- Lineární prostor, zavedení pojmu
- Lineární kombinace vektorů
- Elementární transformace
- Symbolika použitá pro popis některých výpočtových postupů
- Určení hodnosti matice
- Báze vektorového prostoru
- Skalární součin, norma a vzdálenost ve vektorovém prostoru
- Úvod do analytické geometrie v n-rozměrném prostoru $\mathbb{E}_n$
- Základní poznatky z kapitoly 4 a úlohy k procvičení

4. Lineární prostor

Cíl kapitoly

Cílem studia této kapitoly je

- osvojit si pojem lineárního (vektorového) prostoru, zejména pak pojem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$
- porozumět pojmům: lineární kombinace vektorů, lineární nezávislost vektorů
- zvládnout pojmy: hodnost matice, báze vektorového prostoru, generování vektorového prostoru
- zvládnout pojmy: skalární součin dvou vektorů, norma vektoru, vzdálenost
- umět vyhodnotit přibližnost řešení systému lineárních rovnic
- seznámit se se základy analytické geometrie v prostoru $\mathbb{E}_n$

Časová zátěž

- 15 hodin

4.1 Lineární prostor, zavedení pojmu

V úvodě do maticového počtu jsme se seznámili s pojmem matice a zavedli jsme si operace s maticemi – sečítání dvou matic a násobení matic reálnými čísly. Ukazuje se účelným uvažovat obecnou množinu P, na níž jsou zavedeny dvě operace, které nazveme rovněž sečítáním prvků z P a násobením prvků z P reálnými čísly. Budeme požadovat, aby tyto dvě operace měly jisté vlastnosti (které budeme dále specifikovat). Jsou to vlastnosti (4.1)—(4.8), které na množině P matic téhož typu splňují operace sečítání dvou matic a násobení matic čísly.

Definice 4.1. (Definice vektorového prostoru)

Nechť P je množina. Označme symbolem „$+$“operaci, nazveme ji sečítáním, kterou ke každým dvěma prvkům $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$ je přiřazen prvek $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in P$. Dále označme symbolem „$\cdot$“ operaci, nazveme ji násobením, kterou ke každému prvku $\boldsymbol{a} \in P$ a ke každému reálnému číslu $\alpha \in \mathbb{R}$ je přiřazen prvek $\alpha \cdot \boldsymbol{a} \in P$. Nechť tyto operace mají následující vlastnosti: Jestliže $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in P$, potom

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}. \tag{4.2}$$

Existuje prvek $\mathbf{0} \in P$ tak, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in P$ platí

$$\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \boldsymbol{x}. \tag{4.3}$$

Ke každému $\boldsymbol{x} \in P$ existuje $(-\boldsymbol{x}) \in P$ tak

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}. \tag{4.4}$$

Pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P$ a pro všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} 1.\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}, & (4.5)\\ \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) &= (\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{x}, & (4.6)\\ (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} &= \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}, & (4.7)\\ \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}. & (4.8) \end{aligned}$$

Potom množinu P s těmito operacemi „+“ a „·“ nazýváme lineárním, nebo též vektorovým prostorem. Budeme jej značit $\mathbb{P}$. Prvek $\boldsymbol{0}$ nazýváme jeho *nulovým prvkem.*

Poznámka. Symbol „·“ pro násobení lze vynechat.

Označení. Místo $\boldsymbol{a} \in P$ lze psát $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$. Místo $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ lze psát $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Důsledek 1. *Ze vztahů (4.1), (4.2) vyplývá, že*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) = \\ &= \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} = \\ &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

Není proto nutno psát závorky a stačí psát $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Dokažme např., že $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$. Podle (4.2) je $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$. Podle (4.1) je $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$, takže $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$. Je tedy $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$.

Podobně budeme psát $c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n \cdot {}^n\boldsymbol{x}$, kde ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}$ a $c_1, \ldots, c_n$ jsou libovolné konstanty, aniž bychom psali závorky.

4.1.1 Příklady lineárních prostorů

Lineární prostor $\mathbb{M}^{m,n}$. Označme $M^{m,n}$ množinu všech matic typu (m, n). Symbolem „+“ označme součet dvou prvků (matic) z $M^{m,n}$ definovaný v definici 3.2 a symbolem „·“ označme součin prvku (matice) z $M^{m,n}$ reálným číslem, definovaný v definici 3.3. Potom množina $M^{m,n}$ s těmito operacemi tvoří lineární prostor (vektorový prostor). Budeme jej značit $\mathbb{M}^{m,n}$.

Důkaz: Důkaz je snadný, přenechávám jej čtenáři. Stačí prověřit, že jsou splněny vztahy (4.1)—(4.8). □

Poznámka. Prostor $\mathbb{M}^{n,1}$ je definován na množině uspořádaných n–tic reálných čísel, zapsaných do sloupců a prostor $\mathbb{M}^{1,n}$ je definován na množině uspořádaných n–tic reálných čísel, zapsaných do řádků.

Příklad vektorového prostoru

Věta 4.1. (Aritmetický vektorový prostor $\mathbb{V}_n$)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n–tic reálných čísel (nezáleží na tom jak jsou zapsány, zda do řádků nebo do sloupců), na níž jsou zavedeny operace sečítání „+“ a násobení „.“ takto:
Nechť $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Položme

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c},$$

kde $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ je taková uspořádaná skupina reálných čísel, že

$$c_i = a_i + b_i \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots n.$$

Nechť $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ a α je reálné číslo. Potom

$$\alpha \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d},$$

kde $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ je taková uspořádaná skupina reálných čísel, že

$$d_i = \alpha a_i \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Potom množina $\mathbb{R}^n$ s těmito operacemi sečítání „+“ a násobení „·“ je vektorovým prostorem. Budeme jej nazývat aritmetickým vektorovým prostorem a značit $\mathbb{V}_n$.

Důkaz: Důkaz si proveďte jako cvičení. Stačí prověřit splnění vlastnosti operací sečítání a násobení uvedené v definici (4.1). □

Poznámka 1. Prvky tohoto prostoru budeme nazývat aritmetické vektory, stručně jen vektory a většinou je budeme označovat malými tučně zapsanými písmeny. Nulový prvek prostoru $\mathbb{V}_n$ budeme nazývat nulovým vektorem. Je-li $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{V}_n$, budeme čísla $a_1, \ldots, a_n$ nazývat jeho složkami. Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}_n$ budeme též nazývat n–rozměrným vektorem $\boldsymbol{a}$.

Poznámka 2. Jestliže chceme zdůraznit způsob zápisu složek vektoru do řádku (sloupce), budeme mluvit o řádkovém (sloupcovém) vektoru.

Poznámka 3. Je-li $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, potom číslo $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$ budeme nazývat velikostí vektoru $\boldsymbol{a}$ a značit $|\boldsymbol{a}|$

Poznámka 4. Kdybychom v definici prostoru $\mathbb{V}_n$ uvažovali místo množiny $\mathbb{R}^n$ množinu uspořádaných n–tic reálných čísel, zapsaných do sloupců, dostali bychom prostor $\mathbb{M}^{n,1}$. Kdybychom v definici $\mathbb{V}_n$ uvažovali místo uspořádaných n–tic reálných čísel množinu uspořádaných n–tic reálných čísel, zapsaných do řádků, dostali bychom prostor $\mathbb{M}^{1,n}$.

Poznámka 5. Komu obecná definice vektorového prostoru dělá velké potíže, ať si pod pojmem vektorového prostoru $\mathbb{P}$ představí vždy aritmetický vektorový prostor $\mathbb{V}_n$.

Vektorový prostor volných vektorů. V předcházejícím studiu na gymnáziu jste pracovali s volnými vektory. Zopakujme si napřed ve stručnosti pojem volného vektoru a operace s volnými vektory a to tak, jak se tyto pojmy zavádějí na gymnáziích.

Definice 4.2. (Volné vektory)

Množinu všech nenulových orientovaných úseček, které mají stejný směr a stejnou velikost, nazveme *nenulovým volným vektorem* a množinu všech nulových orientovaných úseček *nulovým volným vektorem.* Každá orientovaná úsečka je pak umístěním příslušného volného vektoru a reprezentuje jej. Volné vektory budeme označovat písmenem se šipkou nahoře, např. $\overrightarrow{a}$. Nulový volný vektor budeme označovat symbolem $\overrightarrow{0}$. Délku každé orientované úsečky, která reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$, budeme nazývat *velikostí volného vektoru* $\overrightarrow{a}$ a budeme ji značit $|\overrightarrow{a}|$.

Příklad vektorového prostoru

Věta 4.2. (Vektorový prostor volných vektorů)

Nechť U je množina volných vektorů. Označme symbolem „+" operaci, nazveme ji sečítáním, kterou ke každým dvěma volným vektorům $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ je přiřazen volný vektor, označme jej $\overrightarrow{c}$, který dostaneme takto: Zvolme libovolný bod A. Nechť $\overrightarrow{AB}$ je orientovaná úsečka, která reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$. Nechť orientovaná úsečka $\overrightarrow{BC}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{b}$, potom orientovaná úsečka $\overrightarrow{AC}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{c}$. Píšeme pak $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$.
Označme dále symbolem „$\cdot$" operaci, nazveme ji násobením, kterou ke každému volnému vektoru $\overrightarrow{a}\in U$ a libovolnému reálnému číslu $\alpha\in\mathbb{R}$ je přiřazen volný vektor, označme jej $\overrightarrow{d}$, který dostaneme takto: Nechť orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$. Označme D takový bod na přímce určené body A, B , že velikost $\left|\overrightarrow{AD}\right|$ orientované

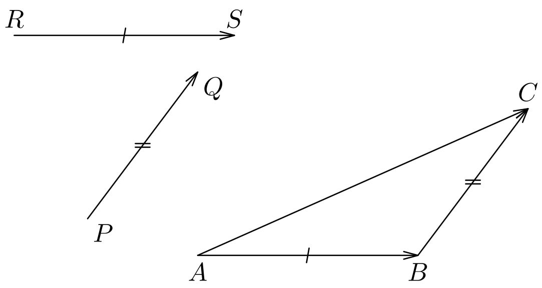
úsečky $\overrightarrow{AD}$ *je*

$$|\alpha| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

a směr $\overrightarrow{AD}$ *je stejný jako směr* $\overrightarrow{a}$*, je-li* $\alpha \geq 0$ *a opačný, je-li* $\alpha < 0$.
Potom množina U *s takto zavedenými operacemi „+“ a „·“ tvoří vektorový prostor ve smyslu definice* 4.1*, to znamená, že jsou splněny vztahy* (4.1)—(4.8)*. Budeme jej značit* $\mathbb{U}$.

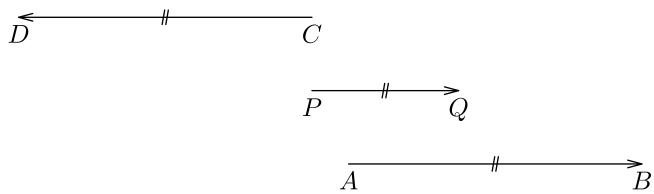
Důkaz: této věty nebudeme uvádět. □

Na obr. 4.1 je znázorněno sečítání dvou volných vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$ a volný vektor $\overrightarrow{b}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{RS}$. Jejich součtem je volný vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AC}$.



Obrázek 4.1: Sečítání volných vektorů

Na obr. 4.2 je znázorněno násobení volného vektoru $\overrightarrow{a}$ reálným číslem. Volný vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$. Volný vektor $\overrightarrow{d} = 2,5 \cdot \overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ a volný vektor $\overrightarrow{e} = -2,5 \cdot \overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CD}$.



Obrázek 4.2: Násobení volného vektoru číslem

Volné vektory v kartézském souřadném systému v rovině. V předcházející definici jsme uvažovali volné vektory nezávisle na souřadném systému, byly uvažovány v tzv. invariantním tvaru.

Pojednejme nyní o prostoru $\mathbb{U}_2$ *volných vektorů v rovině, v níž je zaveden kartézský souřadný systém.* Označme x_1, x_2 souřadné osy kartézského souřadného systémuv rovině.

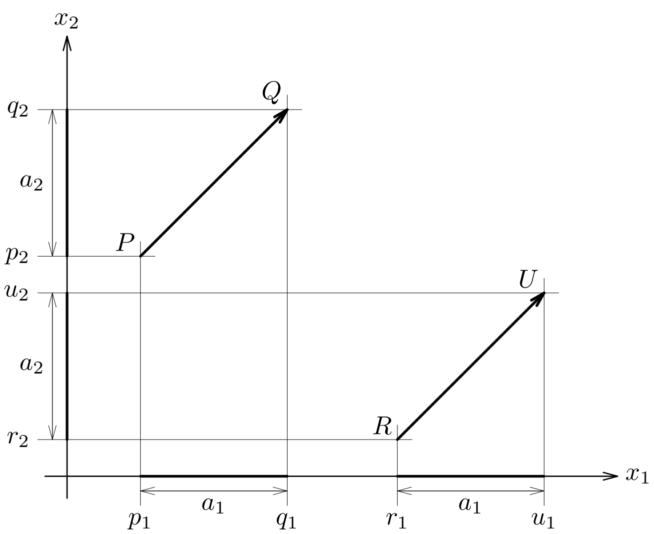
Jak je dobře známo, ke každému bodu P v kartézském souřadném systému roviny je přiřazena uspořádaná dvojice reálných čísel $[p_1, p_2]$. Číslo p_1 nazýváme jeho první souřadnicí a číslo p_2 nazýváme jeho druhou souřadnicí. Naopak, každou uspořádanou dvojici reálných čísel $[p_1, p_2]$ lze považovat za souřadnice právě jednoho bodu P v rovině. Není tedy nutno striktně rozlišovat mezi bodem v rovině a uspořádanou dvojicí reálných čísel. Označme $\mathbb{U}_2$ množinu všech volných vektorů v této rovině s uvedenými operacemi sečítání volných vektorů v rovině a násobení volných vektorů v rovině reálnými čísly.

Uvažujme dvě orientované úsečky $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RU}$ (viz. obr. 4.3), kde

$$P = P[p_1, p_2],\ Q = Q[q_1, q_2],\ R = R[r_1, r_2],\ U = U[u_1, u_2].$$

Každá z těchto orientovaných úseček reprezentuje tentýž volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_2$, když a jenom když

$$q_1 - p_1 = u_1 - r_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = u_2 - r_2. \tag{4.9}$$



Obrázek 4.3: Zobrazení $\mathbb{V}^2$ do $\mathbb{R}^2$

Vztah mezi prostorem $\mathbb{V}_2$ a prostorem volných vektorů v rovině. *Zaveďme si nyní zobrazení $\mathcal{T}$ prostoru $\mathbb{U}_2$ do prostoru $\mathbb{V}_2$ takto: Nechť volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{V}^2$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$, kde*

$$P = P[p_1, p_2],\ Q = Q[q_1, q_2].$$

Označme

$$a_1 = q_1 - p_1,\ a_2 = q_2 - p_2.$$

Potom definujme

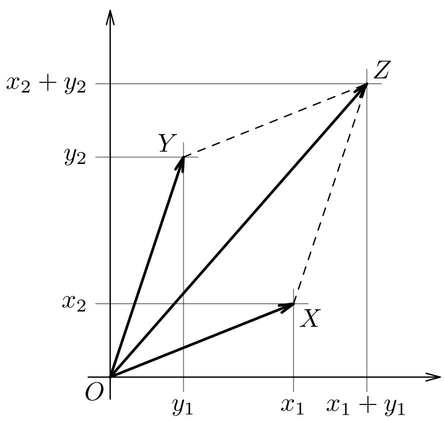
$$\mathcal{T}(\overrightarrow{a}) = \boldsymbol{a}, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{a} = (a_1, a_2).$$

Toto zobrazení nezávisí na volbě orientované úsečky, kterou je volný vektor reprezentován.

