- Zavedení pojmu determinantu matice
- Vlastnosti determinantů
- Použití determinantů
- Přímý výpočet inverzní matice pomocí determinantů
- Základní poznatky z kapitoly 4 a úlohy k procvičení

5. Determinanty

Cíl kapitoly

Cílem studia této kapitoly je

- zavést pojem determinantu,
- ukázat postup výpočtu determinantu matice druhého a třetího řádu,
- ukázat různé vlastnosti determinantu matice,
- ukázat výpočet determinantu matice rozvojem podle libovolného řádku (sloupce),
- poukázat na náročnost výpočtu determinantu matic vyšších řádů rozvojem podle libovolného řádku nebo sloupce,
- naučit se elementárními transformacemi transformovat matici $\boldsymbol{A}$ na horní trojúhelníkovou matici $\boldsymbol{B}$ a jejím užitím vypočítat hodnotu determinantu matice $\boldsymbol{A}$,
- seznámit se s metodou řešení systému n lineárních rovnic o n neznámých s regulární maticí soustavy užitím determinantů (Cramerovo pravidlo),
- ukázat přímou metodu nalezení inverzní matice k dané regulární matici,
- zavést pojem regulárnosti matice pro čtvercové matice,
- ukázat metodu nalezení inverzní matice užitím determinantů,
- ukázat, že řádková hodnost matice je rovna její sloupcové hodnosti.

Časová zátěž

- 15 hodin

5.1 Zavedení pojmu determinantu matice

Zavedení pojmu determinant

Několik úvodních slov. Uvažujme systém dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x_1, x_2

$$\begin{aligned} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 &= b_1, \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Jestliže $a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \neq 0$, potom

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{2,2} - b_2 \cdot a_{1,2}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}}, \quad x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{1,1} - b_1 \cdot a_{2,1}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}} \tag{5.2}$$

je řešením systému (5.1), jak se lze přesvědčit dosazením těchto hodnot za x_1, x_2 do rovnic (5.1).

Zaveďme si toto označení. Označme $\boldsymbol{C}$ matici

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Potom číslo

$$c_{1,1} \cdot c_{2,2} - c_{1,2} \cdot c_{2,1}$$

nazveme determinantem matice $\boldsymbol{C}$. Označíme jej $det(\boldsymbol{C})$, resp. $|\boldsymbol{C}|$. Tedy

$$det(\boldsymbol{C}) = det \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{vmatrix} = c_{1,1} \cdot c_{2,2} - c_{1,2} \cdot c_{2,1}.$$

Řešení (5.2) systému (5.1) lze pak pomocí determinantů zapsat takto

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}}. \tag{5.3}$$

V těchto vzorcích je jmenovatel determinantem matice soustavy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

který je dle předpokladu $\neq 0$. Čitatel ve vyjádření pro x_1 je determinantem matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ náhradou jejího prvního sloupce vektorem pravých stran

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Podobně čitatel ve vyjádření $\boldsymbol{x}_2$ je determinantem matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ náhradou jejího druhého sloupce vektorem pravých stran $\boldsymbol{b}$.

V dalším si zavedeme pojem determinantu i pro čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ libovolného řádu n. Budeme jej značit shodně jako determinanty matic řádu 2. Determinanty využijeme při řešení systému n lineárních rovnic o n neznámých. Pojem determinantu se využívá i při řešení řady jiných ekonomických úloh.

Zaveďme si nyní pojem determinantu matice.

Definice 5.1. (Determinant matice)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice. Determinantem matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo, označme je $|\boldsymbol{A}|$ nebo $det(\boldsymbol{A})$, definované takto: Je-li $n = 1$, to jest, jestliže $\boldsymbol{A} = (a_{11})$, potom $|\boldsymbol{A}| = a_{11}$. Jestliže je již definován determinant matice řádu $n-1$, potom determinant matice řádu n definujeme takto:

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} a_{1,1} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,1}| + \ldots + \\ +(-1)^{1+k} a_{1,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,k}| + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1,n} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,n}|, \tag{5.4}$$

kde $\boldsymbol{A}_{i,j}$ je matice (jak jsme si to již dříve zavedli), která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním jejího i–tého řádku a j–tého sloupce.

Poznámka. *Je tedy determinant matice funkce definovaná na množině všech čtvercových matic.*

Příklad 5.1. Např. je-li $\boldsymbol{A} = (-2)$, potom $|\boldsymbol{A}| = -2$.

