě $h = 0$, takže funkce $\sin x$ je spojitá v bodě a. □

Věta 2.16. *Funkce* $\cos x$ *je spojitá ve všech bodech.*

Důkaz: Skutečně. Spojitost funkci $\cos x$ vyplývá ze vztahu $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ a z věty o spojitosti složené funkce. $\square$

Věta 2.17. *Trigonometrické funkce jsou spojité ve všech číslech, ve kterých jsou definovány.*

Důkaz: Důkaz vychází z věty o spojitosti podílu a z vět předcházejících. $\square$

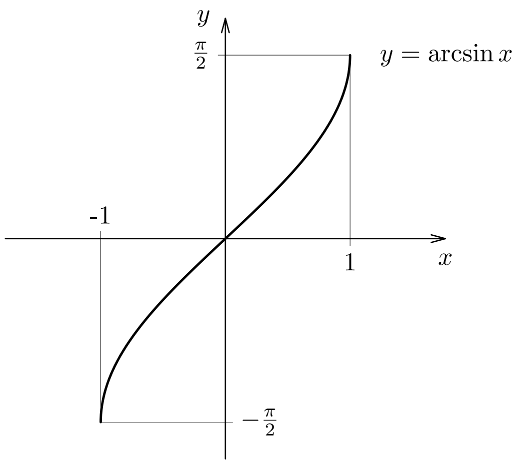
Funkce cyklometrické

V předcházejícím výkladu jsme zjistili, že funkce $\sin x$ je v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ spojitá a rostoucí a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tedy k ní existuje funkce inverzní, definovaná v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tuto funkci označujeme $\arcsin x$. Podle věty 2.8 je tato funkce spojitá v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je v něm rostoucí. Nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce

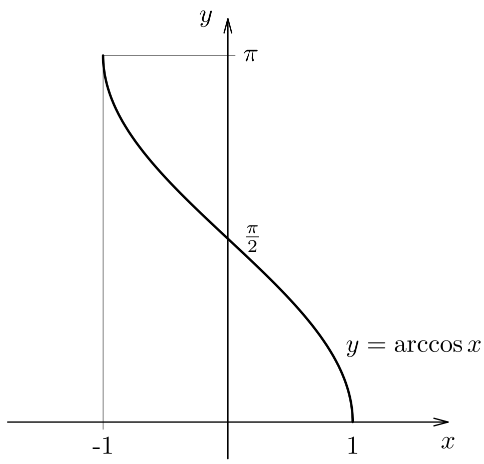
$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

okolo přímky $y = x$ (viz obr. 2.43). Geometrický význam funkce arcsin je tento:

„$\arcsin x$ *je ten úhel z intervalu* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, *jehož sinus má hodnotu* x.“



Obrázek 2.43: Graf funkce $\arcsin x$.



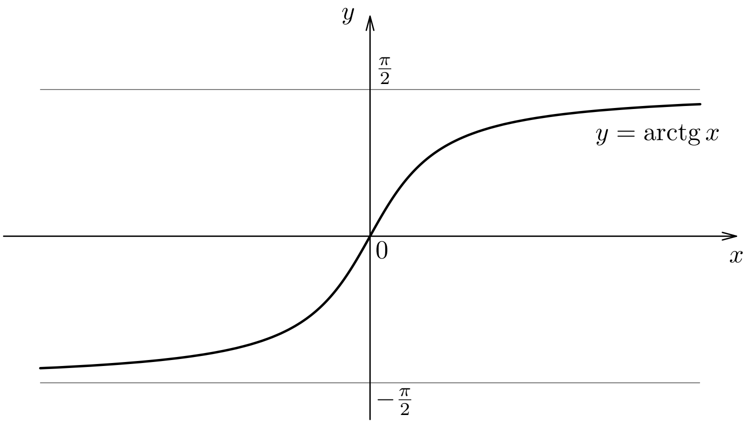
Obrázek 2.44: Graf funkce $\arccos x$.

