- Úvod do maticového počtu
- Systémy lineárních algebraických rovnic, úvod
- Zavedení pojmu inverzní matice
- Základní poznatky z kapitoly 3 a úlohy k procvičení

3. Základní pojmy lineární algebry

Cíl kapitoly

Cílem studia této kapitoly je

- osvojit si provádění těchto operací s maticemi: násobení matice číslem, sečítání dvou matic, násobení dvou matic
- osvojit si pojmy: relace „$\leq, \geq, <, >, =$“ mezi maticemi
- osvojit si pojmy: jednotková matice, nulová matice, diagonální matice, horní a dolní trojúhelníková matice, horní schodovitá matice
- naučit se zapsat systém lineárních rovnic užitím maticové notace a umět rozhodnout, zda nějaký vektor je nebo není řešením daného systému lineárních algebraických rovnic

Časová zátěž

- 15 hodin

3.1 Úvod do maticového počtu

Pojem matice

V denním životě se často setkáváme s různými tabulkami čísel. Jedná se vlastně o skupinu čísel zapsaných do několika řádků a několika (třeba jiného počtu) sloupců.

Příkladem je např. tabulka, v níž je uvedena spotřeba surovin, označme je $S_1, \ldots, S_m$, potřebná při výrobě výrobků, které označíme $V_1, \ldots, V_n$. Spotřeba je uvedena v nějakých v úloze specifikovaných jednotkách.

Následující tabulka charakterizuje výrobu v čokoládovně při výrobě 5 druhů výrobků, označených jako V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. V našem příkladě se uvádí spotřeba surovin S_1, S_2, S_3, to jest po řadě tuku, kakaa a cukru v kg na 1 kg každého z výrobků $V_1, \ldots, V_5$. Např. při výrobě 1 kg výrobku V_2 spotřebujeme $0,4$ kg tuku.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
tuk	$0,00$	$0,4$	$0,3$	$0,6$	$0,6$
kakao	$0,05$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	$0,0$
cukr	$0,10$	$0,2$	$0,2$	$0,1$	$0,2$

Tabulka 3.1: Tabulka pro výrobu v čokoládovně

Vynecháme-li záhlaví v tabulce, jedná se o uspořádanou skupinu 15 čísel, zapsaných do tří řádků a pěti sloupců. Pro takové uspořádané skupiny čísel si zavedeme následující definicí pojem *matice*.

Definice 3.1.

Maticí typu (m, n) budeme rozumět každou uspořádanou skupinu $m \cdot n$ reálných čísel zapsaných do m řádků a n sloupců. Každé z těchto čísel budeme nazývat prvkem ma-

tice. Abychom vyznačili, že tato čísla vytvářejí matici, budeme tuto skupinu čísel dávat do kulatých závorek.
Matice typu $(m, 1)$ je tedy uspořádaná skupina m reálných čísel zapsaných do jednoho sloupce. Budeme ji nazývat sloupcovým vektorem. Prvky této matice nazýváme též složkami vektoru.
Matice typu $(1, n)$ je tedy uspořádaná skupina n reálných čísel zapsaných do jednoho řádku. Budeme ji nazývat řádkovým vektorem. Prvky této matice nazýváme též složkami vektoru.
Řádky matice typu (m, n) jsou řádkovými vektory a sloupce matice jsou sloupcovými vektory.

Označování. Matice budeme označovat většinou velkými tučně vytištěnými písmeny, např. $\boldsymbol{A}$. Prvek matice , umístěný v jejím i–tém řádku a v j–tém sloupci, budeme většinou označovat malým písmenem, odpovídajícímu označení matice, s indexy i, j, umístěnými u jeho dolního pravého rohu. Tedy $a_{i,j}$ bude značit prvek matice $\boldsymbol{A}$ v jejím i–tém řádku a v j–tém sloupci. Pokud nemůže dojít k chybě, lze čárku mezi indexy vynechat.

Příklad 3.1. Výše uvedenou tabulku vyznačíme tedy jako matici typu $(3, 5)$ následovně:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Příklad 3.2. V následujícím příkladě je $\boldsymbol{A}$ maticí typu $(2, 3)$, vektor $\boldsymbol{b}$ je řádkový vektor se 4 složkami, $\boldsymbol{c}$ je sloupcový vektor se 4 složkami.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Je tedy např. $a_{2,3} = 7$.

Označování. *Matici $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) můžeme tedy zapsat takto*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(1, n)$, to jest, jestliže

$$\boldsymbol{A} = (a_{1,1}\ a_{1,2}\ \ \ldots a_{1,n}), \tag{3.3}$$

potom ji nazýváme též řádkovým vektorem, jak bylo již uvedeno. Budeme jej většinou označovat tučně vytištěným malým písmenem. Poněvadž u všech prvků je první index stejný, roven 1, lze jej většinou vypouštět. Místo nahoře uvedené matice (3.3) můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ \ \ldots\ \ a_n).$$

Podobně, jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(m, 1)$, to jest, jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

potom ji můžeme nazývat též sloupcovým vektorem, jak již bylo uvedeno. Budeme jej většinou označovat tučně vytištěným malým písmenem. Poněvadž u všech prvků je druhý index stejný, roven 1, budeme jej většinou vypouštět. Místo (3.4), můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \\ a_m \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Příklad 3.3. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 23 & 16 & 6 \\ 5 & 7 & 19 & 3 & 0 \\ 2 & 20 & 22 & 14 & 18 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

je typu $(3, 5)$

Příklad 3.4. Označme D_1, D_2 místa, z nichž se provádí rozvoz do míst Z_1, Z_2, Z_3. Označme c_{ij} náklady v Kč na dopravu 1 tuny zboží z místa D_i do místa Z_j pro $i = 1, 2;\ \ j = 1, 2, 3$. Z čísel c_{ij} utvoříme matici, např.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2000 & 1500 & 1800 \\ 800 & 50000 & 1000 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Jde o matici typu $(2, 3)$. V této matici je např. $c_{13} = 1800$, to znamená, že náklady na dopravu jedné tuny zboží z místa D_1 do místa Z_3 jsou 1800 Kč.