Příklad 5.2. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Dokažte, že

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}. \tag{5.6}$$

Skutečně, podle (5.4) je

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,1}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2}. |\boldsymbol{A}_{1,2}| \,. \tag{5.7}$$

Zde $\boldsymbol{A}_{1,1}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 1. sloupce. Je tedy $\boldsymbol{A}_{1,1} = (a_{2,2})$, $|\boldsymbol{A}_{1,1}| = a_{2,2}$. Podobně $\boldsymbol{A}_{1,2}$ je matice vzniklá z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním jejího prvního řádku a 2. sloupce. Je tedy $\boldsymbol{A}_{1,2} = (a_{2,1})$, $|\boldsymbol{A}_{1,2}| = a_{2,1}$. Dosazením do (5.7) dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot a_{2,2} + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

Poznámka. *Determinant matice 2. řádu lze tedy vypočítat takto:* Od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále.

Příklad 5.3. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Jedná se o výpočet determinantu matice 2. řádu. Podle (5.6) je

$$|\boldsymbol{A}| = \text{„součin prvků na hlavní diagonále} - \text{součin prvků na vedlejší diagonále"}.$$

Tedy

$$|\boldsymbol{A}| = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5, \quad |\boldsymbol{A}| = 22.$$

Příklad 5.4. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Potom

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| = (&a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}) - \\ &- (a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3} + a_{1,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{2,3} + a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3}). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Skutečně, podle definice 5.1 je

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,1}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,2}| + (-1)^{1+3} \cdot a_{1,3} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,3}|\,. \tag{5.10}$$

Zde $\boldsymbol{A}_{1,1}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 1.sloupce. Je tedy

$$\boldsymbol{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

takže podle (5.6) je

$$|\boldsymbol{A}_{1,1}| = a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}. \tag{5.11}$$

Matice $\boldsymbol{A}_{1,2}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 2. sloupce. Je tedy

$$\boldsymbol{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

takže podle (5.6) je

$$|\boldsymbol{A}_{1,2}| = a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}. \tag{5.12}$$

Matice $\boldsymbol{A}_{1,3}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 3. sloupce. Je tedy

$$\boldsymbol{A}_{1,3} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix},$$

takže podle (5.6) je

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}. \tag{5.13}$$

Dosadíme-li do (5.10) za $|\boldsymbol{A}_{1,1}|$, $|\boldsymbol{A}_{1,2}|$, $|\boldsymbol{A}_{1,3}|$ vypočítané hodnoty (5.11), (5.12), (5.13), dostáváme

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| = a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}) - a_{1,2} \cdot (a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}) + \\ + a_{1,3} \cdot (a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Odtud dostáváme po úpravě hledaný vztah (5.9).

Sarusovo pravidlo

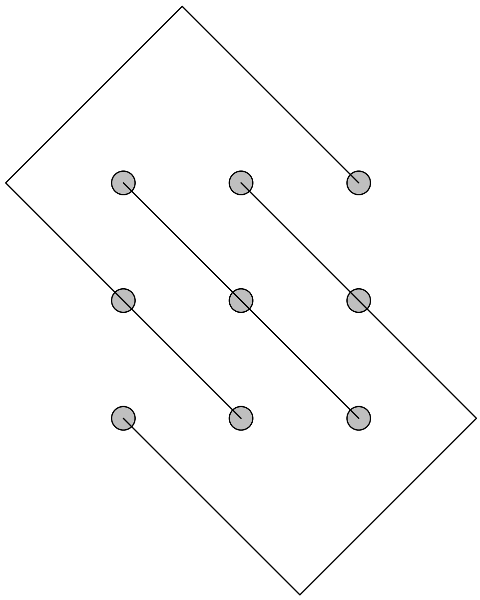
Podle příkladu 5.4 se vypočítá hodnota determinantu matice $\boldsymbol{A}$ *řádu* $n = 3$ *vztahem*

$$|\boldsymbol{A}| = S_1 - S_2, \tag{5.15}$$

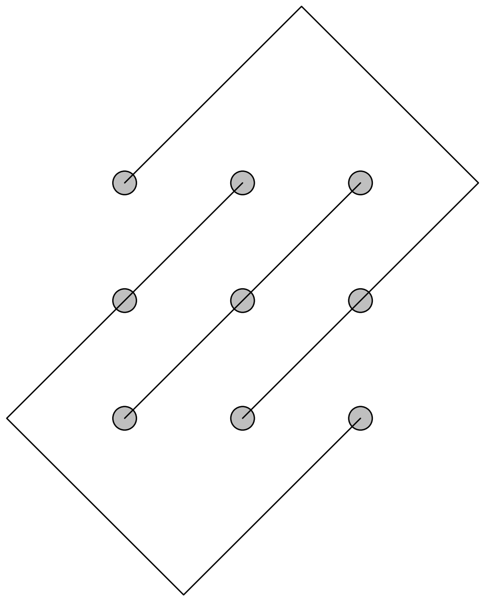
kde

$$\begin{aligned} S_1 &= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}, \\ S_2 &= a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3} + a_{1,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{2,3} + a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3}. \end{aligned}$$