Zobrazením $\mathcal{T}$ se ke dvěma různým volným vektorům z $\mathbb{U}_2$ přiřadí dva různé vektory z prostoru $\mathbb{V}_2$. Každý vektor z $\mathbb{V}_2$ je přiřazen k právě jednomu volnému vektoru z $\mathbb{U}_2$. *Zobrazení $\mathcal{T}$ je prosté zobrazení vektorového prostoru $\mathbb{U}_2$ na vektorový prostor $\mathbb{V}_2$.* K zobrazení $\mathcal{T}$ existuje tedy inverzní zobrazení $\mathcal{T}^{-1}$. Tímto zobrazením $\mathcal{T}^{-1}$ se k vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{V}_2$ přiřadí vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_2$, píšeme $\mathcal{T}^{-1}\boldsymbol{a} = \overrightarrow{a}$, přičemž vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován např. orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OA}$, kde $A = A[a_1, a_2]$, $O = O[0, 0]$.

Dokážeme, že takto zavedené zobrazení $\mathcal{T}$ prostoru $\mathbb{U}_2$ do prostoru $\mathbb{V}_2$ zachovává operace „+“ a „·“.

Dokažme napřed, *že zobrazení $\mathcal{T}$ zachovává sečítání.* Nechť tedy $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{U}_2$. Nechť volný vektor $\overrightarrow{x}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OX}$ a volný vektor $\overrightarrow{y}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OY}$, kde $O = [0, 0]$, $X = [x_1, x_2]$, $Y = [y_1, y_2]$. Potom volný vektor $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OZ}$, kde $Z = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$. Viz obr. 4.4.



Obrázek 4.4: Zobrazení zachovává sečítání

Je tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\overrightarrow{x}) &= \boldsymbol{x}, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{V}_2, \\ \mathcal{T}(\overrightarrow{y}) &= \boldsymbol{y}, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{V}_2, \\ \mathcal{T}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \end{aligned}$$

Poněvadž

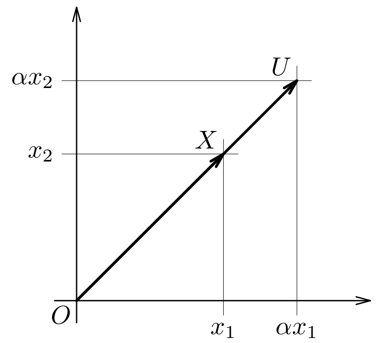
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

platí

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},$$

takže skutečně *zobrazení $\mathcal{T}$ zachovává sečítání.*

Dokažme nyní, že *zobrazení $\mathcal{T}$ zachovává násobení.* Nechť $\overrightarrow{x} \in \mathbb{U}_2$ a nechť α je libovolné reálné číslo. Nechť volný vektor $\overrightarrow{x}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OX}$, kde $O = [0, 0]$, $X = [x_1, x_2]$ a nechť volný vektor $\alpha \cdot \overrightarrow{x}$ je



Obrázek 4.5: Zobrazení zachovává násobení

reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OU}$, kde $U = U[\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2]$. Viz obr. 4.5.

Je tedy

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{x}) = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2),$$
$$\mathcal{T}(\alpha \cdot \overrightarrow{x}) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2).$$

Poněvadž

$$(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) = \alpha \cdot (x_1, x_2) = \alpha \cdot \boldsymbol{x},$$

je

$$\mathcal{T}(\alpha \overrightarrow{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x}.$$

Tedy skutečně *zobrazení $\mathcal{T}$ zachovává násobení.*

Vzhledem k vlastnostem zobrazení $\mathcal{T}$ není tedy nutno dělat striktní rozdíl mezi vektorovým prostorem $\mathbb{V}_2$ a vektorovým prostorem $\mathbb{U}_2$.

Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ si můžete představit jako množinu všech takových orientovaných úseček $\overrightarrow{PQ}$, $P = [p_1,\ p_2]$, $Q = [q_1, q_2]$, v kartézském souřadném systému v rovině, že

$$q_1 - p_1 = a_1 \ \wedge \ q_2 - p_2 = a_2.$$

Volné vektory v kartézském souřadném systému v třírozměrném prostoru. *Uvažujme nyní prostor volných vektorů $\mathbb{U}_3$ ve třírozměrném prostoru, v němž je zaveden kartézský souřadný systém.* Jak je dobře známo, ke každému bodu P je přiřazena uspořádaná trojice reálných čísel $[p_1, p_2, p_3]$. Číslo p_1 nazýváme jeho první souřadnicí, číslo p_2 nazýváme jeho druhou souřadnicí a číslo p_3 nazýváme jeho třetí souřadnicí. Naopak, každou uspořádanou trojici reálných čísel $[p_1, p_2, p_3]$ lze považovat za bod P o souřadnicích $[p_1, p_2, p_3]$ v našem souřadném systému. Není tedy nutno dělat striktní rozdíl mezi pojmem bod v prostoru a uspořádanou trojicí reálných čísel. Uvažujme dvě orientované úsečky $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{UR}$, kde

$$P = P[p_1, p_2, p_3],\ \ Q = Q[q_1, q_2, q_3],$$
$$U = U[u_1, u_2, u_3],\ \ R = R[r_1, r_2, r_3].$$

Každá z těchto dvou orientovaných úseček reprezentuje tentýž volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_3$, když a jenom když

$$q_1 - p_1 = r_1 - u_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = r_2 - u_2 \ \wedge\ q_3 - p_3 = r_3 - u_3. \tag{4.10}$$

Vztah mezi prostorem $\mathbb{V}_3$ a prostorem volných vektorů v třírozměrném prostoru. *Zaveďme si nyní zobrazení $\mathcal{T}$ prostoru $\mathbb{U}_3$ do prostoru $\mathbb{V}_3$ takto*: Nechť volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_3$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$, kde $P = P[p_1, p_2, p_3],\ Q = Q[q_1, q_2, q_3]$. Označme

$$a_1 = q_1 - p_1, \quad a_2 = q_2 - p_2, \quad a_3 = q_3 - p_3.$$

Položme
$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{V}_3.$$

Definujme
$$\mathcal{T}(\overrightarrow{a}) = \boldsymbol{a}. \tag{4.11}$$

Toto zobrazení nezávisí na volbě orientované úsečky, kterou je volný vektor reprezentován. Existuje k němu inverzní zobrazení. Analogicky jako pro rovinný případ se dá dokázat, že toto zobrazení $\mathcal{T}$ zachovává sečítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly.

Není proto nutno striktně rozlišovat mezi prostorem $\mathbb{U}_3$ a $\mathbb{V}_3$.

Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ si můžete tedy představit jako množinu všech takových orientovaných úseček $\overrightarrow{PQ}$, kde $P = [p_1, p_2, p_3]$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$ v kartézském souřadném systému v prostoru, že

$$q_1 - p_1 = a_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = a_2 \ \wedge\ q_3 - p_3 = a_3.$$

S pojmem vektorového prostoru úzce souvisí pojem vektorového podprostoru. Uveďme si jeho definici.

Co je to vektorový prostor

Definice 4.3. (Vektorový podprostor)

Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor definovaný na množině P společně s operacemi sečítání „+“ dvou prvků z P a násobení „·“ prvků z P reálnými čísly. Nechť $M \subseteq P$ a nechť množina M společně s těmito operacemi „$+, \cdot$“ tvoří vektorový prostor $\mathbb{M}$. Potom vektorový prostor $\mathbb{M}$ nazýváme *vektorovým podprostorem vektorového prostoru* $\mathbb{P}$.

Příklad 4.1. Nechť M je taková množina uspořádaných čtveřic reálných čísel $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, že $a_2 = a_4$. Zřejmě $M \subseteq \mathbb{R}^4$. Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, c, a_3, c)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, d, b_3, d)$, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$. Položme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, c + d, a_3 + b_3, c + d)$, $\boldsymbol{y} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot c, \alpha \cdot a_3, \alpha \cdot c)$. Zde operace „$+$“, „$\cdot$“ jsou operace sečítání a násobení v prostoru $\mathbb{V}_4$. Je zřejmé, že $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ patří do množiny M. Proto množina M s těmito operacemi „$+$“, „$\cdot$“ tvoří vektorový prostor $\mathbb{M}$, který je vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{V}_4$.

Poznámka. Naše úvahy o volných vektorech byly založeny na více-méně intuitivně chápaném pojmu orientované úsečky. Cílem pojednání nebyl ovšem prostor volných vektorů. Cílem bylo pouze ukázat souvislosti mezi pojmem volného vektoru, se kterým jste se seznámili na gymnáziu a pojmem vektoru z vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$ pro $n = 2$, resp. $n = 3$.

4.2 Lineární kombinace vektorů

Uvažujme systém lineárních algebraických rovnic

$$a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.12}$$

Při jeho analýze je zapotřebí zjišťovat, zda

- některá z rovnic systému není v rozporu s jinými rovnicemi tohoto systému
- zda každá z rovnic dává nové požadavky na hledaný vektor $x_1, \ldots, x_n$,
- zda požadavek, některou rovnici vyjádřený, je nebo není již obsažen v jiných rovnicích systému.

Tuto problematiku budeme řešit podrobně v kapitole 6.

Každé rovnici systému (4.12) přiřadíme vektor $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}, b_i)$. K řešení nahoře uvedeného problému použijeme dále zaváděné pojmy: lineární kombinace vektorů, lineární nezávislost a lineární závislost vektorů. S těmito pojmy se setkáme i v jiných úvahách.

Lineární kombinace vektorů

Definice 4.4. (Lineární kombinace vektorů)

Nechť ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbb{P}$ a $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla. Potom vektor

$$\boldsymbol{x} = c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x}$$

nazveme *lineární kombinací vektorů* ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$.

Příklad 4.2. Nechť

$$ {}^1\boldsymbol{x} = (2,3,-1),\ \ {}^2\boldsymbol{x} = (5,2,6),\ \ {}^3\boldsymbol{x} = (9,8,4) $$

jsou vektory z prostoru $\mathbb{V}_3$. Ukažme, že vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ je lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$.

Poněvadž

$$ 2 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + {}^2\boldsymbol{x} = 2 \cdot (2,3,-1) + (5,2,6) = (4,6,-2) + (5,2,6) = (9,8,4) = {}^3\boldsymbol{x}, $$

je vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ skutečně lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$.

Lineární nezávislost vektorů

Definice 4.5. (Lin. nezávislost a závislost vektorů) Nechť ${}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x}$ jsou vektory z vektorovém prostoru $\mathbb{P}$. Řekneme, že tyto vektory jsou *lineárně nezávislé*, jestliže

$$ c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0. \tag{4.13} $$

Jestliže vektory ${}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x}$ nejsou lineárně nezávislé, jsou *lineárně závislé*.

Lineární závislost vektorů lze vyjádřit též takto.

Poznámka. Vektory ${}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x}$ z vektorovém prostoru $\mathbb{P}$ jsou lineárně závislé, jestliže existují taková čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$, z nichž alespoň jedno je různé od 0, že $c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Příklad 4.3. Ukažme, že vektory ${}^1\boldsymbol{x} = (1,4,-4)$, ${}^2\boldsymbol{x} = (1,2,0)$, ${}^3\boldsymbol{x} = (1,5,-2)$ z prostoru $\mathbb{V}_3$ jsou lineárně nezávislé. Skutečně, ze vztahu

$$ c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + c_2 \cdot {}^2\boldsymbol{x} + c_3 \cdot {}^3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} $$

dostáváme

$$ c_1 \cdot (1,4,-4) + c_2 \cdot (1,2,0) + c_3 \cdot (1,5,-2) = (0,0,0), $$

to jest

$$ (c_1 + c_2 + c_3, 4c_1 + 2c_2 + 5c_3, -4c_1 + 0c_2 - 2c_3) = (0,0,0). $$

Aby rovnost mezi těmito vektory platila, musí koeficienty c_1, c_2, c_3 vyhovovat systému lineárních rovnic

$$ \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, && (4.14)\\ 4c_1 + 2c_2 + 5c_3 &= 0, && (4.15)\\ -4c_1 + 0c_2 - 2c_3 &= 0. && (4.16) \end{aligned} $$

Jak se lehce přesvědčíme, má systém rovnic (4.14)—(4.16) jediné řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy dané vektory lineárně nezávislé.

Poznámka. a) Vektor $\mathbf{0}$ je lineárně závislý, neboť $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Vektory ${}^{1}\boldsymbol{x}, \dots, {}^{n}\boldsymbol{x}$, $n > 1$, jsou lineárně závislé, když a jenom když alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních z nich. (Dokažte!)

Příklad 4.4. Vektory

$$(1,2,3),\ (-1,2,0),\ (1,6,6)$$

jsou lineárně závislé. Lehce nahlédneme, že

$$2 \cdot (1,2,3) + (-1,2,0) = (1,6,6).$$

Vektor $(1,6,6)$ jsme vyjádřili jako lineární kombinaci zbývajících dvou vektorů.

Zaveďme si nyní pojem hodnosti skupiny n vektorů následující definicí. Hodnost skupiny vektorů má zásadní význam při vyšetřování řešitelnosti systému lineárních rovnic.

Hodnost skupiny vektorů

Definice 4.6. (Hodnost skupiny vektorů)

Nechť $\boldsymbol{X} = ({}^{1}\boldsymbol{x}, \dots, {}^{n}\boldsymbol{x})$, je skupina n vektorů z prostoru $\mathbb{P}$. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině $\boldsymbol{X}$ nazveme *hodností skupiny vektorů* $\boldsymbol{X}$. Budeme ji značit $h(\boldsymbol{X})$.

Hodnost matice

Poznámka. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m,n). *Na matici* $\boldsymbol{A}$ *se můžeme dívat jako na uspořádanou* m*–tici řádkových vektorů z vektorového prostoru* $\mathbb{V}_n$*, resp. jako na uspořádanou* n*–tici sloupcových vektorů z vektorového prostoru* $\mathbb{V}_m$. Aplikováním definice hodnosti na řádky matice dostáváme *řádkovou hodnost matice* a aplikováním definice hodnosti na sloupce matice dostáváme *sloupcovou hodnost matice. Později ukážeme, že pro každou matici je sloupcová hodnost rovna její řádkové hodnosti.* Pokud to nedokážeme a výslovně neřekneme o jakou hodnost se jedná, budeme mít na mysli řádkovou hodnost.

Příklad 4.5. Určete řádkovou hodnost matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Označme ${}^{1}\boldsymbol{x}, {}^{2}\boldsymbol{x}, {}^{3}\boldsymbol{x}$ postupně první, druhý a třetí řádek matice $\boldsymbol{A}$. Tedy

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, && (4.17)\\
{}^{2}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, && (4.18)\\
{}^{3}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}. && (4.19)
\end{aligned}
$$

Zřejmě vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ je lineárně závislý na vektorech ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$, neboť

$$ {}^3\boldsymbol{x} = {}^1\boldsymbol{x} + {}^2\boldsymbol{x} $$

a vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ jsou lineárně nezávislé. Skutečně, kdyby tyto vektory byly lineárně závislé, byl by jeden z nich násobkem druhého. To znamená, existovalo by takové číslo α, že by ${}^2\boldsymbol{x} = \alpha {}^1\boldsymbol{x}$ to jest, platilo by

$$ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. $$

Takové číslo α však evidentně neexistuje. Vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ jsou tedy lineárně nezávislé. Tedy mezi vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$, ${}^3\boldsymbol{x}$ jsou právě dva lineárně nezávislé vektory. Řádková hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je tedy rovna 2.

Úkol. Dokažte si, že horní schodovitá matice má řádkovou hodnost rovnu počtu jejich nenulových řádků.

Poznámka. Hodnost matice budeme hledat později jejím převodem na horní schodovitou matici o stejné hodnosti pomocí elementárních transformací, o kterých teď pojednáme.