Příklad 3.5. Uveďme matici popisující cenu v \$ tří druhů zboží V_1, V_2, V_3 ve čtyřech různých zemích Z_1, Z_2, Z_3, Z_4.

$$C = \begin{pmatrix} 230 & 450 & 100 \\ 200 & 420 & 90 \\ 210 & 430 & 80 \\ 235 & 435 & 95 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Zde c_{ij} značí cenu zboží V_j v \$ v zemi Z_i. Poněvadž $c_{23} = 90$, je cena zboží V_3 v zemi Z_2 rovna 90 \$.

Uveďme ještě příklady matic, které obsahují jenom jeden řádek, tedy příklady řádkových vektorů.

Příklad 3.6. Uvažujme výrobní závod, v jehož dvou provozovnách se vyrábějí stejné čtyři různé výrobky, označme je V_1, V_2, V_3, V_4. Označme a_i počet výrobků V_i, které se mají denně vyrobit v první provozovně a b_i počet výrobků V_i, které se mají denně vyrobit v druhé provozovně. Potom vektor $\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ charakterizuje denní výrobní plán první provozovny a vektor $\boldsymbol{b} = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$ charakterizuje denní výrobní plán druhé provozovny. Je-li tedy např.

$$\boldsymbol{a} = (1\ 5\ 8\ 6), \quad \boldsymbol{b} = (4\ 6\ 1\ 2), \tag{3.9}$$

potom např. $a_2 = 5$ znamená, že první provozovna má denně vyrobit podle plánu 5 výrobků V_2. Druhá provozovna má podle plánu vyrobit těchto výrobků $b_2 = 6$.

Zatím jsme pouze uvedli způsob zápisu uspořádané skupiny čísel, se kterými je vhodné v dalším *pracovat jako s celkem.* V dalším budeme většinou odhlížet od věcného významu jednotlivých prvků matic a ukážeme možnosti, jak lze s maticemi pracovat.

3.1.1 Relace mezi maticemi

Mezi maticemi téhož typu si zavedeme následující relace. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice téhož typu (m, n).

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je menší nebo rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} \leq b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je menší než matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} < b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je větší nebo rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} \geq b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je větší než matice $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} > b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad 3.7. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přesvědčte se, že $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$.

Příklad 3.8. Přesvědčte se, že mezi maticemi $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

neplatí žádná z relací $<, \leq, >, \geq, =$.

3.1.2 Základní operace s maticemi

Zaveďme si tyto operace s maticemi.

Součet matic

Sečítání dvou matic. Začněme s několika motivačními příklady. Nahoře v příkladě 3.6 jsme uvažovali vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, dané vztahy (3.9). Vektor $\boldsymbol{a}$ představuje denní výrobní plán první provozovny a $\boldsymbol{b}$ představuje denní výrobní plán druhé provozovny. Jestliže se ve výrobním závodě vyrábějí uvedené výrobky pouze v těchto dvou provozovnách, pak denní plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 celého závodu je zřejmě

$$\boldsymbol{c} = (5\ 11\ 9\ 8),$$

kde $c_i = a_i + b_i$, pro $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Jeví se proto užitečným označit vektor $\boldsymbol{c}$ jako součet vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Příklad 3.9. Nechť podnik vyrábí výrobky V_1, V_2, V_3 ve dvou provozovnách. Plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3 v první provozovně podniku je pro jednotlivé kvartály charakterizován maticí $\boldsymbol{A}$ a výroba ve druhé provozovně je pro jednotlivé kvartály charakterizována maticí $\boldsymbol{B}$. Obě matice jsou typu $(4, 3)$. Nechť prvek $a_{i,j}$ matice $\boldsymbol{A}$ udává plánovaný počet výrobků V_j v i–tém kvartálu v první provozovně. Analogický význam má prvek $b_{i,j}$ matice $\boldsymbol{B}$. Tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \end{pmatrix}.$$

Pokud závod vyrábí uvedené výrobky pouze v těchto dvou provozovnách, lze charakterizovat plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3 celého podniku pro jednotlivé kvartály maticí $\boldsymbol{C}$, jejíž prvek $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ představuje plán výroby výrobku V_j v i–tém kvartálu celého podniku. Tedy

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} \\ a_{3,1}+b_{3,1} & a_{3,2}+b_{3,2} & a_{3,3}+b_{3,3} \\ a_{4,1}+b_{4,1} & a_{4,2}+b_{4,2} & a_{4,3}+b_{4,3} \end{pmatrix}.$$

Z těchto příkladů je patrno, že má smysl definovat součet dvou matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož typu podle následující definice.

Definice 3.2. (Součet dvou matic)

Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou téhož typu (m, n). Součtem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ budeme rozumět matici $\boldsymbol{C}$ typu (m, n), pro jejíž prvky $c_{i,j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, platí

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Pro operaci sečítání matic budeme používat symbolu „+“. Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Příklad 3.10. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice typu $(3, 3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ je

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 9 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Násobení matice číslem

Násobení matice číslem. V příklade 3.5 jsme uvedli matici $\boldsymbol{C}$. Číslo $c_{i,j}$ v ní značí cenu v \$ výrobku V_j v zemi Z_i. Chceme-li vyjádřit cenu jednotlivých výrobků v uvažovaných zemích v Kč, stačí násobit každý prvek matice $\boldsymbol{C}$ stejným číslem, daným kurzem dolaru. Vzniklou matici označíme $\boldsymbol{D}$. Počítáme-li 35 Kč za jeden \$, dostáváme matici

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 8050 & 15750 & 3500 \\ 7000 & 14700 & 3150 \\ 7350 & 15050 & 2800 \\ 8225 & 15225 & 3325 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

udávající cenu jednotlivých výrobků v uvažovaných zemích v Kč.