Vidíme, že S_1 *je součtem tří členů, každý z nich je součinem tří prvků matice* $\boldsymbol{A}$*. Na následujícím obrázku 5.1 jsou prvky matice vyznačeny kroužky a každá trojice prvků, jejichž součin je členem v* S_1*, je propojena čarou.*
S_2 *je součtem tří členů, každý z nich je součinem tří prvků matice* $\boldsymbol{A}$*. Na následujícím obrázku 5.2 jsou prvky matice vyznačeny kroužky a každá trojice prvků, jejichž součin je členem v* S_2*, je propojena čarou.*



Obrázek 5.1: Výpočet S_1.



Obrázek 5.2: Výpočet S_2.

Příklad 5.5. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

užitím Sarusova pravidla.

Řešení. Hledejme tedy hodnotu determinantu

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Podle Sarusova pravidla dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = [5\cdot 4\cdot 7+(-2)\cdot(-2)\cdot(-3)+2\cdot 6\cdot 3]-[3\cdot 4\cdot(-3)+(-2)\cdot 6\cdot 5+(-2)\cdot 2\cdot 7].$$

Úpravou dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = [140 - 12 + 36] - [-36 - 60 - 28],$$

takže $|\boldsymbol{A}| = 288$.

Příklad 5.6. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podle (5.4) dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}. \tag{5.16}$$

Hodnotu každého z těchto determinantů matic řádu 3 určíme užitím Sarusova pravidla. Dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot 60 - 2 \cdot 20 - 1 \cdot (-20) - 3 \cdot (-20),$$

takže $|\boldsymbol{A}| = 100$.

Poznámka. *Je nutno si uvědomit, že Sarusovo pravidlo bylo odvozeno pro determinanty matic 3. řádu. Pro matice vyšších řádů není obdoba Sarusova pravidla.*

V definici 5.1 determinantu matice má její první řádek výjimečné postavení. Ve vzorci (5.4) vystupují prvky prvního řádku matice explicitně. Zabývejme se otázkou, zda existuje analogický vzorec pro výpočet hodnoty determinantu, ve kterém by explicitně vystupovaly prvky jiného řádku než prvního. K odvození takovéhoto vzorce, uvedeného ve větě 5.6, použijeme několik pomocných vět.

Pomocné věty

Věta 5.1. (Pomocná.) *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu $n \geq 3$ a $\tilde{\boldsymbol{A}}$ je matice, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou jejího k–tého a $(k+1)$–tého řádku, kde $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. Potom*

$$\det \boldsymbol{A} = -\det \tilde{\boldsymbol{A}}.$$

Důkaz: K důkazu použijeme matematickou indukci. Nechť $n = 3$, $k = 2$. Potom

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Podle Sarusova pravidla je

$$\begin{aligned} det\boldsymbol{A} = (a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}) - \\ - (a_{3,1} \cdot a_{1,3} \cdot a_{2,2} + a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} + a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3}). \end{aligned} \tag{5.17}$$

a

$$\begin{aligned} det\tilde{\boldsymbol{A}} = (a_{3,1} \cdot a_{1,3} \cdot a_{2,2} + a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} + a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3}) - \\ - (a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}), \end{aligned} \tag{5.18}$$

takže pro $n = 3$, $k = 2$ je $det\boldsymbol{A} = -det\tilde{\boldsymbol{A}}$ a tedy věta platí pro $n = 3$.