4.3 Elementární transformace

Úvodem začněme s několika příklady. Uvažujme množinu všech matic typu $(3, 4)$. Na každou matici z této množiny můžeme nahlížet jako na množinu uspořádaných vektorů – řádků. Nechť např.

$$ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. \tag{4.20} $$

Utvořme nyní matici $\boldsymbol{B}$ typu $(3, 4)$ tak, že její druhý řádek je roven druhému řádku matice $\boldsymbol{A}$ násobenému číslem (-3) a ostatní řádky matice $\boldsymbol{B}$ jsou rovny odpovídajícím řádkům matice $\boldsymbol{A}$. Takto vzniklá matice je matice

$$ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -15 & -18 & -21 & -24 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. $$

Budeme říkat, že matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ transformací $\mathcal{H}1(2, -3)$. Budeme psát $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}1(2, -3)\boldsymbol{A}$.

Obecně, nechť matice $\boldsymbol{A}$ je typu (m, n) a α je libovolné reálné číslo, i je libovolné přirozené číslo $1 \le i \le m$. *Označme $\boldsymbol{B}$ tu matici typu (m, n), jejíž i–tý řádek je roven α–násobku i–tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a její ostatní řádky jsou stejné jako odpovídající řádky matice $\boldsymbol{A}$. Potom řekneme, že matice $\boldsymbol{B}$*

vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ *transformací* $\mathcal{H}1(i,\alpha)$. Píšeme pak

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}.$$

Nechť tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Potom $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \alpha \cdot a_{i,1} & \dots & \alpha \cdot a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Popišme nyní další transformaci matice $\boldsymbol{A}$ typu (m,n). Vraťme se opět k matici (4.20). Nechť tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Utvořme nyní matici $\boldsymbol{C}$ typu $(3,4)$ tak, že její třetí řádek je roven součtu prvního a třetího řádku matice $\boldsymbol{A}$ a ostatní řádky matice $\boldsymbol{C}$ jsou rovny odpovídajícím řádkům matice $\boldsymbol{A}$. O takto vzniklé matici $\boldsymbol{C}$ řekneme, že vznikla transformací $\mathcal{H}2(1{,}3)$ matice $\boldsymbol{A}$. Budeme psát $\boldsymbol{C} = \mathcal{H}2(1{,}3)\boldsymbol{A}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

Obecně, nechť matice $\boldsymbol{A}$ je typu (m,n) a i, j, $i \neq j$, jsou libovolná přirozená čísla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$. *Označme* $\boldsymbol{C}$ *tu matici typu* (m,n), *jejíž* j*–tý řádek je roven součtu* i*–tého a* j*–tého řádku matice* $\boldsymbol{A}$ *a ostatní řádky jsou stejné jako odpovídající řádky matice* $\boldsymbol{A}$. Potom řekneme, že matice $\boldsymbol{C}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ transformací $\mathcal{H}2(i,j)$. Píšeme pak

$$\boldsymbol{C} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{A}.$$

Nechť tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Potom $\boldsymbol{C} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} + a_{i,1} & \dots & a_{j,n} + a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Vraťme se opět k matici (4.20) a vytvořme z ní matici transformací složenou ze dvou transformací $\mathcal{H}2(1,2)$, $\mathcal{H}1(2,-3)$. Nechť tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Označme $\boldsymbol{F} = \mathcal{H}2(1,2)\boldsymbol{A}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Na takto vzniklou matici $\boldsymbol{F}$ aplikujme transformaci $\mathcal{H}1(2,-3)$. Položme $\boldsymbol{G} = \mathcal{H}1(2,-3)\boldsymbol{F}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -18 & -24 & -30 & -36 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

O matici $\boldsymbol{G}$ řekneme, že vznikla postupným aplikováním transformací $\mathcal{H}2(1,2)$, $\mathcal{H}1(2,-3)$. (Jde o složené zobrazení).

Na matici typu (n,k) se můžeme dívat jako na uspořádanou skupinu n řádků – vektorů. V dalším budeme uvažovat o uspořádaných skupinách n vektorů vektorovém prostoru $\mathbb{P}$, který blíže nespecifikujeme.

Zavedeme si transformace $\mathcal{H}1, \mathcal{H}2$ těchto uspořádanch skupin vektorů analogickým způsobem, jak jsme to zavedli pro matice – uspořádané skupiny řádků matic daného typu.

Poznámka. Komu dělá potíže tato abstrakce, ať uvažuje řádky matic daného typu.

Později si ukážeme jak využít tyto transformace např. při řešení těchto úloh:

- Určit hodnost matice.
- Výpočítat hodnotu determinantu matice.
- Řešit systémy lineárních algebraických rovnic.

Napřed definujme základní elementární transformace $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$. Transformace $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$ a všechny z nich složené transformace budeme nazývat elementárními.

Zavedení pojmu elementární transformace

Definice 4.7. (Základní elementární transformace)

Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. Nechť $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x})$ je uspořádaná skupina n vektorů z $\mathbb{P}$. Definujme transformace (zobrazení) $\mathcal{H}1(i,\alpha)$, $\mathcal{H}2(i,j)$ takto:

Transformace $\mathcal{H}1(i,\alpha)$. Transformací

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X} \tag{4.22}$$

se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \dots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$ takto:

$${}^k\boldsymbol{y} := {}^k\boldsymbol{x} \quad \text{pro} \quad k \neq i \quad \text{a} \quad {}^i\boldsymbol{y} := \alpha \cdot {}^i\boldsymbol{x}. \tag{4.23}$$

(To znamená, že vektor ${}^i\boldsymbol{x}$ násobíme číslem α a ostatní vektory ponecháme bez změny.)

Transformace $\mathcal{H}2(i,j)$. Transformací

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X} \tag{4.24}$$

se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \dots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$ takto:

$${}^k\boldsymbol{y} := {}^k\boldsymbol{x} \quad \text{pro} \quad k \neq j \quad \text{a} \quad {}^j\boldsymbol{y} := {}^j\boldsymbol{x} + {}^i\boldsymbol{x}.$$

(To znamená, že k j–tému vektoru ${}^j\boldsymbol{x}$ se přičte i–tý vektor ${}^i\boldsymbol{x}$ a ostatní vektory se ponechají bez změny.)

Věta 4.3. (Odvození elementární transformace)

Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. Nechť $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x})$ je uspořádná skupina n vektorů z $\mathbb{P}$. Definujme transformace (zobrazení) $\mathcal{H}3(i,j)$, $\widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)$, $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)$, $i \neq j$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ takto:

***Transformace** $\mathcal{H}3(i,j)$**.** Transformací*

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{X}, \quad i \neq j, \tag{4.25}$$

se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí taková uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \ldots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$, že

$${}^i\boldsymbol{y} := {}^j\boldsymbol{x},\ {}^j\boldsymbol{y} := -{}^i\boldsymbol{x},\ {}^k\boldsymbol{y} := {}^k\boldsymbol{x} \quad \text{pro} \quad k \neq i,j. \tag{4.26}$$

(To znamená, že skupina vektorů $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ vynásobením i–tého vektoru číslem (-1) a následnou výměnou i–tého a j–tého vektoru.)

***Transformace** $\widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)$**.** Transformací*

$$\boldsymbol{Y} = \widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)\boldsymbol{X}, \quad i \neq j, \tag{4.27}$$

se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí taková uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \ldots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$, že

$${}^i\boldsymbol{y} := {}^j\boldsymbol{x},\ {}^j\boldsymbol{y} := {}^i\boldsymbol{x},\ {}^k\boldsymbol{y} := {}^k\boldsymbol{x} \quad \text{pro} \quad k \neq i,j. \tag{4.28}$$

(To znamená, že skupina vektorů $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ výměnou i–tého a j–tého vektoru.)

***Transformace** $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)$, $i \neq j$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$**.** Transformací*

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{X}, \quad i \neq j, \quad \beta \neq 0 \tag{4.29}$$

se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí taková uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \ldots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$, že

$$ {}^{j}\boldsymbol{y} := \alpha\, {}^{i}\boldsymbol{x} + \beta\, {}^{j}\boldsymbol{x}, \quad \text{a} \quad {}^{k}\boldsymbol{y} = {}^{k}\boldsymbol{x}, \quad k \neq j. $$

(To znamená, že skupina vektorů $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ tak, že k β–násobku j–tého vektoru se připočte α–násobek i–tého vektoru a ostatní vektory se ponechají bez změny.)

Potom transformace $\mathcal{H}3(i,j)$, $\widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)$, $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)$, $i \neq j$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ jsou elementární.

Důkaz: *Dokažme, že transformace $\mathcal{H}3(i,j)$ je elementární*, to znamená, že je vytvořena postupným aplikováním elementárních transformací $\mathcal{H}1(i,\alpha)$, $\mathcal{H}2(i,j)$.

V popisu budeme sledovat jenom vektory na i–té a na j–té pozici v uspořádané skupině vektorů. Schematicky lze tento postup znázornit takto

$$ \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{H}2(j,i)]{} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} + {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{H}1(j,-1)]{} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} + {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ -{}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{H}2(i,j)]{} $$

$$ \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} + {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{H}1(j,-1)]{} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} + {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ -{}^{i}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{H}2(j,i)]{} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ -{}^{i}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} $$

Je tedy skutečne transformace $\mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{X}$ elementární.

Transformace $\widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)$ vznikne postupným aplikováním transformací $\mathcal{H}3(i,j)$ a $\mathcal{H}1(j,-1)$. Je tedy elementární.

Ukažme, že transformace $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)$ je elementární, to znamená, že se dá vytvořit postupným aplikováním transformací $\mathcal{H}1(i,\alpha), \mathcal{H}2(i,j)$. Skutečně, položme $\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{X}$. Skupina $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ provedením těchto postupných elementárních transformací:

$$ {}^{1}\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}, \quad {}^{2}\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(j,\beta)\,{}^{1}\boldsymbol{Y}, $$

$$ {}^{3}\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}2(i,j)\,{}^{2}\boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,1/\alpha)\,{}^{3}\boldsymbol{Y}. $$

□

Hodnost skupiny vektorů

Zabývejme nyní se otázkou porovnání hodnosti skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ z $\mathbb{P}$ a hodnosti skupiny vektorů $\boldsymbol{Y}$ z $\mathbb{P}$, která vznikla ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ elementárními transformacemi. Ukážeme, že tyto hodnosti jsou stejné.

Věta 4.4. *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{X}$ je uspořádaná skupina m vektorů z $\mathbb{P}$*

$$\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}).$$

Označme $\boldsymbol{Y}$ uspořádanou skupinu m vektorů z $\mathbb{P}$, definovanou vztahem

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}, \quad \textit{kde} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0, \quad 1 \leq i \leq m\ .$$

Potom uspořádané skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ mají stejnou hodnost.

Důkaz: Označme $h = h(\boldsymbol{X})$ hodnost uspořádané skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$. Dokažme napřed, že $h(\boldsymbol{Y}) \geq h$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že ve skupině $\boldsymbol{X}$ jsou vektory

$$({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}) \tag{4.30}$$

lineárně nezávislé a ostatní vektory $({}^{h+1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x})$ jsou jejich lineárními kombinacemi. Předpokládejme, že

$$1 \leq i \leq h.$$

Transformací $Y = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}$ se vektor ${}^k\boldsymbol{x}$ transformuje na vektor ${}^k\boldsymbol{y}$, kde

$${}^k\boldsymbol{y} = {}^k\boldsymbol{x} \quad \text{pro každé} \quad k \neq i, \quad {}^i\boldsymbol{y} = \alpha \cdot {}^i\boldsymbol{x}. \tag{4.31}$$

Položme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{y} + \ldots + c_i \cdot {}^i\boldsymbol{y} + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{y} = 0. \tag{4.32}$$

Vzhledem k (4.31) lze tento vztah přepsat na tvar

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_i\alpha \cdot {}^i\boldsymbol{x} + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0. \tag{4.33}$$

Poněvadž vektory (4.30) jsou lineárně nezávislé, je

$$c_1 = 0, \ldots, c_i\alpha = 0, \ldots, c_h = 0.$$

Poněvadž $\alpha \neq 0$, dostáváme odtud

$$c_k = 0 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, h,$$

takže vektory

$${}^1\boldsymbol{y}, {}^2\boldsymbol{y}, \ldots, {}^h\boldsymbol{y}$$

jsou lineárně nezávislé. Je tedy hodnost $h(\boldsymbol{Y}) \geq h$. Dospěli jsme k závěru, že pro $1 \leq i \leq h$ je

$$h(\boldsymbol{X}) \leq h(\mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}) = h(\boldsymbol{Y}). \tag{4.34}$$

Předpokládejme nyní, že
$$h < i \leq m.$$
Transformací $Y = \mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{X}$ se vektory (4.30) nemění, takže
$$h(\boldsymbol{Y}) \geq h(\boldsymbol{X}).$$

Dospěli tedy k dílčímu výsledku, že
$$h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{Y}) = h(\mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{X}, \quad \text{pro všechna } i, \alpha \neq 0. \tag{4.35}$$
Poněvadž
$$\boldsymbol{X} = \mathcal{H}1(i, 1/\alpha)\boldsymbol{Y},$$
je podle (4.35)
$$h(\boldsymbol{Y}) \leq h(\mathcal{H}1(i, 1/\alpha)\boldsymbol{Y} = h(\boldsymbol{X}). \tag{4.36}$$
Ze vztahů (4.35),(4.36) dostáváme, že
$$h(\boldsymbol{X}) = h(\boldsymbol{Y}).$$
□

Věta 4.5. *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{X}$ je uspořádaná skupina m vektorů z $\mathbb{P}$*
$$\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}).$$
Označme $\boldsymbol{Z}$ uspořádanou skupinu vektorů z $\mathbb{P}$ definovanou vztahem
$$\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i, j)\boldsymbol{X},$$
kde
$$i, j \in \{1, \ldots, m\}, \quad i \neq j.$$
Potom $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Z}$ mají stejnou hodnost.

Důkaz: Označme h hodnost $\boldsymbol{X}$, tedy $h = h(\boldsymbol{X})$. Poněvadž hodnost $\boldsymbol{X}$ není závislá na pořadí vektorů, bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že ve skupině $\boldsymbol{X}$ je prvních h vektorů lineárně nezávislých a zbývající vektory jsou jejich lineárními kombinacemi. Předpokládáme tedy, že vektory
$${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x} \tag{4.37}$$
jsou lineárně nezávislé a vektory
$${}^{h+1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x} \tag{4.38}$$
jsou jejich lineárními kombinacemi.
Napřed dokážeme, že platí nerovnost
$$h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{Z}). \tag{4.39}$$
Poněvadž $h(\boldsymbol{X}) = h$, nerovnost (4.39) bude dokázána, nalezneme-li v $\boldsymbol{Z}$ h lineárně nezávislých vektorů. Budeme je hledat v následujících případech pro různá umístění vektorů ${}^i\boldsymbol{x}, {}^j\boldsymbol{x}$ v uspořádané skupině $\boldsymbol{X}$.

1° Předpokládejme, že

$$i \leq h, \quad j \leq h. \tag{4.40}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $i < j$. Potom

$$\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^i\boldsymbol{x}, \ldots, {}^j\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}). \tag{4.41}$$

Transformací $\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$ se vektory (4.41) transformují na vektory

$$\boldsymbol{Z} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^i\boldsymbol{x}, \ldots, ({}^i\boldsymbol{x} + {}^j\boldsymbol{x}), \ldots, {}^h\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}). \tag{4.42}$$

Dokažme, že prvních h vektorů v $\boldsymbol{Z}$ je lineárně nezávislých. Položme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + \ldots + c_i \cdot {}^i\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot ({}^i\boldsymbol{x} + {}^j\boldsymbol{x}) + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0. \tag{4.43}$$

Úpravou dostáváme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + (c_j + c_i) \cdot {}^i\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot {}^j\boldsymbol{x} + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0. \tag{4.44}$$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů (4.37) dostáváme odtud systém rovnic

$$c_j + c_i = 0, \quad c_k = 0 \quad \text{pro } k = 1, \ldots h, \quad k \neq i. \tag{4.45}$$

Odtud plyne zejména $c_j = 0$. Poněvadž $c_i + c_j = 0$ je i $c_i = 0$. Je tedy $c_1 = 0, \ldots, c_h = 0$, takže prvních k vektorů v (4.42) je lineárně nezávislých.