To nás motivuje k zavedení definice součinu čísla a matice takto:

Matice násobená číslem

Definice 3.3. (Součin čísla a matice)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n) a α je reálné číslo. Potom součinem matice $\boldsymbol{A}$ a čísla α rozumíme matici $\boldsymbol{C}$, pro jejíž prvky $c_{i,j}$ platí

$$c_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j} \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Pro násobení matice číslem budeme používat symbol „·“. Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A}$. Symbol „·“ lze vynechat.

Příklad 3.11. Nechť $\alpha = 3$ a nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(3, 3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 18 & 3 & 9 \\ -6 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Definice 3.4.

Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice téhož typu. Potom definujme $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ jako matici $\boldsymbol{A} + (-1) \cdot \boldsymbol{B}$.

Součin dvou matic – motivace

Součin dvou matic. Zaveďme si ještě definici součinu dvou matic. Začneme s příkladem. Uvažujme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

V ní $a_{i,j}$ značí spotřebu v kg i–té suroviny S_i na výrobu jednoho kilogramu j–tého výrobku V_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Zapišme tuto matici obecně.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Má-li se vyrobit x_j kg výrobku V_j, spotřebuje se při jeho výrobě $a_{i,j} \cdot x_j$ kg suroviny S_i. Uvažujme případ, že chceme vyrobit výrobky V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 v množstvích x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 v kg a že chceme určit spotřebu suroviny S_i pro některé $i = 1, 2, 3$. Označme ji y_i. Potom y_i je součtem čísel $a_{i,j} \cdot x_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Tedy

$$y_i = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + a_{i,3} \cdot x_3 + a_{i,4} \cdot x_4 + a_{i,5} \cdot x_5.$$

Označme tedy $\boldsymbol{x}$ sloupcový vektor o pěti složkách, v němž x_j udává požadované množství výrobku V_j v kg. Budeme jej nazývat vektorem výroby. Označme $\boldsymbol{y}$ sloupcový vektor o třech složkách, v němž y_i vyjadřuje množství suroviny S_i v kg potřebné k výrobě výrobků V_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ v požadovaných množstvích x_j. Nazveme jej vektorem spotřeby. Tedy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Označme

$$y_i = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + a_{i,3} \cdot x_3 + a_{i,4} \cdot x_4 + a_{i,5} \cdot x_5, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.14}$$

Budeme říkat, že vektor $\boldsymbol{y}$ je součinem matice $\boldsymbol{A}$ a vektoru $\boldsymbol{x}$ a budeme psát

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Pro vektor výroby

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ 120 \\ 150 \\ 85 \\ 80 \end{pmatrix}$$

a matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,40 & 0,3 & 0,6 & 0,60 \\ 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,10 & 0,00 \\ 0,10 & 0,20 & 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,00 \cdot 250 + 0,4 \cdot 120 + 0,3 \cdot 150 + 0,6 \cdot 85 + 0,6 \cdot 80, \\ y_2 &= 0,05 \cdot 250 + 0,2 \cdot 120 + 0,1 \cdot 150 + 0,1 \cdot 85 + 0,0 \cdot 80, \\ y_3 &= 0,10 \cdot 250 + 0,2 \cdot 120 + 0,2 \cdot 150 + 0,1 \cdot 85 + 0,2 \cdot 80. \end{aligned}$$

Vyčíslením obdržíme $y_1 = 192,\ y_2 = 60,\ y_3 = 103$. Tedy

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 192.0 \\ 60.0 \\ 103.5 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme nyní obecnější případ. Hledejme vektory spotřeby pro m různých vektorů výroby. Označme $\boldsymbol{X}$ matici typu $(5, m)$, jejíž každý sloupec je vektorem výroby. Nechť matice $\boldsymbol{X}$ má tento tvar:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \dots & x_{m,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{m,2} \\ x_{1,3} & x_{2,3} & \dots & x_{m,3} \\ x_{1,4} & x_{2,4} & \dots & x_{m,4} \\ x_{1,5} & x_{2,5} & \dots & x_{m,5} \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

(Všimněte si, jak jsou označeny indexy prvků matice $\boldsymbol{X}$.)

Označme $\boldsymbol{Y}$ matici, jejíž j–tý sloupec je vektor rovný součinu matice $\boldsymbol{A}$ a j–tého sloupce matice výroby $\boldsymbol{X}$, $j = 1, 2, \dots m$. Je tedy j–tý sloupec matice $\boldsymbol{Y}$ vektorem spotřeby pro vektor výroby umístěný v j–tém sloupci matice $\boldsymbol{X}$. Píšeme pak

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}.$$

Matice $\boldsymbol{Y}$ je pak typu $(3, m)$.

Tento příklad nás inspiruje k zavedení pojmu součinu dvou matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ touto definicí.

Součin matic – definice

Definice 3.5. (Součin matic)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, k) a $\boldsymbol{B}$ je matice typu (k, n). Potom součinem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ v tomto pořadí je matice $\boldsymbol{C}$ typu (m, n) pro jejíž prvky $c_{ij}, i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$, platí

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}. \tag{3.16}$$

Píšeme pak

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Poznámka 1. Ze vztahu (3.16) je patrno, že pro výpočet prvku c_{ij} matice $\boldsymbol{C}$ (tj. prvku v i–tém řádku a v j–tém sloupci matice $\boldsymbol{C}$ používáme i–tý řádek

$$(a_{i,1}\ a_{i,2}\ \ldots\ a_{i,k}) \tag{3.17}$$

matice $\boldsymbol{A}$ a j–tý sloupec matice $\boldsymbol{B}$

$$\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \ldots \\ b_{k,j} \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Říkáme, že $c_{i,j}$ je skalárním součinem řádkového vektoru (3.17) a sloupcového vektoru (3.18).