Předpokládejme nyní, že věta platí pro matice řádu n a dokažme, že potom platí i pro matice řádu $n+1$. Nechť tedy $\boldsymbol{A}$ je matice řádu $n+1$ a nechť $\tilde{\boldsymbol{A}}$ je matice, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou jejího $k-$tého a $(k+1)$–tého řádku, kde $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. (Poznamenejme, že matice $\boldsymbol{A}$ a $\tilde{\boldsymbol{A}}$ mají stejný první řádek.) Podle definice determinantu je

$$det\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1\,j} |\boldsymbol{A}_{1\,j}| \tag{5.19}$$

$$det\tilde{\boldsymbol{A}} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1\,j} |\tilde{\boldsymbol{A}}_{1\,j}|. \tag{5.20}$$

Matice $\tilde{\boldsymbol{A}}_{1\,j}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}_{1\,j}$ vzájemnou výměnou dvou řádků. Obě jsou řádu n. Podle indukčního předpokladu je

$$|\boldsymbol{A}_{1\,j}| = -|\tilde{\boldsymbol{A}}_{1\,j}|, \; j = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{5.21}$$

Ze vztahu (5.20) dostáváme užitím (5.21)

$$det\tilde{\boldsymbol{A}} = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{1+j}a_{1\,j}|\tilde{\boldsymbol{A}}_{1\,j}| = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{1+j}a_{1\,j}(-|\boldsymbol{A}_{1\,j}|).$$

Odtud a z (5.19) dostáváme

$$det\boldsymbol{A} = -det\tilde{\boldsymbol{A}},$$

takže věta platí. □

Věta 5.2. (Pomocná.) *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$ a nechť matice $\tilde{\boldsymbol{A}}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou jejího prvního a druhého řádku. Potom platí*

$$det(\boldsymbol{A}) = -\,det\widetilde{\boldsymbol{A}}.$$

Důkaz: K důkazu použijeme matematickou indukci. Pro $n = 2$ je platnost věty evidentní. V tomto případě je totiž

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Výpočtem dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}, \quad |\tilde{\boldsymbol{A}}| = a_{2,1} \cdot a_{1,2} - a_{2,2} \cdot a_{1,1}, \tag{5.22}$$

takže

$$det\boldsymbol{A} = -det\tilde{\boldsymbol{A}}.$$

Předpokládejme, že věta platí pro determinanty matic řádu $n-1$. Dokažme, že pak platí pro determinanty matic řádu n. Položme tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Podle definice determinantu platí

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1\,j}|\boldsymbol{A}_{1\,j}|, \tag{5.23}$$

kde matice $\boldsymbol{A}_{1\,j}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním prvního řádku a j–tého sloupce. Je tedy

$$|\boldsymbol{A}_{1j}| = \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2\,n} \\ a_{31} & \dots & a_{3,\,j-1} & a_{3\,j+1} & \dots & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix}.$$

Jeho výpočtem obdržíme

$$|\boldsymbol{A}_{1j}| = \sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{1+k}a_{2\,k}|\boldsymbol{A}_{(1,2),(j,k)}| + \sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{1+(k-1)}a_{2,k}|\boldsymbol{A}_{(1,2),(j,k)}|. \quad (5.24)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do (5.23), dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1,j}\left(\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{1+k}a_{2\,k}|\boldsymbol{A}_{(1,2),(j,k)}| + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{1+(k-1)}a_{2\,k}|\boldsymbol{A}_{(1,2),(j,k)}|\right). \quad (5.25)$$

Po úpravě odtud dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1,k\neq j}^{n}(-1)^{s_{j,k}}\,a_{1,j}\,a_{2,k}|\boldsymbol{A}_{(1,2),(j,k)}|, \quad (5.26)$$

kde

$$s_{j,k} = \begin{cases} j+k & \text{pro} \quad k<j \\ j+k+1 & \text{pro} \quad k>j. \end{cases} \quad (5.27)$$

Podobně obdržíme

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq k}^{n}(-1)^{\widetilde{s}_{k,j}}a_{2,k}\,a_{1,k}\,|\boldsymbol{A}_{(1,2),(k,j)}|, \quad (5.28)$$

kde

$$\widetilde{s}_{k,j} = \begin{cases} j+k & \text{pro} \quad j<k \\ j+k+1 & \text{pro} \quad j>k. \end{cases} \quad (5.29)$$

Porovnáním (5.26),(5.27) se vztahy (5.28), (5.29) odtud vyplývá, že

$$|\boldsymbol{A}| = -|\tilde{\boldsymbol{A}}|.$$

□

Důsledkem vět 5.1, 5.2 je tato věta.

Věta 5.3. (Pomocná.) *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je čtvercová matice řádu* $n \geq 2$. *Označme* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ *matici, která z ní vznikne vzájemnou výměnou dvou jejich po sobě jdoucích řádků, to jest* k*–tého řádku s řádkem* $(k+1)$*–tým, kde* $1 \leq k \leq (n-1)$. *Potom*

$$|\boldsymbol{A}| = -|\tilde{\boldsymbol{A}}|.$$

Ukázali jsme si, že výměnou dvou po sobě jdoucích řádků ve čtvercové matici $\boldsymbol{A}$ hodnota determinantu změní své znaménko. Ukažme nyní, že toto má platnost obecnější – hodnota determinantu matice změní znaménko výměnou dvou libovolných jejich řádků. Abychom to dokázali, zjistěme si napřed, kolika výměnami dvou po sobě jdoucích řádků matice $\boldsymbol{A}$ dospějeme k matici $\tilde{\boldsymbol{A}}$, která vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ výměnou dvou libovolných řádků.