2° Předpokládejme, že

$$1 \leq j \leq h < i.$$

V tomto případě je

$$\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^j\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}, \ldots, {}^i\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}).$$

Tyto vektory se transformují transformací $\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$ na systém vektorů

$$\boldsymbol{Z} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, ({}^j\boldsymbol{x} + {}^i\boldsymbol{x}), \ldots, {}^h\boldsymbol{x}, \ldots, {}^i\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}). \tag{4.46}$$

Položme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot ({}^j\boldsymbol{x} + {}^i\boldsymbol{x}) + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0. \tag{4.47}$$

Vektor ${}^i\boldsymbol{x}$ je dle předpokladu lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}$, takže existují taková čísla $\beta_1, \ldots \beta_h$, že

$${}^i\boldsymbol{x} = \beta_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + \beta_j \cdot {}^j\boldsymbol{x} + \ldots + \beta_h \cdot {}^h\boldsymbol{x}. \tag{4.48}$$

Dosaďme za ${}^i\boldsymbol{x}$ do (4.47). Dostáváme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot ({}^j\boldsymbol{x} + \beta_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + \beta_j \cdot {}^j\boldsymbol{x} + \ldots + \beta_h \cdot {}^h\boldsymbol{x}) + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0.$$

Po úpravě dostáváme

$$(c_1 + c_j \cdot \beta_1) \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot (1 + \beta_j) \cdot {}^j\boldsymbol{x} + \ldots + (c_h + c_j \cdot \beta_h) \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0. \tag{4.49}$$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}$ je

$$c_1 + c_j\beta_1 = 0, \quad \ldots, c_j \cdot (1+\beta_j) = 0, \ldots, (c_h + c_j \cdot \beta_h) = 0. \qquad (4.50)$$

Mohou nastat dva případy: a) $\beta_j \neq -1$, b) $\beta_j = -1$.
a) to jest $\beta_j \neq -1$. Ze vztahu $c_j \cdot (1+\beta_j) = 0$ vyplývá, že c_j=0. Z (4.50) tedy dostáváme $c_k = 0$ pro $k = 1, \ldots h$. Jsou tedy vektory (4.47) lineárně nezávislé, takže $h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{Y})$.
b) Nechť $\beta_j = -1$. V tomto případě ze vztahu $c_j \cdot (1+\beta_j) = 0$ vyplývá, že c_j může být libovolné číslo. Vektory (4.47) jsou tedy v tomto případě lineárně závislé. Ukážeme, že v tomto případě jsou však vektory

$${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{j-1}\boldsymbol{x}, {}^{j+1}\boldsymbol{x}, \ldots, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}, {}^i\boldsymbol{x}. \qquad (4.51)$$

lineárně nezávislé. Položme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_{j-1} \cdot {}^{j-1}\boldsymbol{x} + c_{j+1} \cdot {}^{j+1}\boldsymbol{x} + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} + c_i \cdot {}^i\boldsymbol{x} = 0. \quad (4.52)$$

Dosadíme-li sem za ${}^i\boldsymbol{x}$ vztah (4.48) pro $\beta_j = -1$, dostáváme po úpravě

$$\begin{aligned}(c_1 + c_i \cdot \beta_1) \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + (c_{j-1} + c_i \cdot \beta_{j-1}) \cdot {}^{j-1}\boldsymbol{x} +\\ +(c_{j+1} + c_i \cdot \beta_{j+1}) \cdot {}^{j+1}\boldsymbol{x} + \ldots\\ \ldots + (c_h + c_i \cdot \beta_h) \cdot {}^h\boldsymbol{x} + \ldots - c_i \cdot {}^j\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.\end{aligned} \qquad (4.53)$$

Poněvadž vektory (4.37) jsou lineárně nezávislé, dostáváme z (4.53) tento systém rovnic:

$$c_i = 0, \quad c_k + c_i \cdot \beta_k = 0 \qquad (4.54)$$

pro $k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, h$. Odtud dostáváme, že

$$c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_h, c_i$$

jsou rovny nule. Jsou tedy vektory (4.51) skutečně lineárně nezávislé.

3° Nechť $j > h$. V tomto případě se vektory (4.37) transformací $\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$ nezměnily, jsou tedy lineárně nezávislými. Je tedy i v tomto případě $h(\boldsymbol{Z}) \geq h(\boldsymbol{X})$.
Zatím jsme dospěli k tomuto výsledku. Nechť $\boldsymbol{X}$ je uspořádaná skupina m vektorů. Potom uspořádaná skupina m vektorů $\boldsymbol{Y}$

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \alpha \neq 0$$

má stejnou hodnost jako $\boldsymbol{X}$ a uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Z}$

$$\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$$

má hodnost, pro níž platí $h(\boldsymbol{Z}) \geq h(\boldsymbol{X})$. Je-li tedy $\boldsymbol{U}$ uspořádaná skupina vektorů, vytvořena postupným aplikováním těchto dvou tranformací (elementárních transformací), má hodnost $h(\boldsymbol{U})$ pro níž platí

$$h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{U}). \qquad (4.55)$$

Tohoto poznatku využijeme k důkazu, že $h(\boldsymbol{Z}) \geq h(\boldsymbol{U})$. Nechť tedy $\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$. Položme

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{H}1(i,\,-1)\boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{B} = \mathcal{H}2(i,\,j)\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{U} = \mathcal{H}1(i,\,-1)\boldsymbol{B}.$$

Potom $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}$. Tedy $\boldsymbol{X}$ jsme získali z $\boldsymbol{Z}$ elementární transformací, takže podle toho co jsme uvedli, je

$$h(\boldsymbol{X}) \geq h(\boldsymbol{Z}). \tag{4.56}$$

Odtud a ze vztahu $h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{Z})$ dostáváme, že

$$h(\boldsymbol{X}) = h(\boldsymbol{Z}),$$

což je vztah, který jsme chtěli dokázat. □

Věta 4.6.

Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{X}$ je uspořádaná skupina m vektorů z $\mathbb{P}$

$$\boldsymbol{X} = ({}^{1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{m}\boldsymbol{x}).$$

Označme $\boldsymbol{Y}$ uspořádanou skupinu m vektorů z $\mathbb{P}$, která vznikla z $\boldsymbol{X}$ elementární transformací. Potom skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ mají stejnou hodnost.

Důkaz: Poněvadž každá elementární transformace vzniká postupným aplikováním základních elementárních transformací, je tvrzení věty bezprostředním důsledkem vět (4.4), (4.6). □

Na základě těchto výsledků můžeme vyslovit následující větu.

Elementární transformace matic

Věta 4.7. (O hodnosti matice)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m,n). Potom

- *Matice $\mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}$, kde $\alpha \neq 0$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její i–tý řádek vynásobíme číslem α a ostatní řádky ponecháme beze změny*
- *Matice $\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{A}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že k jejímu j–tému řádku přičteme její i–tý řádek a ostatní řádky ponecháme beze změny.*

- *Matice $\mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{A}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že vzájemně vyměníme její i–tý a j–tý řádek a po provedení této výměny násobíme j–tý řádek číslem (-1) a ostatní řádky ponecháme beze změny.*
- *Matice $\widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)\boldsymbol{A}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že vzájemně vyměníme její i–tý a j–tý řádek a ostatní řádky ponecháme beze změny.*
- *Matice $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{A}$, kde $\beta \neq 0$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její j–tý řádek nahradíme součtem $\beta-$ násobku jejího $j-$tého řádku a $\alpha-$násobku jejího $i-$tého řádku a ostatní řádky ponecháme bez změny.*

Postupným aplikováním těchto transformací na matici $\boldsymbol{A}$ dostaneme matici, která má stejnou řádkovou hodnost jako matice $\boldsymbol{A}$.

Sloupcovou hodnost matice určíme podle analogické věty, která vznikne z věty 4.7 tak, že v ní slova „řádek“ nahradíme slovy „sloupec“.

4.4 Symbolika použitá pro popis některých výpočtových postupů

V popisu výpočtových postupů budeme používat jen konstant, nebudeme používat symbolů proměnných, jimž ještě nebyla přiřazena hodnota z jejich oborů.

Pro přiřazení budeme používat symbol „:=“. Jestliže tedy např. x je proměnná s oborem reálných čísel, pak zápisem

$$x := 5$$

přiřazujeme proměnné x hodnotu „5“. V dalším označuje x číslo 5 až do doby, kdy této proměnné x nepřiřadíme jinou hodnotu. Chceme-li hodnotu proměnné x změnit, např. zvětšit o číslo 8, použijeme zápisu

$$x := x + 8. \tag{4.57}$$

Tento zápis můžeme číst např. takto: K aktuální hodnotě proměnné x přičteme číslo 8 a tuto hodnotu přiřadíme proměnné x. V našem případě bude mít potom proměnná x hodnotu „$5+8$“, to jest hodnotu 13. Na vztah (4.57) se není možno dívat jako na rovnici. Např. není možno na jeho obě strany přičíst „$-x$“ a tak obdržet „$0 := 8$“. Proměnné, např. proměnné x, jíž již byla přiřazena hodnota, můžeme přiřadit novou hodnotu. Tím její původní hodnota zanikne.

Užitím proměnných, kterým již byly přiřazeny hodnoty z jejích oborů, můžeme vytvářet výrazy. Příkladem výrazu je např. pravá strana v (4.57). Uveďme si ještě jiný příklad výrazu. Označme $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ proměnné s oborem hodnot všech matic daného (stejného) typu a předpokládejme, že proměnným $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ byly již přiřazeny konkrétní matice. Potom přiřazením

$$\boldsymbol{C} := 2 \cdot \boldsymbol{A} + 3 \cdot \boldsymbol{B} \tag{4.58}$$

je proměnné $\boldsymbol{C}$ přiřazena matice rovna součtu aktuální hodnoty matice $\boldsymbol{A}$ vynásobené číslem 2 a aktuální hodnoty matice $\boldsymbol{B}$ vynásobené číslem 3. Zde $2 \cdot \boldsymbol{A} + 3 \cdot \boldsymbol{B}$ je výraz.

Byla-li již matici $\boldsymbol{A}$ přiřazena hodnota z jejího oboru, předpokládáme, že tímto přiřazením je přiřazena i hodnota symbolům označujícím její prvky $a_{i,j}$, resp. symbolům pro vektory $\boldsymbol{A}(i,:)$, $\boldsymbol{A}(:,j)$ pro aktuální hodnoty proměnných i, j. (Připomeňme si, že symbolem $\boldsymbol{A}(i,:)$ rozumíme i–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ a symbolem $\boldsymbol{A}(:,j)$ rozumíme j–tý sloupec matice $\boldsymbol{A}$.) Např., jestliže se někde v popisu vyskytne $a_{2,1}$, jedná se o aktuální hodnotu prvku matice $\boldsymbol{A}$ v jejím druhém řádku a prvním sloupci. Podobně, jestliže se v popisu použije symbol $\boldsymbol{A}(2,:)$, rozumí se jím aktuální hodnota druhého řádku matice $\boldsymbol{A}$. Jako další příklad přiřazení si uveďme přiřazení

$$\boldsymbol{A}(3,:) := \boldsymbol{A}(1,:). \tag{4.59}$$

Tímto přiřazením byla změněna matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její třetí řádek byl nahrazen aktuální hodnotou prvního řádku matice $\boldsymbol{A}$, aniž by se první řádek matice $\boldsymbol{A}$ nějak změnil.

Poznámka. V popisu výpočtového postupu děláme tedy rozdíl mezi symbolem „:=“ a symbolem „=“. Např. proměnné x přiřazujeme číslo 5 příkazem $x := 5$, a zápisem $y = 3$ vyjadřujeme, že proměnná y má hodnotu 3.

Mimo popis výpočtového postupu nebudeme činit rozdíl mezi těmito dvěma různými symboly a budeme používat jen symbolu „=“. Ze souvislostí je patrný význam použitého symbolu „=“.

4.5 Určení hodnosti matice

Hodnost schodovité matice

Zřejmě platí

Nechť $\boldsymbol{X}$ je nenulová schodovitá matice. Potom její hodnost je rovna počtu jejich nenulových řádků.

Uvedli jsme si, že matice $\boldsymbol{Y}$, která vznikne z matice $\boldsymbol{X}$ elementárními transformacemi, má stejnou hodnost jako matice $\boldsymbol{X}$. Popišme tedy výpočtový postup jak elementárními transformacemi transformovat danou matici $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$ na horní schodovitou matici.

Transformace matice X na horní schodovitou matici

Nechť $\boldsymbol{X}$ je nenulová matice typu (m, n), která není ve schodovitém tvaru. Její transformaci na matici schodovitého tvaru , označíme ji opět $\boldsymbol{X}$, provedem takto.

Začátek

Položme $\boxed{i := 1}$

B1. Budeme vytvářet i-tý řádek hledané matice schodovitého tvaru.

B2. K číslu i určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{X}$, v jehož řádcích $i, i+1, \ldots, m$ je alespoň jeden nenulový prvek. Toto pořadové číslo sloupce označme s_i.

B3. Zvolme $p \in \{i, \ldots, m\}$, pro než je $x_{p,s_i} \neq 0$. (je-li takových p více, zvolíme jedno z nich). p-tý řádek matice $\boldsymbol{X}$ nazveme *hlavním řádkem.*

B4. Je-li $p \neq i$, vyměníme navzájem p-tý a i-tý řádek metice $\boldsymbol{X}$. Po této výměně je i-tý řádek hlavním řádkem. Je-li $p = i$, je již i-tý řádek hlavním řádkem.

B5. Provedeme nyní takové elementární ´transformace, aby po jejich realizaci byly prvky $x_{i+1,s_i}, \ldots, x_{m,s_i}$ rovny 0. Toho dosáhneme např. elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(i, -x_{j,s_i}, j, x_{i,s_i})\boldsymbol{X}$$

pro ty indexy $j = i+1, \ldots, m$ pro něž $x_{j,s_j} \neq 0$.

B6. Jestliže matice $\boldsymbol{X}$ není ještě ve schodovitém tvaru, položme

$$\boxed{i := i + 1}$$

a přejdeme zpět na **B1**.

Je-li $\boldsymbol{X}$ ve schodovitém tvaru, je transformace ukončena. Hodnost dané matice je pak rovna počtu nenulových řádků schodovité matice.

Příklad 4.6. Určete řádkovou hodnost matice

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

užitím její transformace na horní schodovitou matici.

Řešení. Položme

$$\boldsymbol{X} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad m := 4, \quad n := 5.$$

V následujícím popisu výpočtového postupu bude označení **B1-*i*,...,B6-*i*** znamenat úkony **B1–B6** pro dané i.

Začátek

$\boxed{i := 1}$

B1-1 *Budeme vytvářet i-tý (první) řádek hledané schodovité matice.*

B2-1 K číslu i (to jest k číslu $i = 1$) určíme nejmenší pořadové číslo sloupce, v jehož řádcích $i, \dots, m$ (to jest v jehož řádcích $1, 2, 3, 4$) je nenulový prvek. Je to druhý sloupec. Položíme tedy $s_i := 2$ ($s_1 = 2$).

B3-1 Zvolíme hlavní řádek. V s_i–tém sloupci (to jest ve 2. sloupci) jsou nenulové prvky v řádcích $1, 2, 4$. Z nich zvolíme jeden. Jeho pořadové číslo označíme p. Rozhodneme se pro řádek $p = 1$, který zvolíme jako hlavní.

B4-1 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p–tý řádek, kde $p = i$, neprovádíme výměnu řádku p s řádkem i.