Poznámka 2. Vztah (3.16) lze zapsat takto

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{k} a_{i,r} \cdot b_{r,j}.$$

Zde symbol $\sum_{r=1}^{k}$ znamená, že se provádí sečítání členů, které dostaneme tak, že do výrazu za symbolem $\sum$ dosazujeme postupně $r = 1, \ldots, k$.

Poznámka 3. Pro součin dvou matic budeme používat opět symbolu „·“. To není na závadu, neboť ze souvislostí je vždy patrno o jaké násobení se jedná. Budeme tedy psát

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Poznámka 4. Všimněme si, že počet sloupců v matici $\boldsymbol{A}$ je stejný jako je počet řádků v matici $\boldsymbol{B}$. Kdyby tomu tak nebylo, nebylo by možno aplikovat vzorec (3.16).

Příklad 3.12. Určete matici $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ 8 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(3, 4)$ a $\boldsymbol{B}$ je matice typu $(4, 2)$, lze vypočíst součin $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Podle (3.16) dostáváme

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 73 & -6 \\ 17 & -12 \end{pmatrix}.$$

Např. prvek $c_{2,1}$ dostaneme jako skalární součin druhého řádku matice $\boldsymbol{A}$, to jest řádkového vektoru

$$(\ 0 \quad 7 \quad 8 \quad 5\ )$$

a prvního sloupce matice $\boldsymbol{B}$, to jest sloupcového vektoru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem dostáváme

$$c_{2,1} = 0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 5 \cdot (-1) = 73.$$

Poznámka 5. *Obecně matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ není rovna matici $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. Dokonce může nastat případ, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ existuje, avšak $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ neexistuje. Jestliže pro nějaké matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A},$$

potom matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ se nazývají zaměnitelné.

Příklad 3.13. Je-li např. matice $\boldsymbol{A}$ typu $(3, 4)$ a matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(4, 3)$, potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ je matice typu $(3, 3)$. Avšak $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ je matice typu $(4, 4)$. Jsou tedy matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ různých typů a tedy, aniž bychom jejich součiny počítali, vidíme, že jsou navzájem různé. Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nejsou tedy v tomto případě zaměnitelné.

Příklad 3.14. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, takže tyto matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nejsou zaměnitelné.

Příklad 3.15. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 \\ -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Pro tyto matice platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dané matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou tedy zaměnitelné.

Matice transponovaná.

Definice 3.6. (Matice transponovaná)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Potom matici, jejíž i–tý řádek je roven i–tému sloupci matice $\boldsymbol{A}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, nazýváme maticí transponovanou k matici $\boldsymbol{A}$ a budeme ji značit $\boldsymbol{A^T}$. Matice $\boldsymbol{A^T}$ je tedy typu (n, m).

Příklad 3.16. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

O transponované matici součinu dvou matic platí tato věta.

Věta 3.1. (Transponovaná matice součinu matic)

Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou takové matice, že existuje $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Potom platí

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B^T} \cdot \boldsymbol{A^T}.$$

Důkaz: Důkaz přenechávám čtenáři. □

Submatice. Zaveďme si pojem submatice následující definicí.

Submatice

Definice 3.7. (Submatice)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n) a nechť $\boldsymbol{u} = (i_1, \ldots, i_p)$ je takový vektor, že $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m$. Dále nechť $\boldsymbol{v} = (j_1, \ldots, j_r)$ je takový vektor, že $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq n$. Potom matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním řádků s řádkovými indexy, které jsou složkami vektoru $\boldsymbol{u}$ a vypuštěním sloupců matice $\boldsymbol{A}$ se sloupcovými indexy, které jsou složkami vektoru $\boldsymbol{v}$, nazýváme submaticí matice $\boldsymbol{A}$ a značíme ji $\boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$, resp. $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$. Jestliže některý z vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ má jenom jednu složku, stačí uvést tuto složku bez závorek.

Například, jestliže $\boldsymbol{u} = (i)$ a $\boldsymbol{v} = (j)$, lze závorky vypustit a psát pouze $\boldsymbol{A}_{i,j}$. (Tedy $\boldsymbol{A}_{i,j}$ značí submatici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním i–tého řádku a j–tého sloupce.)

Matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že z ní ponecháme jen řádky s řádkovými indexy uvedenými jako složky vektoru $\boldsymbol{u}$ a ponecháme sloupce se sloupcovými indexy uvedenými jako složky vektoru $\boldsymbol{v}$, je submaticí matice $\boldsymbol{A}$. Značíme ji $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Jestliže $\boldsymbol{u} = (1, 2, \ldots, m)$, můžeme místo $\boldsymbol{u}$ psát „:“. Podobně, jestliže $\boldsymbol{v} = (1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, můžeme místo $\boldsymbol{v}$ psát „:“. Je tedy např. $\boldsymbol{A}(2, :)$ submatice obsahující druhý řádek matice $\boldsymbol{A}$ a všechny její sloupce, tedy druhý řádek matice $\boldsymbol{A}$.

Poznámka. *Je nutno si uvědomit rozdílnost zápisu* $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$ *a* $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. *První z těchto submatic vzniká vypuštěním specifikovaných řádků a specifikovaných sloupců z matice* $\boldsymbol{A}$, *druhá submatice vzniká vytvořením submatice ze specifikovaných řádků a sloupců matice* $\boldsymbol{A}$.