Funkce $\cos x$ je v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ spojitá a klesající a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tuto funkci označujeme $\arccos x$. Podle věty 2.8 je to funkce spojitá v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je v něm klesající. Nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \cos x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 2.44). Geometrický význam funkce $\arccos x$ je tento:

„arccos x *je ten úhel z intervalu* $\langle 0, \pi\rangle$, *jehož kosinus má hodnotu* x*.*“

Funkce $\operatorname{tg} x$ je v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ spojitá a rostoucí a nabývá zde všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$. Tuto funkci označujeme $\operatorname{arctg} x$. Podle věty 2.8 je to funkce spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ a je v něm rostoucí. Nabývá všech hodnot z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 2.45). Geometrický význam funkce $\operatorname{arctg} x$ je tento:

„arctg x *je ten úhel z intervalu* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *jehož tangens má hodnotu* x*.*“



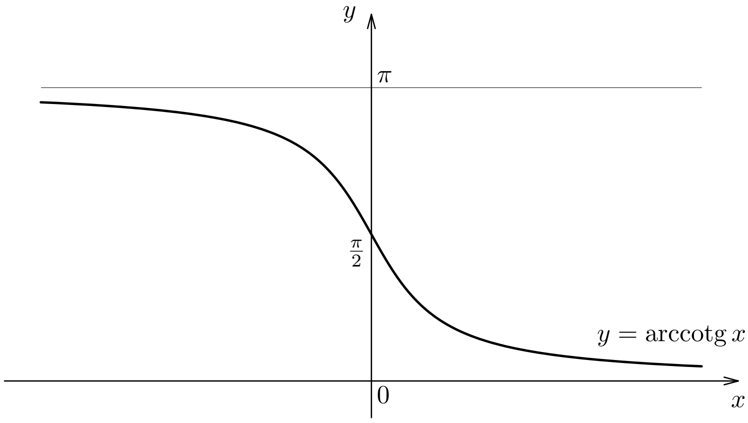
Obrázek 2.45: Graf funkce $\operatorname{arctg} x$.

Funkce $\operatorname{cotg} x$ je v intervalu $(0, \pi)$ spojitá a klesající a nabývá v něm všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Tedy k ní existuje funkce inverzní definovaná v intervalu $(-\infty, \infty)$. Tuto funkci označujeme $\operatorname{arccotg} x$. Podle věty 2.8 je to funkce spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ a je v něm klesající. Nabývá všech hodnot z intervalu $(0, \pi)$. Její graf se dostane překlopením grafu funkce $f(x) = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$ okolo přímky $y = x$ (viz obr. 2.46). Geometrický význam funkce $\operatorname{arccotg} x$ je tento:

„arccotg x *je ten úhel z intervalu* $(0, \pi)$, *jehož kotangens má hodnotu* x*.*“

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ se nazývají *funkce cyklometrické*. Dosavadní výsledky o spojitosti lze shrnout takto:

Věta 2.18. *Funkce cyklometrické jsou spojité na svém definičním oboru.*



Obrázek 2.46: Graf funkce $\operatorname{arccotg} x$.

Kontrolní úlohy

1. Nechť $f(x) = (x^3 + 2x + 1)^2$. Určete její vnitřní a vnější složku.
[vnitřní složka $u = x^3 + 2x + 1$, vnější složka $y = u^2$.]

2. K funkci $y = 3x - 1$ určete funkci inverzní a nakreslete jejich grafy.

3. Určete funkci inverzní k daným funkcím a nakreslete jejich grafy.

a) $y = x^4$

b) $y = x^5$

c) $y = x^2 + 1$

d) $y = x^3 - 1$

e) $y = \frac{3x+1}{x-2}$

[e) Položme $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$. Funkce f je prostá na $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. $H_f = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-3}$, $x \in H_f$.]

4. Nakreslete grafy funkcí

a) $\log(x - 2)$

b) $\log_{0,1}(3x + 2)$

5. Řešte rovnice

a) $\log x = -\frac{1}{2}$ [$x = \frac{1}{\sqrt{10}}$]

b) $\ln x = \frac{3}{2}$ [$x = e^{\frac{3}{2}}$]

6. Řešte nerovnice

a) $\log x < 3$ [$x \in (0, 10^3)$]

b) $\log_{0,1} x < 2$ [$x \in (0{,}01, \infty)$]

7. Určete nejmenší periodu funkce $y = \sin 2x$.

8. Vyjádřete následující úhly v obloukové míře

a) $\alpha = 30°$

b) $\beta = 120°$

c) $\gamma = -315°$

9. Vyjádřete následující úhly ve stupních (použijte kalkulačku)

a) $\alpha = 3$

b) $\beta = -2$

c) $\gamma = 2{,}3$

10. Nakreslete grafy funkcí

a) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

b) $y = \mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{4})$

c) $y = \cos 2x$

d) $y = \mathrm{cotg}(x - \frac{\pi}{3})$