B5-1 Provedeme nyní takové elementární tranformace matice $\boldsymbol{X}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest ve druhém sloupci) v řádcích $i+1, \dots, m$ (to jest v řádcích 2, 3, 4) nulové prvky. (Prvky $x_{2,2}, x_{3,2}, x_{4,2}$ eliminujeme). Toho dosáhneme např. elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(i, -x_{j,s_i}, j, x_{i,s_i})\boldsymbol{X}, \qquad \text{pro } j = i+1, \dots, m, \text{ je-li } x_{j,s_j} \neq 0.$$

Poněvadž $i = 1$, $s_i = 2$, $m = 4$, eliminaci provedeme elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(1, -x_{j,2}, j, x_{1,2})\boldsymbol{X}, \qquad \text{pro } j = 2, 3, 4.$$

To znamená, že prvek $x_{j,2}$ pro každé $j \in \{2, 3, 4\}$ eliminujeme tak, že hlavní řádek (to jest první řádek) vynásobíme číslem $(-x_{j,2})$ a přičteme jej k j-tému řádku vynásobeného číslem $x_{1,2}$.

- Položme $j := i + 1$ (tedy pro $j = 2$) dostáváme

  $$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(1, -a_{2,2}, 2, a_{1,2})\boldsymbol{X}.$$

  Po této transformaci je druhý řádek matice $\boldsymbol{X}$ roven

  $$\boldsymbol{X}(2,:) = -2 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 3) + 1 \cdot (0\ 2\ 6\ 4\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ \ -5)$$

  a ostatní řádky matice $\boldsymbol{X}$ se nemění.
- Položme $j := j + 1$. Je tedy $j = 3$. Poněvadž $x_{j,s_i} = 0$, (to jest $x_{3,2} = 0$), eliminaci není třeba provádět a přejdeme k dalšímu řádku.
- Položme $j := j + 1$. Je tedy $j = 4$. Poněvadž $x_{j,s_i} = 1 \neq 0$, (to jest $x_{4,2} \neq 0$,) provedeme elementární transformaci

  $$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(1, -a_{4,2}, 4, a_{1,2})\boldsymbol{X}.$$

  Po této transformaci je čtvrtý řádek matice $\boldsymbol{X}$ roven

  $$\boldsymbol{X}(4,:) = -1 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 3) + 1 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 4) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1).$$

Ostatní řádky matice $\boldsymbol{X}$ se nemění.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B6-1 Poněvadž obdržená matice $\boldsymbol{X}$ ještě není horní schodovitou maticí, položíme

$$\boxed{i := i + 1}$$

a přejdeme na bod **B1**.

B1-2 *Je tedy* $i = 2$. *Budeme vytvářet druhý řádek horní schodovité matice.*

B2-2 K číslu i (to jest k číslu $i = 2$) určíme nejmenší pořadové číslo s_i (to jest s_2) sloupce, v jehož řádcích $i, \ldots, m$ (to jest v jehož řádcích $2, 3, 4$) je nenulový prvek. Je to čtvrtý sloupec. Položíme tedy $s_i := 4$ ($s_2 = 4$).

B3-2 Zvolíme hlavní řádek. V s_i-tém sloupci (to jest ve 4. sloupci) je v řádcích $2, 3, 4$ nenulový prvek jen v řádku 3. Jeho pořadové číslo označíme p. Tento řádek zvolíme za hlavní řádek. Je tedy $p := 3$.

B4-2 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek řádek p, kde $p \neq i$, provedeme v matici $\boldsymbol{X}$ výměnu řádku p s řádkem i. (Tedy výměnu druhého a třetího řádku.) Dostáváme tak matici

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B5-2 Provedeme nyní takové elementární transformace matice $\boldsymbol{X}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest ve čtvrtém sloupci) v řádcích $i+1, \ldots, m$ (to jest v řádcích 3, 4) nulové prvky. (Prvky $x_{3,4}, x_{4,4}$ eliminujeme.) Avšak v tomto případě jsou prvky $x_{3,4}, x_{4,4}$ rovny 0, takže eliminaci není třeba provádět. Je tedy výsledná matice v tomto kroku

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B6-2 Obdržená matice $\boldsymbol{X}$ ještě není horní schodovitou maticí, proto položíme

$$\boxed{i := i + 1}$$

a přejdeme na bod **B1**.

B1-3 Je tedy $i = 3$. To znamené, že budeme vytvářet třetí řádek hledané schodovité matice.

B2-3 K číslu i (to jest k číslu $i = 3$) určíme nejmenší pořadové číslo s_i (to jest s_3), v jehož řádcích $i, \ldots, m$ (to jest v jehož řádcích $3, 4$) je nenulový prvek. Je to pátý sloupec. Položme tedy $s_i := 5$ ($s_3 = 5$).

B3-3 Zvolíme hlavní řádek. V s_i-tém sloupci (to jest v 5. sloupci) jsou nenulové prvky v řádcích 3, 4. Z nich zvolíme jeden. Jeho pořadové číslo označíme p. Rozhodneme se pro řádek $p = 4$, který zvolíme jako hlavní.

B4-3 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p-tý řádek, kde $p \neq i$, provádíme výměnu řádku p s řádkem i. Po této výměně je

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

B5-3 Provedeme nyní takové elementární transformace matice $\boldsymbol{X}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest v pátém sloupci) v řádcích $i+1, \ldots, m$ (to jest v řádku 4) nulové prvky. (Prvek $x_{4,5}$ eliminujeme.) Toho lze dosáhnout např. elementární transformací

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(3, -x_{4,5}, 4, x_{3,5})\boldsymbol{X}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\boldsymbol{X}(4,:) = 5 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 1) + 1 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ -5) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0).$$

Je tedy

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B6-3 Poněvadž obdržená matice je již horní schodovitou maticí, je transformace dané matice na horní schodovitou matici již ukončen.

Poněvadž obdržená schodovitá matice má celkem tři nenulové řádky, je její hodnost a tedy i hodnost zadané matice rovna 3. Tedy $h(\boldsymbol{X}) = 3$.

Příklad 4.7. Určete hodnost skupiny vektorů

$${}^1\boldsymbol{a} = (1\ 0\ -1\ 2), \qquad {}^2\boldsymbol{a} = (0\ 1\ 2\ -1), \qquad {}^3\boldsymbol{a} = (0\ 1\ 3\ -6).$$

Řešení. Úloha je ekvivalentní s úlohou nalezení řádkové hodnosti matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Tuto hodnost hledejme transformací matice $\boldsymbol{A}$ elementárními ransformacemi na horní schodovitou matici postupem popsaným na str. 179.

Položme

$$\boxed{i := 1}$$

B1-1 Budeme vytvářet i-tý řádek (1. řádek) schodovité matice.

B2-1 K číslu $i = 1$ určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{A}$, v jehož řádcích 1, 2, 3 je alespoň jeden prvek různý od 0. Je to v prvním sloupci. Pokládáme tedy $s_1 := 1$.

B3-1 Hledáme nyní řádek matice $\boldsymbol{A}$, v jehož sloupci s pořadovým číslem $s_1 = 1$ je nenulový prvek. To jest, hledáme $p \in \{1, 2, 3\}$, pro něž je $a_{p,s_1} \neq 0$. Je to pro $p = 1$. Položme tedy $p := 1$. Řádek $p = 1$ volíme za hlavní.

B4-1 Poněvadž $p = i$, neprovádíme výměnu p-tého a i-tého řádku. První řádek je hlavním.

B5-1 Poněvadž všechny prvky v prvním sloupci počínaje druhým řádkem, jsou nulové (tj. prvky $a_{j,1} = 0$ pro $j = 2, 3$), přejdeme k **B6-1**.

B6-1 Matice $\boldsymbol{A}$ není horní schodovitou maticí, proto položíme

$$\boxed{i := i + 1}$$

a jdeme zpět k bodu **B1**.

B1-2 Je tedy $i = 2$. Budeme vytvářet 2. řádek schodovité matice.

B2-2 K číslu i (tj. k číslu $i = 2$) určíme nejmenší pořadové číslo sloupce s_i (to jest s_2), v jehož řádcích 2, 3 je nenulový prvek. Je to druhý sloupec. Položíme tedy $s_2 := 2$.

B3-2 Zvolíme hlavní řádek. Ve sloupci s pořadovým číslem s_2 (tj. ve druhém sloupci) hledáme index j, $j \geq i$, tak, aby $a_{j,s_2} \neq 0$. Je to pro $j = 2$ a pro $j = 3$. Zvolme jedno z nich. Rozhodneme se pro $j = 2$. Položíme $p := 2$. Bude tedy p-tý řádek hlavním řádkem.

B4-2 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p-tý řádek, kde $p = i$, neprovádíme vzájemnou výměnu p-tého a i-tého řádku. Je tedy i-tý řádek hlavním řádkem.

B5-2 Provedeme nyní takové elementární transformace, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (ve druhém sloupci) v řádcích $i + 1, \ldots, m$ (to jest v řádku 3) nulové prvky. Toho dosáhneme např. elementární transformací

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(2, -a_{3,2}, 3, a_{2,2})\boldsymbol{A}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\boldsymbol{A}(3, :) = -1(0\ 1\ 2\ \ -1) + 1(0\ 1\ 3\ \ -6) = (0\ 0\ 1\ \ -5).$$

Celkem dostáváme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

B6-2 Dosažená matice $\boldsymbol{A}$ je horní schodovitá matice. Poněvadž má tři nenulové řádky, je její hodnost rovna 3, je tedy $h(\boldsymbol{A}) = 3$.

Dané vektory ${}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, {}^3\boldsymbol{a}$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad 4.8. Určete hodnost matice

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení. V tomto příkladě naznačíme pouze výsledky jednotlivých úprav bez komentáře.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Má tedy matice $\boldsymbol{X}$ hodnost 2.

4.6 Báze vektorového prostoru

Zaveďme si nyní pojem báze. V některých vektorových prostorech existují vektory, které mají tu vlastnost, že každý vektor tohoto prostoru lze vyjádřit jako jejich vhodnou lineární kombinaci. To nás vede k této definici.

Definice báze

Definice 4.8. (Báze vektorového prostoru)

Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. ${}^{1}\boldsymbol{e}, \ldots, {}^{n}\boldsymbol{e}$ jsou vektory z $\mathbb{P}$ s těmito vlastnostmi:

1. jsou lineárně nezávislé
2. každý vektor prostoru $\mathbb{P}$ se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace, to jest, ke každému vektoru $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$ existují taková čísla $c_1, \ldots, c_n$, že

$$\boldsymbol{a} = c_1\,{}^{1}\boldsymbol{e} + \ldots + c_n\,{}^{n}\boldsymbol{e}.$$

Potom říkáme, že vektory ${}^{1}\boldsymbol{e}, \ldots, {}^{n}\boldsymbol{e}$ z $\mathbb{P}$ tvoří jeho bázi.

Příklad 4.9. Dokažte že vektory

$${}^{1}\boldsymbol{e} = (1, 0, 0),\ \ {}^{2}\boldsymbol{e} = (0, 1, 0),\ \ {}^{3}\boldsymbol{e} = (0, 0, 1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Důkaz. Dokažme především, že vektory

$${}^{1}\boldsymbol{e},\ {}^{2}\boldsymbol{e},\ {}^{3}\boldsymbol{e}$$

jsou lineárně nezávislé. Abychom to dokázali, hledejme koeficienty c_1, c_2, c_3, pro něž je

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{e} + c_2\,{}^2\boldsymbol{e} + c_3\,{}^3\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},$$

to jest, pro něž je

$$c_1 \cdot (1,0,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (0,0,1) = (0,0,0).$$

To zřejmě platí když a jenom když $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy vektory ${}^1\boldsymbol{e} = (1,0,0)$, ${}^2\boldsymbol{e} = (0,1,0)$, ${}^3\boldsymbol{e} = (0,0,1)$ skutečně lineárně nezávislé.

Nechť nyní $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ je libovolný vektor z $\mathbb{V}_3$ a hledejme koeficienty c_1, c_2, c_3, pro něž je

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{e} + c_2\,{}^2\boldsymbol{e} + c_3\,{}^3\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a},$$

to jest, pro něž platí

$$c_1 \cdot (1,0,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (0,0,1) = (a_1, a_2, a_3).$$

Odtud dostáváme $c_1 = a_1, c_2 = a_2, c_3 = a_3$. Vektory

$${}^1\boldsymbol{e} = (1,0,0), {}^2\boldsymbol{e} = (0,1,0), {}^3\boldsymbol{e} = (0,0,1)$$

mají vlastnosti uvedené v definici 4.8, takže tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Příklad 4.10. Dokažte, že vektory

$${}^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ {}^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ {}^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Budeme postupovat podobně jako v minulém příkladě. Napřed dokážeme, že vektory

$${}^1\boldsymbol{f},\ {}^2\boldsymbol{f},\ {}^3\boldsymbol{f}$$

jsou lineárně nezávislé. Hledejme koeficienty c_1, c_2, c_3, pro něž je

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{f} + c_2\,{}^2\boldsymbol{f} + c_3\,{}^3\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0},$$

to jest, pro něž je

$$c_1 \cdot (1,1,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (1,1,1) = (0,0,0).$$

To zřejmě platí když a jenom když

$$\begin{aligned} c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= 0, & (4.60)\\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0, & (4.61)\\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= 0. & (4.62) \end{aligned}$$

Tento systém rovnic má právě jedno řešení a to $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy vektory ${}^1\boldsymbol{f} = (1,1,0)$, ${}^2\boldsymbol{f} = (0,1,0)$, ${}^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$ lineárně nezávislé.

Abychom dokázali, že tyto vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$, musíme ještě dokázat, že každý vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}_3$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace vektorů ${}^1\boldsymbol{f}$, ${}^2\boldsymbol{f}$, ${}^3\boldsymbol{f}$. Nechť tedy $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$. Hledejme nyní koeficienty c_1, c_2, c_3, pro něž je $c_1\,{}^1\boldsymbol{f} + c_2\,{}^2\boldsymbol{f} + c_3\,{}^3\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}$, to jest, že

$$c_1 \cdot (1,1,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (1,1,1) = (a_1, a_2, a_3).$$

To zřejmě platí když a jenom když

$$\begin{aligned} c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= a_1, && (4.63)\\ c_1 + c_2 + c_3 &= a_2, && (4.64)\\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= a_3. && (4.65) \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $c_1 = a_1 - a_3,\ c_2 = a_2 - a_1,\ c_3 = a_3$. Vektory

$${}^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ {}^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ {}^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$$

mají vlastnosti uvedené v definici 4.8, takže tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Všimněmě si blíže obou těchto příkladů. V obou příkladech jsme uvažovali tentýž vektorový prostor. Ukázali jsme, že jak vektory

$${}^1\boldsymbol{e} = (1,0,0),\ {}^2\boldsymbol{e} = (0,1,0),\ {}^3\boldsymbol{e} = (0,0,1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$, tak i vektory

$${}^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ {}^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ {}^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Báze vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$ není tedy určena jednoznačně. V nahoře uvedeném příkladě byl počet vektorů tvořících bázi téhož vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$ v obou případech stejný. Naskytá se otázka, zda se jedná o nahodilost, anebo zda se jedná o nějakou zákonitost. V případě, že počet vektorů tvořících bázi by byl stejný pro každou bázi, potom tento počet by charakterizoval příslušný vektorový prostor. Uveďme si tedy následující větu, která odpovídá na tuto otázku.