Příklad 3.17. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Položme $\boldsymbol{u} = (2)$, $\boldsymbol{v} = (2, 4)$. Potom vypuštěním druhého řádku a druhého a čtvrtého sloupce matice $\boldsymbol{A}$ dostaneme submatici $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_{2,(2,\,4)}$. Je tedy

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Submatici $\boldsymbol{C}$, která obsahuje druhý řádek a druhý a čtvrtý sloupec matice $\boldsymbol{A}$, lze užitím zavedeného označení zapsat jako $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(2, (2, 4))$. Je tedy

$$\boldsymbol{C} = (7,\ -1).$$

3.1.3 Speciální matice a pravidla pro počítání s maticemi

Čtvercová matice. Matici $\boldsymbol{A}$ typu (n, n) budeme nazývat *čtvercovou maticí řádu* n. Místo čtvercová matice řádu n stačí říkat matice řádu n, poněvadž o řádu matice mluvíme jen u čtvercových matic.

Např. matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice řádu 3.

Nulová matice. Matici typu (m, n) budeme nazývat nulovou maticí typu (m, n), jestliže všechny její prvky jsou rovny nule. Budeme ji značit $\mathbf{0}$.

Příklad 3.18. Matice

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nulová matice typu $(3, 4)$.

Hlavní a vedlejší diagonála v matici. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Budeme říkat, že její prvky a_{ii} leží na hlavní diagonále a její prvky a_{ij}, pro něž je $i + j = n + 1$, leží na vedlejší diagonále.

Příklad 3.19. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 8 & 5 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom prvky $(1, -3, 4)$ leží na hlavní diagonále a prvky $(1, 8, 0)$ leží na vedlejší diagonále.

Jednotková matice. Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{E}$ řádu n je jednotková, jestliže všechny prvky na hlavní diagonále jsou rovny číslu 1 a všechny ostatní její prvky jsou rovny 0. Chceme-li zdůraznit její řád n, označíme ji $\boldsymbol{E}_n$.

Příklad 3.20. Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je jednotková matice řádu 3.

Diagonální matice. Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je diagonální, jestliže všechny její nenulové prvky leží na hlavní diagonále.

Příklad 3.21. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je diagonální maticí.

Horní trojúhelníková matice. Řekneme, že čtverová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je horní trojúhelníkovou maticí, jestliže všechny její prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny 0.

Dolní trojúhelníková matice. Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je dolní trojúhelníkovou maticí, jestliže všechny její prvky nad hlavní diagonálou jsou rovny 0.

Horní schodovitá matice. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je horní schodovitá matice, jestliže existuje takové přirozené číslo $h \leq n$, že ke každému i, $i = 1, 2, \ldots, h$, existuje nejmenší s_i tak, že $a_{i,s_i} \neq 0$ a $s_1 < s_2 < \ldots < s_h$ a zbývající řádky $h+1, \ldots, m$ jsou nulové.

Příklad 3.22. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

je horní schodovitou maticí. V tomto příkladě je zřejmě $s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 7$.

Poznámka. Schodovitou matici můžeme definovat ekvivalentně takto. Matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) je horní schodovitá matice, jestliže pro každé dva řádkové indexy p, q matice $\boldsymbol{A}$ platí:

- Nechť p–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nenulový a q–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nulový, potom $p < q$.
- Nechť p–tý a q–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ jsou nenulové a nechť a_{p,s_p} je první nenulový prvek matice $\boldsymbol{A}$ v p–tém řádku a a_{q,s_q} je první nenulový prvek v q–tém řádku matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže $p < q$, potom je $s_p < s_q$.
- Poněvadž budeme mluvit jen o horních schodovitých maticích, můžeme slovo „horní“ vynechávat.

Pravidla pro počítání s maticemi. Pro zavedené operace s maticemi platí vztahy uvedené v následující větě.

Věta 3.2. (Počítání s maticemi)

Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{0}$ jsou matice téhož typu, kde $\boldsymbol{0}$ je matice nulová, a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}, \tag{3.19}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}), \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} + \mathbf{0} &= \boldsymbol{A}, & (3.21)\\ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} &= \mathbf{0}, & (3.22)\\ 1 \cdot \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}, & (3.23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{A}) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{A}, & (3.24)\\ (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{A} &= \alpha \cdot \boldsymbol{A} + \beta \cdot \boldsymbol{A}, & (3.25)\\ \alpha \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \alpha \cdot \boldsymbol{A} + \alpha \cdot \boldsymbol{B}. & (3.26)\end{aligned}$$

Důkaz: Provedeme pouze důkaz vztahu (3.19). Ostatní vztahy se dokazují analogicky.

Prvek v i–tém řádku a j–tém sloupci matice na levé straně vztahu (3.19) je roven $a_{ij} + b_{ij}$ a prvek v i–tém řádku a j–tém sloupci matice na pravé straně vztahu (3.19) je roven $b_{ij} + a_{ij}$ pro všechna i, j. Platí tedy (3.19). □

Věta 3.3. (Počítání s maticemi)

Nechť typy matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\mathbf{0}$ *(nulová matice),* $\boldsymbol{E}$ *(jednotková čtvercová matice) jsou takové, že operace ve vztazích* (3.27)—(3.32) *mají význam. Potom platí*

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{A} &= \mathbf{0},\ \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, & (3.27)\\ \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}, & (3.28)\\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{A}, & (3.29)\\ (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}), & (3.30)\\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}, & (3.31)\\ \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}. & (3.32)\end{aligned}$$

Poznámka. Jestliže pro matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$, nemusí být žádná z matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nulovou maticí. Např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Systémy lineárních algebraických rovnic, úvod

Uvažujme výrobu čtyř výrobků V_1, V_2, V_3, V_4. K jejich výrobě jsou potřebné suroviny S_1, S_2, S_3. Jejich množství v kg potřebné při výrobě jednoho kilogramu každého z výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 je uvedeno v následující tabulce. Ve sloupci označeném písmenem Z jsou uvedena množství Z_1, Z_2, Z_3 jednotlivých surovin S_1, S_2, S_3, která se mají spotřebovat. Budeme se zabývat úlohou určit množství jednotlivých výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 v kg tak, abychom zcela spotřebovali suroviny S_1, S_2, S_3, jejichž množství jsou uvedena v tabulce ve sloupci Z.

	V_1	V_2	V_3	V_4	Z
S_1	$0,0$	$0,4$	$0,3$	$0,6$	5
S_2	$0,2$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	2
S_3	$0,1$	$0,2$	$0,2$	$0,1$	3

Označme postupně x_1, x_2, x_3, x_4 hledaná množství v kg výrobků V_1, V_2, V_3, V_4. K jejich výrobě by se potřebovalo

$$0,4\,x_2 + 0,3\,x_3 + 0,6\,x_4$$

kg surovin S_1,

$$0,2\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,1\,x_3 + 0,1\,x_4$$

kg surovin S_2 a

$$0,1\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,2\,x_3 + 0,1\,x_4$$

kg surovin S_3.

Jestli se mají suroviny S_1, S_2, S_3 plně spotřebovat, musí se výrobky V_1, V_2, V_3, V_4 vyrábět v množstvích x_1, x_2, x_3, x_4, která splňují tyto podmínky:

$$\begin{aligned} 0,4\,x_2 + 0,3\,x_3 + 0,6\,x_4 &= 5 \\ 0,2\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,1\,x_3 + 0,1\,x_4 &= 2 \\ 0,1\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,2\,x_3 + 0,1\,x_4 &= 3. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Každá z těchto podmínek představuje rovnici pro neznámé veličiny x_1, x_2, x_3, x_4. Každá z nich je tvaru

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b. \tag{3.34}$$

V rovnici (3.34) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou (většinou) známá čísla, nazýváme je koeficienty rovnice. Koeficient a_i je koeficient u neznámé x_i. Číslo b nazýváme pravou stranou. Rovnici (3.34) nazýváme lineární algebraickou rovnicí o neznámých $x_1, \ldots, x_n$. Poněvadž v lineární algebře, kterou probíráme, pojednáváme jenom o algebraických rovnicích, budeme užívat zkráceného pojmenování „lineární rovnice“.

Při řešení úloh většinou se pracuje s více rovnicemi. Jestliže koeficienty v těchto rovnicích jsou obecná čísla, můžeme je odlišit od sebe tak, že v i–té rovnici označíme koeficient u x_j např. $a_{i,j}$.

Potom systém (místo systém můžeme říkat též soustava) m lineárních algebraických rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lze zapsat takto:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{3.35}$$

Zde $a_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, značí koeficient u neznámé x_j v i–té rovnici (první index i tedy značí pořadové číslo rovnice, druhý index j označuje složku neznámého vektoru $\boldsymbol{x}$). Číslo b_i nazýváme pravou stranou i–té rovnice.

Označme $\boldsymbol{A}$ matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Nazýváme ji *maticí soustavy systému* (3.35). Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nazýváme *vektorem neznámých* a vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nazýváme *vektorem pravých stran.*

> *Lehce nahlédneme, že systém lineárních algebraických rovnic* (3.35) *lze zapsat užitím tohoto označení jako*
>
> $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{3.37}$$

Skutečně, matice $\boldsymbol{A}$ je typu (m, n), $\boldsymbol{x}$ je typu $(n, 1)$, takže $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je matice typu $(m, 1)$. Rovnice (3.37) znamená, že každá složka vektoru $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je rovna odpovídající složce vektoru $\boldsymbol{b}$. Porovnáním i–tých složek těchto vektorů dostáváme i–tou rovnici systému (3.35).

Matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ přidáním vektoru $\boldsymbol{b}$ jako dalšího sloupce, se nazývá *rozšířenou maticí systému rovnic* (3.35). Značíme ji $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Je tedy

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right).$$

Příklad 3.23. Uvažujme systém lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -12, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & -6. \end{array} \tag{3.38}$$

Označme-li $\boldsymbol{A}$ matici soustavy tohoto systému rovnic, $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých tohoto systému rovnic, je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Matice rozšířená je rovna

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -3 & -12 \\ 4 & 5 & 2 & -6 \end{array}\right).$$

Daný systém rovnic lze tedy zapsat jako

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Zaveďme si nyní pojem řešení systému lineárních rovnic.

Definice 3.8.

Vektor ${}^0\boldsymbol{x}$ nazveme řešením systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

jestliže $\boldsymbol{A} \cdot {}^0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. (To jest, jestliže vektor ${}^0\boldsymbol{x}$ vyhovuje rovnici $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$).

Vraťme se k příkladu 3.23. Označme

$${}^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad {}^3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{b}.$$

Jsou tedy vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ řešením uvažovaného systému (3.38), avšak ${}^3\boldsymbol{x}$ není jeho řešením.

Lehce se přesvědčíme, že vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 - 3 \cdot c \\ -6 + 2 \cdot c \\ c \end{pmatrix}$$

je řešením uvažovaného systému rovnic (3.38) pro každé reálné c.

Příklad 3.24. Uvažujme systém lineárních rovnic

$$x_1 - 2x_2 = 3, \tag{3.39}$$

$$2x_1 - 4x_2 = 5. \tag{3.40}$$

Tento systém rovnic nemá řešení. Skutečně, předpokládejme, že α, β jsou taková čísla, že $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ vyhovovují první rovnici, tedy, že platí

$$\alpha - 2 \cdot \beta = 3.$$

Potom by bylo

$$2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 6$$

a ne $2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 5$, takže $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ nevyhovuje druhé rovnici.