Věta 4.8. *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a ${}^1\boldsymbol{e}, \dots, {}^n\boldsymbol{e}$ je jeho báze, tvořena n vektory. Potom platí:*

- *Jestliže ${}^1\boldsymbol{f}, \dots, {}^m\boldsymbol{f}$ je skupina m vektorů z $\mathbb{P}$, kde $m \geq n$, potom v ní je nejvýše n lineárně nezávislých vektorů.*
- *Každá skupina n lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{P}$ je jeho báze.*
- *Číslo n nyzýváme dimenzí vektorového prostoru $\mathbb{P}$. Píšeme $dim\mathbb{P} = n$.*

Důkaz: Bez důkazu. □

Dokažte si platnost tohoto tvrzení

Aritmetický vektorový prostor $\mathbb{V}_n$ má dimenzi rovnu n, tj. $dim\mathbb{V}_n = n$. Jedna z jeho bází je tvořena vektory

$${}^1\boldsymbol{e} = (1,0,\dots,0),\ {}^2\boldsymbol{e} = (0,1,\dots,0), \dots,\ {}^n\boldsymbol{e} = (0,0,\dots,1).$$

Uveďme si nyní pojem *vektorového podprostoru* vektorového prostoru $\mathbb{P}$.

Definice 4.9. (Vektorový podprostor)

Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. Nechť $Q \subseteq \mathbb{P}$ a nechť pro každé dva prvky $x, y \in Q$ je $x + y \in Q$ a pro každé $x \in Q$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot x \in Q$. Zde symboly „+“ a „$\cdot$“ jsou operace sečítání a násobení v prostoru $\mathbb{P}$. Potom množina Q společně s uvedenými operacemi „+“ a „$\cdot$“ je vektorovým podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{P}$, značíme jej $\mathbb{Q}$.

Vektorový podprostor

Uveďme si ještě pojem *vektorového prostoru generovaného systémem vektorů.*

Definice 4.10. (Lineární obal množiny)

Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a nechť $M \subseteq \mathbb{P}$. Potom množinu Q všech lineárních kombinací vektorů z M nazýváme lineárním obalem množiny M. Množina Q s operacemi „+“ a „$\cdot$“ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{P}$. Říkáme, že prostor $\mathbb{Q}$ je generován množinou M.
Jestliže $\mathbb{U}$ je vektorový podprostor prostoru $\mathbb{P}$ obsahující M, potom $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{U}$.

Příklad 4.11. Nechť Q je množina těch vektorů z $\mathbb{V}_5$, jejichž první a třetí složka je stejná. Potom množina Q s operacemi „+“ a „$\cdot$“, definovanými v prostoru $\mathbb{V}_5$, je vektorovým podprostorem $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{V}_5$. Vektory

$$(1,0,1,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1) \qquad (4.66)$$

tvoří jeho bázi.

Skutečně. Nechť

$$\boldsymbol{a} = (s, a_2, s, a_4, a_5),\ \boldsymbol{b} = (r, b_2, r, b_4, b_5)$$

a α, r, s jsou libovolná čísla. Potom

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (s + r, a_2 + b_2, s + r, a_4 + b_4, a_5 + b_5),$$

takže první a třetí složka tohoto součtu je stejná, takže tento součet patří do množiny Q. Podobně

$$\alpha \cdot \boldsymbol{a} = (\alpha \cdot s,\ \alpha \cdot a_2,\ \alpha \cdot s,\ \alpha \cdot a_4,\ \alpha \cdot a_5),$$

takže první a třetí složka tohoto součinu je stejná, takže součin $\alpha \cdot \boldsymbol{a}$ patří do množiny Q. Tato množina Q s operacemi „+“ a „$\cdot$“, definovanými v $\mathbb{V}_5$, je vektorovým podprostorem $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{V}_5$.

Ukažme ještě, že vektory (4.66) tvoří jeho bázi. Dokažme napřed, že jsou lineárně nezávislé. Skutečně, hledejme taková c_1, c_2, c_3, c_4 pro něž je

$$c_1 \cdot (1,0,1,0,0) + c_2 \cdot (0,1,0,0,0) + c_3 \cdot (0,0,0,1,0) + c_4 \cdot (0,0,0,0,1) = (0,0,0,0,0).$$

Odtud dostáváme

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0,0,0,0).$$

Tento vztah je splněn zřejmě jenom v případě, že

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.$$

Jsou tedy vektory (4.66) lineárně nezávislé.

Nechť nyní

$$\boldsymbol{a} = (s, a_2, s, a_4, a_5)$$

je libovolný vektor z $\mathbb{Q}$. Potom

$$s \cdot (1,0,1,0,0) + a_2 \cdot (0,1,0,0,0) + a_4 \cdot (0,0,0,1,0) + a_5 \cdot (0,0,0,0,1) = \\ = (s, a_2, s, a_4, a_5)$$

Lze tedy vektor $\boldsymbol{a} = (s, a_2, s, a_4, a_5)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů (4.66). Tím je důkaz proveden.

Zároveň lze konstatovat, že vektorový prostor $\mathbb{Q}$ je generován vektory (4.66).

Vraťme se k systému rovnic (3.35)

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{4.67}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n), $\boldsymbol{b}$ je vektor $(m, 1)$ a neznámý vektor $\boldsymbol{x}$ je typu $(n, 1)$.

Označme

$${}^1\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \qquad {}^2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad {}^n\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Potom systém (3.35) lze zapsat jako

$$\boldsymbol{x}_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{x}_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + \boldsymbol{x}_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

tj.

$$x_1{}^1\boldsymbol{a} + x_2{}^2\boldsymbol{a} + \cdots + x_n{}^n\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}. \tag{4.68}$$

Příklad 4.12. Systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_1 - 3x_3 &= -12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

lze zapsat jako

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Pro každou uspořádanou n-tici reálných čísel je levá strana (4.68), tj. vektor

$$x_1{}^1\boldsymbol{a} + x_2{}^2\boldsymbol{a} + \cdots + x_n{}^n\boldsymbol{a}$$

vektorem z vektorového prostoru G generovaného sloupcovými vektory matice $\boldsymbol{A}$, tj. vektory ${}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, \ldots, {}^n\boldsymbol{a}$. Systém rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení když a jenom když $\boldsymbol{b} \in G$.

4.7 Skalární součin, norma a vzdálenost ve vektorovém prostoru

Na gymnáziu se zavádí pojem skalárního součinu dvou volných vektorů. Toto zavedení se motivovalo potřebami fyziky. Skalární součin jste využívali nejen ve fyzice, ale i v analytické geometrii a to jak v úlohách s přímkami, tak i v úlohách s rovinami. Pojem skalárního součinu dvou volných vektorů a výpočet úhlu dvou nenulových volných vektorů nás bude motivovat k zavedení skalárního součinu a úhlu dvou vektorů v obecných vektorových prostorech. S těmito pojmy se pak můžete setkat při řešení různých aplikačních úloh. Začněme tedy s volnými vektory.

Definice 4.11. Úhlem volných vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ rozumíme úhel

$$\varphi \in \langle 0, \pi \rangle,$$

o který je nutno otočit orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$, reprezentující $\overrightarrow{a}$, kolem bodu A v rovině určené body (A, B, C) do směru orientované úsečky $\overrightarrow{AC}$, reprezentující $\overrightarrow{b}$, kde A je libovolný bod (viz obr 4.6).

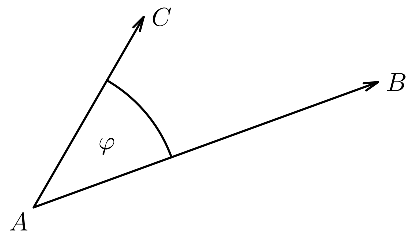
Skalární součin

Skalární součin dvou volných vektorů. Nechť $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ jsou dva volné nenulové vektory. Potom jejich skalárním součinem rozumíme číslo (skalár), označme je $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, definované vztahem

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos(\varphi), \tag{4.69}$$

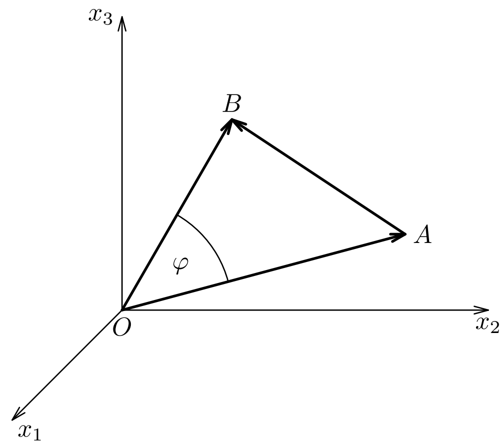
kde φ je úhel,který svírají vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Jestliže alespoň jeden z vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je nulový vektor, definujeme

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0.$$



Obrázek 4.6: Úhel dvou vektorů

Podívejme se nyní na pojem skalárního součinu dvou volných vektorů v kartézském souřadném systému ve třírozměrném prostoru. (Analogické úvahy je možno provést ve dvojrozměrném prostoru.) Uvažujme dva nenulové volné vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Nechť volný vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OA}$ a volný vektor $\overrightarrow{b}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OB}$, kde $O = [0,0,0], A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$. Označme φ úhel, který svírají orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Na trojúhelník $\triangle(OAB)$ aplikujme kosinovou větu. Dostáváme (viz obr.4.7)



Obrázek 4.7: Odvození skalárního součinu dvou vektorů

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cos(\varphi)$$

Do tohoto vztahu dosaďme

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Úpravou dostaneme

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos(\varphi) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{4.70}$$

Poněvadž $\left|\overrightarrow{OA}\right| = |\overrightarrow{a}|$ a $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right|$, dostáváme odtud a z (4.69)

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{4.71}$$

Jsou-li volné vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ nenulové, lze užitím vztahů (4.69), (4.70) určit $\cos(\varphi)$ vztahem

$$\cos(\varphi) = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}. \tag{4.72}$$

Užitím (4.71) pak dostáváme

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{4.73}$$

Uvažujme nyní zobrazení $\mathcal{T}$ prostoru $\mathbb{U}_3$ na prostor $\mathbb{V}_3$ (bylo již zavedeno dříve), definované vztahem

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{a}) = (a_1\ a_2\ a_3) = \boldsymbol{a}, \quad \mathcal{T}(\overrightarrow{b}) = (b_1\ b_2\ b_3) = \boldsymbol{b}.$$

Vzhledem k vlastnostem zobrazení $\mathcal{T}$ a vzhledem k (4.71) definujeme skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ v prostoru $\mathbb{V}_3$ vztahem (později definici skalárního součinu zobecníme)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{4.74}$$

a úhel φ, který svírají dva nenulové vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, vztahem

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{4.75}$$

Uvážíme-li, že $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, lze (4.75) přepsat takto

$$\cos(\varphi) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}. \tag{4.76}$$

Takto zavedený pojem skalárního součinu vektorů z $\mathbb{V}_3$ a pojem úhlu dvou nenulových vektorů z $\mathbb{V}_3$ rozšíříme i pro vektory z $\mathbb{V}_n$. (Tyto pojmy v dalším ještě více zobecníme.)

Definice 4.12.

Nechť $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$. Potom číslo, označme je $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, definované vztahem

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \tag{4.77}$$

nazveme skalárním součinem vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Poznámka. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_n$ jsou sloupcové vektory. Potom skalární součin $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ definovaný vztahem (4.77) lze zapsat jako

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{b}.$$

Lze dokázat, že v prostoru $\mathbb{V}_n$ má skalární součin vektorů, definovaný vztahem (4.77), následující vlastnosti:

Věta 4.9.

Nechť $\mathbb{V}_n$ *je vektorový prostor. Potom skalární součin v tomto prostoru, definovaný vztahem* (4.77), *má tyto vlastnosti:*

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), && (4.78)\\
(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), && (4.79)\\
(\alpha \cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \alpha \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), && (4.80)\\
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) &\geq 0, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{a} = \mathbf{0}. && (4.81)
\end{aligned}$$

Důkaz: Omezíme se na důkaz vztahu (4.79), ostatní vztahy se dokazuji analogicky, jejich důkaz přenechávám čtenáři. Aplikací vztahu (4.77) na levou stranu (4.79) dostáváme

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (a_1 + b_1) \cdot c_1 + \ldots + (a_n + b_n) \cdot c_n,$$

což po úpravě dává

$$a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1 + \ldots + a_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$ □

Pojem skalárního součinu dvou vektorů rozšíříme nyní i na vektorové prostory $\mathbb{P}$*, definované na obecné množině* P. Uvažujme nyní vektorový prostor $\mathbb{P}$, definovaný na nějaké neprázdné množině P. V tomto vektorovém prostoru budeme definovat skalární součin takto.

Definice 4.13. (Skalární součin dvou vektorů) Nechť $\mathbb{P}$ je daný lineární prostor. Ke každým jeho dvěma vektorům $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{P}$ je přiřazeno reálné číslo $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ tak, že pro vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{P}$ a pro každé reálné číslo α platí

Obecná definice skalárního součinu

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \tag{4.82}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \tag{4.83}$$

$$(\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \tag{4.84}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}. \tag{4.85}$$

Potom číslo $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ nazýváme skalárním součinem prvků $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{P}$.

Skalární součin definovaný v prostoru $\mathbb{V}_n$ vztahem (4.77)je jedním z možných způsobů definování skalárního součinu v prostoru $\mathbb{V}_n$. V následujícím příkladě si uvedeme jiný, rovněž často používaný skalární součin v prostoru $\mathbb{V}_n$.

Příklad 4.13. Nechť $\omega_1, \ldots, \omega_n$ jsou kladná čísla. Ke každým dvěma vektorům $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_n$ přiřaďme reálné číslo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega$ vztahem

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega = \omega_1 x_1 y_1 + \ldots + \omega_n x_n y_n. \tag{4.86}$$

Potom $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega$ definuje skalární součin na $\mathbb{V}_n$.

Důkaz: Důkaz je snadný. Stačí prověřit, že $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega$ splňuje vztahy (4.82—4.85). Přenechávám jej čtenáři. □

Věta 4.10. *Nechť $\mathbb{P}$ je lineární prostor se skalárním součinem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$. Potom pro libovolná $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$ platí*

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}. \tag{4.87}$$

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. Potom pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{P}$ platí

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x}, 0 \cdot \boldsymbol{z}) = 0 \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 0,$$

takže platí (4.87). Nechť $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Potom vzhledem k (4.85) je $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) > 0$. Položme

$$F(\alpha) = (\boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}), \tag{4.88}$$

kde α je reálný parametr. Potom podle (4.85) je $F(\alpha) \geq 0$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li do (4.88) $\alpha = -\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}$ dostáváme z (4.88)

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2 \cdot \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})^2} \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \geq 0. \tag{4.89}$$

Úpravou dostáváme

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} \geq 0.$$

Odtud
$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\geq(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2,$$
takže
$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leq\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\cdot\sqrt{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}.$$
□

Jako další důležitý pojem, který si zavedeme, je pojem normy v lineárním prostoru $\overrightarrow{P}$. Normu použijeme pak k definování vzdálenosti dvou prvků v tomto prostoru.

Normovaný vektorový prostor

Definice 4.14. (Norma)

Lineární prostor $\mathbb{P}$ nazýváme normovaným lineárním prostorem, jestliže ke každému $\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}$ je přiřazeno takové nezáporné reálné číslo, označme je $||\boldsymbol{x}||$, že pro všechna $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{P}$ a každé reálné číslo α platí

$$||\boldsymbol{x}|| = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, \tag{4.90}$$
$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}||+||\boldsymbol{y}||, \tag{4.91}$$
$$||\alpha.\boldsymbol{x}|| = |\alpha|\,.\,||\boldsymbol{x}||\,. \tag{4.92}$$

V normovaném lineárním prostoru $\mathbb{P}$ platí následující věta.

Věta 4.11. *Nechť $\mathbb{P}$ je normovaný lineární prostor. Je-li $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, potom platí* $||\boldsymbol{a}||>0$.

Důkaz: Podle definice normy pro každé $\boldsymbol{a}\in\mathbb{P}$ je $||\boldsymbol{a}||\geq0$. Nechť existuje takové $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, že $||\boldsymbol{a}||=0$. Podle (4.90) by bylo $\boldsymbol{a}=0$, což by byl spor s předpokladem. Je tedy $||\boldsymbol{a}||>0$ pro každé $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. □

Uveďme si nyní následující normy ve vektorových prostorech $\mathbb{V}_n$.