Poznámka. Později budeme řešit obecně otázku, kdy systém lineárních rovnic má jedno řešení, kdy má nekonečně mnoho řešení a kdy nemá vůbec žádné řešení.

3.3 Zavedení pojmu inverzní matice

V lineární algebře má velký význam pojem inverzní matice k dané matici. Tento pojem si nyní zavedeme následující definicí. Později si řekneme něco o existenci inverzní matice k dané matici a seznámíme se s řadou vlastností inverzních matic a naučíme se nalézt k dané matici matici inverzní.

Definice 3.9. (Inverzní matice)

Matice $\boldsymbol{B}$ se nazývá inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}. \tag{3.41}$$

Matici inverzní k matici $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Věta 3.4. (Vlastnosti inverzní matice)

Nechť je dána matice $\boldsymbol{A}$ a nechť k ní existuje matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$. Potom platí

Inverzní matice a její vlastnosti

a) *Matice* $\boldsymbol{A}$ *a matice* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *jsou čtvercové matice téhož řádu.*
b) *Inverzní matice* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *je jednoznačně určena.*
c) *K matici* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *existuje matice inverzní a platí* $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.
d) *Jestliže* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *jsou čtvercové matice téhož řádu* n *a jestli k nim existují matice inverzní* $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$, *potom k matici* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ *existuje matice inverzní a platí* $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$.

Důkaz:

a) Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem (3.41).
b) Nechť $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou inverzní k $\boldsymbol{A}$. Potom

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Odtud

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}.$$

Tedy $\boldsymbol{B}$=$\boldsymbol{C}$.
c) Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem definice inverzní matice.
d) Podle vět 3.2, 3.3 platí

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}.$$

Poněvadž $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, dostáváme odtud

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}.$$

Podobně dokážeme, že

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{E}.$$

Je tedy $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ inverzní maticí k matici $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. □

Uveďme si zde větu o řešitelnosti a jednoznačnosti řešení systému lineárních rovnic, za předpokladu, že k matici soustavy existuje matice inverzní.

Věta 3.5. (Řešení systému $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)

Nechť

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.42}$$

je systém n *lineárních rovnic o* n *neznámých, kde* $\boldsymbol{A}$ *je čtvercová matice soustavy řádu* n *a* $\boldsymbol{b}$ *je vektor pravých stran typu* $(n, 1)$. *Nechť k matici* $\boldsymbol{A}$ *existuje matice inverzní* $\boldsymbol{A}^{-1}$. *Potom systém rovnic* (3.42) *má právě jedno řešení* $\boldsymbol{x}$ *dané vztahem*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{3.43}$$

Důkaz: Jak již bylo dříve dokázáno, inverzní matice $\boldsymbol{A}$ je určena jednoznačně. Vynásobíme-li (3.42) maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva, dostáváme

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b} \tag{3.44}$$

Vzhledem k větě 3.3 platí

$$(\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Poněvadž $(\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, dostáváme odtud (3.43).

Dokažme ještě jednoznačnost řešení. Předpokládejme, že existují dvě řešení ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}$ systému (3.42). Potom

$$\boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Odečtením těchto vztahů dostáváme

$$\boldsymbol{A} \cdot ({}^1\boldsymbol{x} - {}^2\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

Vynásobením tohoto vztahu maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva dostáváme

$${}^1\boldsymbol{x} - {}^2\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

takže

$${}^1\boldsymbol{x} = {}^2\boldsymbol{x}.$$

Má tedy systém $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ právě jedno řešení. $\square$

Příklad 3.25. Nalezněte řešení systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{3.45}$$

jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 78 \end{pmatrix}$$

a znáte-li k matici $\boldsymbol{A}$ matici inverzní

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{4}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{11}{39} \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podle předcházející věty má daný systém právě jedno řešení a to

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{4}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{11}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

V této kapitole popsaný aparát maticového počtu použijeme nyní k matematické formulaci následující úlohy, která patří do úloh lineárního programování. Tyto úlohy jsou velice významnou aplikací lineární algebry. Úlohy tohoto typu se řeší většinou pomocí počítačů a k jejich řešení jsou vypracovány speciální programy. My se nebudeme zde zabývat otázkou jak se řeší, ale jenom otázkou, jak se dá úloha matematicky formulovat a jak se připraví data pro vstupní hodnoty těchto programů.

Příklad 3.26. Čokoládovna vyrábí 5 druhů výrobků. Jsou to výrobky, které označíme V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. K výrobě potřebujeme suroviny tuk, kakao a cukr. Tyto suroviny jsou k dispozici v omezených množstvích, v uvedném pořadí 1500 kg, 300 kg, 450 kg na jeden den. Spotřeba surovin v kilogramech na 1 kg výrobku je dána tabulkou 3.1 na straně 126. Odbytové ceny jednotlivých výrobků v uvedném pořadí jsou 20 Kč, 120 Kč, 100 Kč, 140 Kč, 40 Kč. Úkolem je stanovit takový denní výrobní plán, aby hodnota výroby byla maximální. Výrobky jsou vyráběny technologicky nezávisle na sobě navzájem. Výroba se tedy uskutečňuje ve formě pěti výrobních procesů, které však nejsou navzájem zcela izolované, neboť společně spotřebovávají výrobní zdroje, jeden proces na úkor druhého.

Matematická formulace úlohy. Pro účely matematické formulace zaveďme 5 nezávisle proměnných: x_j nechť označuje množství výrobku V_j v kg, jež bude vyráběno za den, kde $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Hledáme tedy hodnoty $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5,$ vyhovující nerovnostem

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0,4x_2 & + & 0,3x_3 & + & 0,6x_4 & + & 0,6x_5 & \leq & 1500 \\ 0,05x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,1x_3 & + & 0,1x_4 & & & \leq & 300 \\ 0,10x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,1x_4 & + & 0,2x_5 & \leq & 450 \end{array} \tag{3.46}$$

Víme, že při výrobě x_j výrobků V_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, bude odbytová cena výroby rovna

$$z = 20x_1 + 120x_2 + 100x_3 + 140x_4 + 40x_5. \tag{3.47}$$

Naší úlohu můžeme tedy formulovat takto : Nalezněte taková nezáporná čísla x_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, která vyhovují nerovnostem (3.46) a pro něž funkce (3.47) nabývá svého maxima.

Tato úloha je tedy popsána maticí $\boldsymbol{A}$, vektorem $\boldsymbol{m}$ množství surovin a vektorem $\boldsymbol{b}$ odbytových cen výrobků a vektorem $\boldsymbol{x}$ počtu výrobků

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 300 \\ 450 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 20 \\ 120 \\ 100 \\ 140 \\ 40 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.
$$

Potom (3.46) lze zapsat jako jako

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{m} \tag{3.48}
$$

a funkce (3.47) lze zapsat jako

$$
z = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{3.49}
$$

Naši úlohu můžeme vyslovit takto: Nalezněte vektor $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ vyhovující (3.48), který minimalizuje funkci (3.49).

Matice $\boldsymbol{A}$, vektory $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{b}$ a požadavek, že vektor

$$
\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq \boldsymbol{0},
$$

jsou vstupními údaji programu, kterým se výpočet realizuje. Dostáváme

$$
x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1000,\ x_4 = 2000,\ x_5 = 0.
$$

3.4 Základní poznatky z kapitoly 3 a úlohy k procvičení

- Zavedení pojmu matice, typ matice, značení prvků matic, prvky na hlavní a na vedlejší diagonále.
- Relace $<, \leq, >, \geq, =$ mezi maticemi.
- Operace s maticem : sečítání matic, násobení matice reálným číslem.
- Součin dvou matic.
- Zaměnitelné matice.
- Matice transponovaná. Matice transponovaná součinu dvou matic.
- Submatice. Vytváření submatic. Označování submatic.
- Speciální matice. Matice čtvercová, matice nulová, matice jednotková, horní a dolní trojúhelníková matice, horní schodovitá matice.
- Pravidla pro počítání s maticemi.
- Zápis systémů lineárních rovnic v maticové notaci. Co je to matice soustavy, co je to matice rozšířená, co je to vektor pravých stran. Co se rozumí pod pojmem řešení systému lineárních rovnic? Příklady, kdy systém má jedno řešení, kdy nemá žádné řešení, kdy má více řešení.

- Co je to inverzní matice? Vlastnosti inverzních matic.
- Řešení systému lineárních rovnic, jestliže známe matici inverzní k matici soustavy.

Úlohy.

1. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Určete a) její typ, b) matici k ní transponovanou $\boldsymbol{A}^T$, určete matice $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$, c) zjistěte, zda matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^T$ jsou zaměnitelné.

[a) typ (3, 4), b) $\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 & 2 \\ -3 & 10 & -8 & -7 \\ 9 & -8 & 57 & -16 \\ 2 & -7 & -16 & 45 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 30 & 7 & 13 \\ 7 & 54 & -24 \\ 13 & -24 & 30 \end{pmatrix}$, c) nejsou zaměnitelné.]

2. Zapište v maticové notaci systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 &= 4, \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 - 3\,x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Napište matici soustavy a matici rozšířenou.
[Označme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right), \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Potom daný systém rovnic lze psát v maticové notaci takto: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ je matice soustavy a $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ je matice rozšířená.]

3. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a nechť $\boldsymbol{E}_3$ je jednotková matice a λ je proměnná. Napište matici

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}_3.$$

$$[B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{pmatrix}.]$$

4. Zjistěte, zda vektory

$$^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

jsou řešením systému lineárních rovnic z úlohy 2.

[$\boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, tedy $^1\boldsymbol{x}$ je a $^2\boldsymbol{x}$ není řešením uvažovaného systému lineárních rovnic.]

5. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & -12 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Dokažte, že $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$. Jak nazýváme matici $\boldsymbol{B}$?
b) Nalezněte řešení rovnice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ užitím matice $\boldsymbol{B}$. (Obě strany daného systému rovnic násobte zleva maticí $\boldsymbol{B}$.)
[a) $\boldsymbol{B}$ je inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, b) $\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}$, takže $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 & -31 & 18 \end{pmatrix}^T$.]

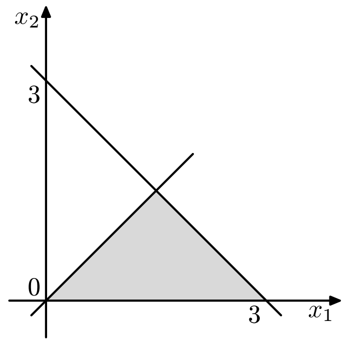
6. Zapište následující systém nerovnic užitím maticové notace

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 3, \\ -x_1 + x_2 &\le 0, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Znázorněte graficky množinu bodů $[x_1, x_2]$, které těmto nerovnicím vyhovují.
[Položme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Potom daný systém nerovnic lze zapsat takto: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$. Hledaná množina je šedá oblast na obr.3.1.]



Obrázek 3.1: Hledaná množina bodů

7. Určete vektory $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{x}$ tak, aby funkce

$$y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4$$

se dala pomocí nich zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{x}.$$

$[\boldsymbol{f} = (2, 3, 4, 1)^T, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T]$