Věta 4.12. (Normy v prostoru $\mathbb{V}_n$)

$\boldsymbol{\alpha}$) *Jestliže ke každému vektoru $\boldsymbol{x}\in\mathbb{V}_n$ přiřadíme číslo $||\boldsymbol{x}||_1$ vztahem*

$$||\boldsymbol{x}||_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\,, \tag{4.93}$$

potom $||\boldsymbol{x}||_1$ je tzv. oktaedrická norma *ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$.*

$\boldsymbol{\beta}$) *Jestliže ke každému vektoru $\boldsymbol{x}\in\mathbb{V}_n$ přiřadíme číslo $||\boldsymbol{x}||_2$ vztahem*

$$||\boldsymbol{x}||_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}, \tag{4.94}$$

potom $||\boldsymbol{x}||_2$ je tzv. euklidovská norma *ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$.*

$\boldsymbol{\gamma)}$ *Jestliže ke každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ přiřadíme číslo $||\boldsymbol{x}||_3$ vztahem*

$$||\boldsymbol{x}||_3 = \max|x_i| \quad \textit{pro } i = 1, \ldots, n, \tag{4.95}$$

*potom $||\boldsymbol{x}||_3$ je tzv.*max–norma *ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$. (V literatuře se místo $||.||_3$ píše též $||.||_{\max}$.)*

Důkaz: $\boldsymbol{\alpha)}$ Dokažme, že $||\boldsymbol{x}||_1$ je normou.
a) Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ je takový vektor, že $||\boldsymbol{x}||_1 = 0$. Pro tento vektor tedy platí $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 0$. To je možné jen v tom případě, že $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Platí tedy (4.90).
b) Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_n$. Potom

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_1 = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \ldots + |x_n + y_n|\,,$$

takže

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_1 \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| = ||\boldsymbol{x}||_1 + ||\boldsymbol{y}||_1\,.$$

Platí tedy (4.91).
c) Nechť $\alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$. Potom

$$||\boldsymbol{x}||_1 = |\alpha \cdot x_1| + |\alpha \cdot x_2| + \ldots + |\alpha \cdot x_n| = |\alpha| \cdot (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|) = |\alpha| \cdot ||\boldsymbol{x}||_1\,.$$

Platí tedy (4.92).

$\boldsymbol{\beta)}$ Důkaz, že $||\boldsymbol{x}||_2$ je normou v prostoru $\mathbb{V}_n$ dokážeme později (str. 197) pomocí skalárního součinu definovaného vztahem (4.77).

$\boldsymbol{\gamma)}$ Dokažme, že $||\boldsymbol{x}||_3$ je normou ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$.
a) Nechť pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ je $||\boldsymbol{x}||_3 = 0$. Potom $max\,|x_i| = 0$, pro $i = 1, \ldots, n$, takže $x_i = 0, i = 1, \ldots, n$. Platí tedy (4.90).
b) Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_n$. Potom podle definice normy (4.95) je

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_3 = \max|x_i + y_i| \quad \text{pro } i = 1, \ldots, n\ .$$

Odtud dostáváme

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_3 = \max(|x_i + y_i|) \leq \max(|x_i|) + \max(|y_i|) \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Tedy

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||_3 \leq ||\boldsymbol{x}||_3 + ||\boldsymbol{y}||_3\,.$$

Platí tedy (4.91).
c) Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Podle definice normy je $||\alpha.\boldsymbol{x}||_3 = \max|\alpha.x_i|$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Odtud $||\alpha \cdot \boldsymbol{x}||_3 = |\alpha| \max|x_i|$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Je tedy $||\alpha \cdot \boldsymbol{x}||_3 = |\alpha|\,||\boldsymbol{x}||_3$. Platí tedy (4.92). □

Věta 4.13. (Norma určená ze skalárního součinu)
Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor se skalárním součinem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$. Potom vztahem (4.96)

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \quad \text{pro} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{P} \tag{4.96}$$

je definována norma na $\mathbb{P}$.

Důkaz: a) Dokažme (4.90). Podle (4.85) je $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, takže $||\boldsymbol{x}|| \geq 0$. Nechť $||\boldsymbol{x}|| = 0$. Potom podle (4.85) je $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, takže $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
b) Dokažme (4.91). Podle (4.96) je

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}).$$

Odtud dostáváme užitím (4.83)

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2 \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Odtud plyne

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2. |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Užitím (4.87) dostáváme

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 \leq ||\boldsymbol{x}||^2 + 2 \cdot ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y}||^2 .$$

Odtud vyplývá

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2 \leq (||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||)^2,$$

to jest

$$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}|| .$$

c) Dokažme nyní (4.92). Nechť $\alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}$. Potom podle (4.96) je

$$||\alpha \cdot \boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\alpha \cdot \boldsymbol{x}, \alpha \cdot \boldsymbol{x})}.$$

Podle (4.84) je

$$||\alpha \cdot \boldsymbol{x}|| = \sqrt{\alpha^2 \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})},$$

takže

$$||\alpha \cdot \boldsymbol{x}|| = |\alpha\ | \cdot ||\boldsymbol{x}|| .$$

S ohledem na definici normy je tedy vztahem (4.96) skutečně definována norma na $\mathbb{P}$.
□

Uvažujme nyní lineární prostor $\mathbb{P}$ se skalárním součinem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$.
Jestliže $\boldsymbol{x} \neq 0$, $\boldsymbol{y} \neq 0$, potom ze vztahu (4.87) dostáváme

$$\frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|}{\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}} \leq 1. \tag{4.97}$$

Existuje tedy takový úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, že

$$\cos(\varphi) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}}. \tag{4.98}$$

Takto definovaný úhel φ nazýváme úhlem vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

Definice 4.15. (Úhel dvou vektorů)

Úhel dvou vektorů

Nechť $\mathbb{P}$ je lineární prostor se skalárním součinem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$. Označme

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

Potom pro nenulové vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ nazýváme úhel φ, definovaný vztahem

$$\cos(\varphi) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}, \tag{4.99}$$

úhlem vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$. Dva vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ nazýváme navzájem kolmými, jestliže

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0. \tag{4.100}$$

Poznámka. Jestliže vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou nenulové, potom z (4.98) pro pravý úhel vyplývá (4.100).

Uveďme si dvě normy ve vektorových prostorech $\mathbb{V}_n$, definované pomocí skalárního součinu užitím vztahu(4.96).

Příklad 4.14. Nechť ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$ je zaveden skalární součin vztahem

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Potom

$$||\boldsymbol{x}||_2 = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \tag{4.101}$$

je *normou (euklidovskou) ve vektorovém prostoru* $\mathbb{V}_n$. Je tedy takto definovaná norma $||\boldsymbol{x}||_2$ vektoru $\boldsymbol{x}$ rovna velikostí $|\boldsymbol{x}|$ vektoru $\boldsymbol{x}$, jak byla zavedena v definici vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$. Úhel φ nenulových vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_n$ je pak definován vztahem (4.102)

$$\cos(\varphi) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||_2 \cdot ||\boldsymbol{y}||_2}, \tag{4.102}$$

resp. po rozepsání

$$\cos(\varphi) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}. \tag{4.103}$$

Příklad 4.15. Nechť $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ jsou daná kladná reálná čísla, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_n$. Nechť ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$ je zaveden skalární součin vztahem

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega = \omega_1x_1y_1 + \omega_2x_2y_2 + \ldots + \omega_nx_ny_n.$$

Potom

$$||\boldsymbol{x}||_\omega = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_\omega} = \sqrt{\omega_1 x_1^2 + \ldots + \omega_n x_n^2} \tag{4.104}$$

je k němu odpovídající normou ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$. Úhel φ nenulových vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ je určen vztahem

$$\cos(\varphi) = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_\omega}{||\boldsymbol{x}||_\omega \cdot ||\boldsymbol{y}||_\omega}. \tag{4.105}$$

Po rozepsání dostáváme

$$\cos(\varphi) = \frac{\omega_1 x_1 y_1 + \ldots + \ \omega_n x_n y_n}{\sqrt{\omega_1 x_1^2 + \ldots + \omega_n x_n^2} \cdot \sqrt{\omega_1 y_1^2 + \ldots + \omega_n y_n^2}}. \tag{4.106}$$

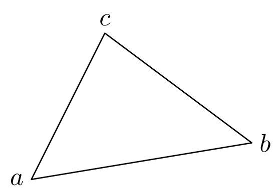
Metrický prostor. Dříve než zavedeme pojem metrického prostoru, uveďme si tento příklad. Předpokládejme, že podnik vyrábí výrobky $V_1,\ldots,V_n$. Nechť p_i značí plán výroby výrobku $V_i, i = 1,\ldots,n$. Nechť výrobní plán je popsán vektorem $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$. Předpokládejme, že podnik se odklonil od plánované výroby jednotlivých výrobků. Nechť realizovaná výroba je popsaná vektorem $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_n)$, kde r_i značí zrealizovanou výrobu výrobku $V_i, i = 1,\ldots,n$. Je otázkou, jak ohodnotit odchylku realizace celé výroby od plánu výroby, to jest odchylky vektorů $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$. K tomu si zavedeme pojem vzdálenosti dvou vektorů.

Pojem vzdálenosti zavedeme napřed pro prvky libovolné množiny. Vzdálenost dvou bodů jsme zvyklí chápat jaksi intuitivně, bez jeho precizování. Označíme-li M množinu bodů, potom v našem intuitivním pojetí má vzdálenost tyto vlastnosti:

M1. Vzdálenost dvou různých bodů je kladná, vzdálenost každého bodu od sama sebe je nulová.

M2. Vzdálenost bodu, označme jej $a \in M$, je od druhého bodu, označme jej $b \in M$, stejná, jako je vzdálenost bodu b od bodu a.

M3. Jsou-li a, b, c tři body množiny M, potom vzdálenost bodů a, b je menší nebo rovna součtu vzdálenosti bodů a, c, a vzdálenosti bodů b, c. Této vlastnosti říkáme trojúhelníková nerovnost. Je znázorněna na obr.4.8.



Obrázek 4.8: Trojúhelníková nerovnost

Toto intuitivní chápání vzdálenosti nás inspiruje k zavedení pojmu vzdálenost na libovolné množině M takto.

Vzdálenost

Definice 4.16. (Definice vzdálenosti)

Nechť M je daná neprázdná množina a nechť ϱ je zobrazení, kterým ke každým dvěma prvkům $a, b \in M$ je přiřazeno nezáporné číslo, označme je $\varrho(a, b)$, tak, že pro $a, b, c \in M$ platí

$$\begin{aligned} \varrho(a,b) &\geq 0, \quad \text{přičemž } \varrho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b, && (4.107)\\ \varrho(a,b) &= \varrho(b,a), && (4.108)\\ \varrho(a,b) &\leq \varrho(a,c) + \varrho(b,c). && (4.109)\end{aligned}$$

Potom $\varrho(a, b)$ nazýváme *vzdáleností prvků* a, b a množinu M s takto zavedenou vzdáleností ϱ nazýváme *metrickým prostorem.*

Na jedné a téže množině lze definovat vzdálenost různými způsoby. Jednou z možností jejího definování ve vektorovém prostoru je použití normy.

Věta 4.14. (Vzdálenost určená normou.)

Nechť $\mathbb{P}$ je normovaný vektorový prostor. Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$. Potom vztahem

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \quad \text{pro} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$$

je definovaná vzdálenost v $\mathbb{P}$.

Důkaz: a) Dokažme (4.107). Podle definice normy je $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \geq 0$, pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$, přičemž z (4.90) vyplývá

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

b) Vlastnost (4.108) vyplývá bezprostředně z (4.82).
c) Dokažme (4.109).Podle definice je $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$. Úpravou dostáváme $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y})||$. Užitím (4.91) dostáváme

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq ||(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})|| + ||(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y})|| = \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \varrho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}).$$

□

Věta 4.15. (Euklidovská vzdálenost)

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$ je vztahem

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

definována (euklidovská) vzdálenost vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

Důkaz: Věta je bezprostředním důsledkem věty 4.14 užitím euklidovské normy. □

Posouzení přibližného řešení systému rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Uvažujme systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Označme $\mathbf{x}^*$ jeho přesné řešení a $\overline{\boldsymbol{x}}$ jeho přibližné řešení (řešení obdržené např. výpočtem na počítači). Zaveďme si dva vektory $\boldsymbol{\delta}$ a $\boldsymbol{r}$ vztahy

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x}^* - \overline{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}. \tag{4.110}$$

- Norma vektoru $\boldsymbol{\delta}$ vyjadřuje vzdálenost přibližného řešení od přesného řešení. Tento vektor však většinou v reálnách situacích nemůžeme určit, neboť neznáme přesné řešení. Existují metody na odhad normy tohoto vektoru. Vycházejí však velice pesimisticky.
- Vektor $\boldsymbol{r}$ se nazývá reziduálním vektorem. Vyjadřuje, jak dobře přibližné řešení vyhovuje danému systému rovnic.

Ukažme si dva příklady.

Příklad 4.16. Uvažujme systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2,5\,x_1 & - & 3,1\,x_2 & - & x_3 & = & 7,31, \\ -0,5\,x_1 & + & 2,0\,x_2 & - & 1,5\,x_3 & = & -0,25, \\ 7,2\,x_1 & - & 3,1\,x_2 & + & 4,1\,x_3 & = & 9,18. \end{array} \tag{4.111}$$

Přesné řešení tohoto systému je

$$x_1^* = 1,7, \quad x_2^* = -0,6, \quad x_3^* = -1,2.$$

Výpočtem jsme obdrželi jeho přibližné řešení

$$\overline{x_1} = 1,683, \quad \overline{x_2} = -0,571, \quad \overline{x_3} = -1,219.$$

V tomto případě je

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 0,017 \\ -0,029 \\ 0,019 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -2,5514 \\ 0,0950 \\ -0,2902 \end{pmatrix}. \tag{4.112}$$

Výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{\delta}||_1 &= \max(|0,017|,\ |-0,029|,\ |0,019|) \\ ||\boldsymbol{r}||_1 &= \max(|-2,5514|,\ |0,0950|,\ |-0,2902|), \end{aligned}$$

to jest

$$||\boldsymbol{\delta}||_1 = 0,017, \quad ||\boldsymbol{r}||_1 = 2,5514.$$

4.8 Úvod do analytické geometrie v n-rozměrném prostoru $\mathbb{E}_n$

Zavedení n-rozměrného euklidovského prostoru

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Označme $\mathbb{R}^n$ množinu uspořádaných $n-$tic reálných čísel. Dále označme $\mathbb{V}_n$ aritmetický vektorový prostor definovaný na množině $\mathbb{R}^n$. Budeme předpoládat, že na vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$ je definován skalární součin takto: Jestliže $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots , a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots , b_n)$ jsou vektory z prostoru $\mathbb{V}_n$, potom jejich skalární součin je $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. Pomocí tohoto skalárního součinu je pak definovaná euklidovská norma, totiž $||a|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$.

Označme $\mathbb{E}_n$ množinu $\mathbb{R}^n$, jejíž každý prvek má dvojí význam.

- Význam bodu. V toto případě uspořádanou $n-$tici reálných čísel dáme do hranatých závorek a případně označíme symbolem, většinou velkým písmenem, např. $A = [a_1, \dots , a_n]$. Čísla $a_i, i = 1, \dots, n$, se nazývají souřadnicemi bodu A.
- Význam aritmetického vektoru z prostoru $\mathbb{V}_n$, takže uspořádaná $n-$tice reálných čísel představuje aritmetický vektor. V tomto případě ji dáváme do kulatých závorek a případně označíme symbolem, většinou malým tučně napsaným písmenem, např. $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Čísla $a_i, i = 1, \dots, n$, nazýváme složkami vektoru $\boldsymbol{a}$.

Vztah mezi body z $\mathbb{E}_n$ a vektory z $\mathbb{V}_n$ je definován následujícím způsobem.

Nechť $P = [p_1, \dots, p_n] \in \mathbb{E}_n$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{V}_n$. Označme $X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, pro nějž platí

$$x_i = p_i + s_i, \quad \text{kde} \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.113}$$

Tento vztah budeme zapisovat též jako

$$X = P + \boldsymbol{s}. \tag{4.114}$$

Tento prostor $\mathbb{E}_n$ nazveme $n-$rozměrným euklidovským prostorem.

Poznámka 1. Zápis (4.114) vyjadřuje operace, které se mají provést se souřadnicmi bodů a se složkami vektoru.

Poznámka 2. Z rovnice (4.114) lze vypočíst jednoznačně kterýkoliv člen pomocí zbývajících dvou členů. Např.

$$\boldsymbol{s} = X - P. \tag{4.115}$$

Tento vztah zapíšeme též takto

$$\boldsymbol{s} = X - P = \overrightarrow{XP}.$$

Budeme říkat, že uspořádaná dvojice bodů P, X tvoří umístění vektoru $\boldsymbol{s}$. Bod P nazýváme počátečním a bod X nazýváme koncovým bodem umístění vektoru $\boldsymbol{s}$.

Poznámka 3. Prostory $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$, $\mathbb{E}_3$, jste probírali na gymnáziích a dovedte si je představit. **Smyslová představa prostorů $\mathbb{E}_n$ pro $n > 3$ končí a musíme tyto prostory uvažovat jen ve smyslu definice.**

Příklad 4.17. Nechť $A = [1, -2, 3, 0]$, $B = [7, 1, 2, 3]$. Potom

$$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{AB} = [7, 1, 2, 3] - [1, -2, 3, 0] = (6, 3, -1, 3).$$

Definice 4.17.

Nechť $P \in \mathbb{E}_n$ a nechť ${}^{1}\boldsymbol{s}, \ldots, {}^{d}\boldsymbol{s}$ jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru $\mathbb{V}_n$. Potom množina bodů X z $\mathbb{E}_n$

$$X = P + {}^{1}t\,{}^{1}\boldsymbol{s} + \ldots + {}^{d}t\,{}^{d}\boldsymbol{s}, \tag{4.116}$$

kde ${}^{1}t, \ldots, {}^{d}t$ jsou parametry (libovolná čísla), se nazývá podprostorem dimenze d vnořeným do prostoru $\mathbb{E}_n$ (pro $d < n$).

Přímka

Lineární podprostor dimenze 1 *vnořený do prostoru* $\mathbb{E}_n$ *nazýváme* přímkou.

Přímku, určenou bodem P a vektorem $\boldsymbol{s}$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$X = P + t\boldsymbol{s}, \quad \text{kde } t \in (-\infty, \infty) \text{ je parametr,} \tag{4.117}$$

X je obecný bod přímky. Vektor $\boldsymbol{s}$ nazýváme směrovým vektorem přímky.

Příklad 4.18. Napišme v $\mathbb{E}_3$ rovnici přímky danou bodem $A = [2, -1, 3]$ a směrovým vektorem $\boldsymbol{s} = (2, -3, 0)$.

Řešení. Podle (4.117) dostáváme

$$[x_1, x_2, x_3] = [2, -1, 3] + t(2, -3, 0),$$

takže obecným bodem přímky je bod o souřadnicích

$$x_1 = 2 + 2t, \quad x_2 = -1 - 3t, \quad x_3 = 3, \quad \text{kde } t \in (-\infty, \infty).$$

Příklad 4.19. Napišme v $\mathbb{E}_4$ rovnici přímky danou body $A = [2, -1, 3, 2]$, $B = [1, 0, -5, 2]$.

Řešení. Za směrový vektor hledané přímky lze zvolit vektor $\boldsymbol{s} = B - A$. Je tedy $\boldsymbol{s} = B - A$. Výpočtem pak dostáváme

$$(s_1, s_2, s_3, s_4) = [1, 0, -5, 2] - [2, -1, 3, 2],$$

takže

$$\boldsymbol{s} = (-1, 1, -8, 0).$$

Podle (4.117) je tedy

$$X = A + t\boldsymbol{s},$$

takže dosazením dostáváme

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [2, -1, 3, 2] + t(-1, 1, -8, 0), \quad \text{kde } t \in (-\infty, \infty).$$

Přímka, určená body A, B, má tedy rovnici

$$X = A + t(B - A), \quad t \in (-\infty, \infty) \tag{4.118}$$

Úsečkou $\overline{AB}$ rozumíme body přímky (4.118), pro něž platí

$$X = A + t(B - A), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{4.119}$$

Všimněte si, že parametru $t = 0$ odpovídá bod A a parametru $t = 1$ odpovídá bod B.

Vzdálenost dvou bodů v $\mathbb{E}_n$

Nechť $A = [a_1, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, \ldots, b_n]$ jsou dva body z prostoru $\mathbb{E}_n$. Potom $d = ||B - A||$ nazýváme vzdáleností bodů A, B. Je tedy

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}.$$

Rovina

Lineární podprostor dimenze 2, vnořený do prostoru $\mathbb{E}_n$, $n > 2$, nazýváme rovinou.

Rovinu, určenou bodem P a nezávislými vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ lze tedy zapsat podle (4.116) ve tvaru

$$X = P + u\,\boldsymbol{r} + v\,\boldsymbol{s}, \quad \text{kde } u \in (-\infty, \infty), v \in (-\infty, \infty) \text{ jsou parametry.} \tag{4.120}$$

(Zde X je obecný bod přímky.)

Příklad 4.20. Napište rovnici roviny v $\mathbb{E}_4$, která prochází body $P = [1, 0, 2, -5]$, $Q = [4, 2, -7, 0]$, $R = [0, 4, 2, 6]$.

Řešení. Položme

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{PQ}, \quad \boldsymbol{s} = \overrightarrow{PR}$$

Dostáváme

$$\boldsymbol{r} = (3, 2, -9, 5), \quad \boldsymbol{s} = (-1, 4, 0, 11).$$

Dosazením do (4.120) dostáváme hledanou rovnici roviny

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [1, 0, 2, -5] + u\,(3, 2, -9, 5) + v\,(-1, 4, 0, 11),$$

kde $u, v \in (-\infty, \infty)$.

Nadrovina v prostoru $\mathbb{E}_n$

Podprostor dimenze $n-1$, vnořený do prostoru $\mathbb{E}_n$, $n > 3$, nazýváme nadrovinou.
Nechť $P \in \mathbb{E}_n$ a nechť ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{s}, \dots, {}^{(\boldsymbol{n-1})}\boldsymbol{s}$ jsou lineárně nezávislé vektory z prostoru $\mathbb{V}_n$. Potom množina bodů X z $\mathbb{E}_n$, určených vztahem

$$X = {}^{1}t\,{}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{s} + \dots + {}^{(n-1)}t\,{}^{(\boldsymbol{n-1})}\boldsymbol{s}, \tag{4.121}$$

kde ${}^{1}t, \dots, {}^{(n-1)}t$ jsou parametry, je nadrovinou v prostoru $\mathbb{E}_n$. Lze dokázat, že každou nadrovinu v prostoru $\mathbb{E}_n$ danou vztahem (4.121) *lze vyjádřit ve tvaru*

$$a_1\,x_1 + \dots + a_n\,x_n = b, \tag{4.122}$$

kde $a_1\ \dots, a_n, b$ jsou reálná čísla. Vektor $\boldsymbol{n} = (a_1, \dots a_n)$ je kolmý na vektory ${}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{s}, \dots, {}^{(\boldsymbol{n-1})}\boldsymbol{s}$.
Nechť

$$a_1\,x_1 + \dots + a_n\,x_n = b, \tag{4.123}$$

je nadrovinou v prostoru $\mathbb{E}_n$. Tato nadrovina určuje v prostoru $\mathbb{E}_n$ dva poloprostory, určené nerovnicemi

$$a_1\,x_1 + \dots + a_n\,x_n > b, \;\; a_1\,x_1 + \dots + a_n\,x_n < b.$$

4.9 Základní poznatky z kapitoly 4 a úlohy k procvičení

1. Zavedení pojmu lineárního (vektorového prostoru). Soustřeďte se na prostor $\mathbb{V}_n$. Vysvětlete pojem vektorového podprostoru.
2. Vysvětlete pojem prostor volných vektorů.

3. Vztah mezi prostorem $\mathbb{V}_2$ a prostorem volných vektorů $\mathbb{U}_2$. Vztah mezi prostorem $\mathbb{V}_3$ a prostorem volných vektorů $\mathbb{U}_3$.
4. Lineární kombinace vektorů.
5. Lineární závislost a lineární nezávislost vektorů.
6. Hodnost skupiny vektorů. Soustřeďte se na řádkovou a na sloupcovou hodnost matice.
7. Elementární transformace. Speciálně elementární transformace matic.
8. Určení hodnosti matice užitím elementárních transformací.
9. Skalární součin vektorů. Stačí znát v učebním textu uvedené dva typy skalárních součinů v prostoru $\mathbb{V}_n$.
10. Kolmost vektorů.
11. Pojem normy ve vektorovém prostoru. Znát normy $||.||_1$, $||.||_2$, $||.||_3$ v prostoru $\mathbb{V}_n$.
12. Co je to báze vektorového prostoru, co je to dimenze vektorového prostoru.
13. Zavedení pojmu vzdálenosti dvou prvků v dané množině. Určení vzdálenosti ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$ pomocí normy.
14. Metrický prostor.
15. Prostor $\mathbb{E}_n$.
16. Co je to přímka, rovina, nadrovina v $\mathbb{E}_n$.

Úlohy

1. Určete vektor

$$2 \cdot (2, -1, 6) + 3 \cdot (4, 2, -5) - (4, 2, 4).$$

[(12, 2, -7)]

2. Na množině uspořádaných trojic reálných čísel $\mathbb{R}^3$ definujme operaci sečítání takto: nechť $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, potom definujme jejich součet vztahem

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2), \max(a_3, b_3))$$

a součin reálného čísla α a uspořádané trojice reálných čísel $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vztahem

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3).$$

Zjistěte, zda množina $\mathbb{R}^3$ společně s takto definovaným součtem dvou prvků z $\mathbb{R}^3$ a násobením prvků z $\mathbb{R}^3$ reálnými čísly je vektorovým prostorem.
[Není, neboť neplatí např. $(c + d) \cdot \boldsymbol{x} = c \cdot \boldsymbol{x} + d \cdot \boldsymbol{x}$ pro $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$ a pro $c = 2, d = -3$.]

3. Zjistěte, zda v prostoru $\mathbb{V}_4$ vektor
a) $(2, 3, 4, 1)$ je lineární kombinací vektorů $(1, 2, 0, 5)$, $(1, 1, 4, 0)$,
b) $(4, -1, 0, 2)$ je lineární kombinací vektorů

$$(1, 2, 5, 7),\ (2, -5, -10, -12),\ (0, 0, 0, 0).$$

[a) není, b) je.]

4. Určete největší počet lineárně nezávislých vektorů v systému vektorů:

$$(0,1,2,3,4,6),\ (1,2,-1,4,2,0),\ (2,4,-2,1,0,8),\ (2,6,2,7,8,20).$$

[3]

5. Dokažte, že pro hodnosti matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí $h(\boldsymbol{A}) = 4$ a $h(\boldsymbol{B}) = 3$, je-li

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Zjistěte hodnosti matic

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

[$h(A) = 2$, $h(B) = 2$.]

7. a) Uveďte nějakou bázi ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_5$.
b) Uveďte nějakou bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$.
[a) $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,0,1)$,
b) $(1,0,0,\dots,0,0)$, $(0,1,0,\dots,0,0)$, $\dots$, $(0,0,0,\dots,0,1)$.]

8. Tvoří množina $P \subset \mathbb{V}_3$, jejíž každý prvek má na druhém místě sudé číslo, s operacemi sečítání a násobení prvků zavedenými stejně jako ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3$ vektorový podprostor prostoru $\mathbb{V}_3$?
[Ne, například pro $(0,2,3) \in \mathbb{V}_3$, a pro reálné číslo $0{,}3$ nepatří $0{,}3 \cdot (0,2,3)$ do P.]

9. Nechť $M = \{(1,0,2), (2,1,0), (4,1,4)\}$. Označme $\mathbb{M}$ vektorový podprostor prostoru $\mathbb{V}_3$, generovaný množinou $M \subseteq \mathbb{V}_3$. Patří vektor $(3,1,1)$ do tohoto podprostoru? Určete nějakou jeho bázi.
[Nepatří. Bázi tvoří např. vektory $(1,0,2)$, $(2,1,0)$.]

10. Určete bázi ve vektorovém prostoru generovaném vektory

$$(1,2,3,4),\ (0,5,2,1),\ (2,9,8,9),\ (3,16,13,14).$$

[Např. $(1,2,3,4)$, $(0,5,2,1)$.]

11. Nechť $\boldsymbol{a} = (1,5,-3)$, $\boldsymbol{b} = (-4,2,4) \in \mathbb{V}_3$. Určete jejich skalární součiny (které znáte) a vypočítejte odpovídající normy těchto vektorů. Dále určete jejich vzdálenost pomocí metriky určené touto normou. Určete též velikost úhlu, který tyto vektory svírají.

[Např. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = -6$, $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{35}$, $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{83}$.]

12. Nechť $\mathbb{V}_3$ je vektorový prostor se skalárním součinem definovaným vztahem $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

a) Zjistěte, zda jsou vektory $\boldsymbol{a} = (1, -2, 3), \boldsymbol{b} = (2, 3, 5)$ navzájem kolmé.

[$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 11$; vektory nejsou na sebe kolmé.]

b) Zjistěte, zda jsou vektory $\boldsymbol{c} = (0, -2, 3), \boldsymbol{d} = (2, 3, 2) \in \mathbb{V}_3$ na sebe kolmé.

[$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = 0$; vektory $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ jsou na sebe kolmé.]

c) Určete reálné číslo p tak, aby vektory $\boldsymbol{e} = (2, p, 1)$, $\boldsymbol{f} = (-1, 2, 3p) \in \mathbb{V}_3$ byly na sebe kolmé.

[$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) = -2 + 5p$; vektory $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ jsou na sebe kolmé pro $p = \frac{2}{5}$.]

13. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_3$ určete vzdálenosti vektorů $\boldsymbol{a} = (1, -2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (2, 3, -3)$ pomocí norem $||\boldsymbol{x}||_1, ||\boldsymbol{x}||_2, ||\boldsymbol{x}||_3$.

[α) $\varrho_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}||_1 = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + |b_3 - a_3| = 1 + 5 + 6 = 12$;
β) $\varrho_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{1^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{62}$;
γ) $\varrho_3(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \max(|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|, |b_3 - a_3|) = \max(1, 5, 6) = 6$)]

14. Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ je zvolený vektor. Označme

$$M = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{P} : \ \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{x},\ c \in \mathbb{R}\}.$$

a) Dokažte, že operace „$+, \cdot$“, které na množině P určují vektorový prostor $\mathbb{P}$, určují na M vektorový podprostor prostoru $\mathbb{P}$.

b) Nechť $\boldsymbol{y} \in \mathbb{P}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Vektor $\boldsymbol{p} \in \mathbb{M}$, pro který je vektor $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}$ ortogonální na $\mathbb{M}$ (to jest je kolmý na každý vektor z $\mathbb{M}$), nazýváme projekcí vektoru $\boldsymbol{y}$ na $\mathbb{M}$. Dokažte, že

$$\boldsymbol{p} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \cdot \boldsymbol{x}.$$

c) Označme

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}.$$

Dokažte, že

$$||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{y}|| \quad \text{pro všechna} \quad \boldsymbol{v} \in M.$$

Jinými slovy řečeno, $||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}||$ je vzdálenost vektoru $\boldsymbol{y}$ od podprostoru $\mathbb{M}$.

[b) Položme $\boldsymbol{p} = c \cdot \boldsymbol{x}$. Ze vztahu $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}) = 0$, vypočítáme $c = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$.]