Věta 5.4. (Pomocná.) *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n) a nechť*

$$1 \leq p < q \leq m.$$

Označme $\tilde{\boldsymbol{A}}$ matici vzniklou z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou jejího p–tého a q–tého řádku. Potom matici $\tilde{\boldsymbol{A}}$ lze vytvořit z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnými výměnami dvou po sobě jdoucích řádků v počtu $(2(p+q)-1)$.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Označme r_i i-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$, tj.

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{A}(i, :).$$

Zvolme

$$p, q \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, m\},\ p < q.$$

Vzájemnou výměnu řádku $\boldsymbol{r}_p$ s řádkem $\boldsymbol{r}_q$ provedeme ve dvou následujících etapách.

1. Provedeme vzájemné výměny dvou po sobě jdoucích řádků tak, že řádek $\boldsymbol{r}_p$ bude na q–té pozici a pořadí ostatních řádků se zachová (to tedy znamená pořadí, nikoliv jejich umístění). Tato výměna se dá postupně realizovat takto. Výměnou $\{p, p+1\}$ se řádek $\boldsymbol{r}_p$ dostává na pozici $p+1$. Následnou výměnou $\{p+1, p+2\}$ se řádek $\boldsymbol{r}_p$ dostává na pozici $p+2$. Tedy výměnami v počtu 2 se řádek $\boldsymbol{r}_p$ dostává na pozici o 2 větší, než byla jeho výchozí pozice. Tímto způsobem pokračujeme až po $q-p$ výměnách se dostane řádek $\boldsymbol{r}_p$ z pozice p na pozici $p+(q-p)$, t.j. na pozici q. Tato postupná výměna dvou po sobě jdoucích řádků je znázorněna v následující tabulce. Po realizaci těchto $q-p$ vzájemných dvou po sobě jdoucích řádků je řádek $\boldsymbol{r}_p$ na pozici q a řádek $\boldsymbol{r}_q$ je na pozici $q-1$.

$$
\begin{array}{ll|l|c|l|c|l|c}
\text{pozice } 1 & \ldots & \boldsymbol{r}_1 & & \boldsymbol{r}_1 & & \boldsymbol{r}_1 & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\text{pozice } p & \ldots & \boldsymbol{r}_p & & \boldsymbol{r}_{p+1} & & \boldsymbol{r}_{p+1} & \\
\text{pozice } p+1 & \ldots & \boldsymbol{r}_{p+1} & & \boldsymbol{r}_p & & \boldsymbol{r}_{p+2} & \\
\text{pozice } p+2 & \ldots & \boldsymbol{r}_{p+2} & & \boldsymbol{r}_{p+2} & & \boldsymbol{r}_p & \\
 & & \vdots & \xrightarrow[\{p,p+1\}]{} & \vdots & \xrightarrow[\{p+1,p+2\}]{} & \vdots & \ldots \\
\text{pozice } q-2 & \ldots & \boldsymbol{r}_{q-2} & & \boldsymbol{r}_{q-2} & & \boldsymbol{r}_{q-2} & \\
\text{pozice } q-1 & \ldots & \boldsymbol{r}_{q-1} & & \boldsymbol{r}_{q-1} & & \boldsymbol{r}_{q-1} & \\
\text{pozice } q & \ldots & \boldsymbol{r}_q & & \boldsymbol{r}_q & & \boldsymbol{r}_q & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\text{pozice } m & \ldots & \boldsymbol{r}_m & & \boldsymbol{r}_m & & \boldsymbol{r}_m &
\end{array}
$$

$$\cdots\;\begin{array}{|l|}\hline \boldsymbol{r}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_{p+1}\\ \boldsymbol{r}_{p+2}\\ \boldsymbol{r}_{p+3}\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_p\\ \boldsymbol{r}_{q-1}\\ \boldsymbol{r}_q\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_m\\ \hline\end{array}\;\xrightarrow[\{q-2,q-1\}]{}\;\begin{array}{|l|}\hline \boldsymbol{r}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_{p+1}\\ \boldsymbol{r}_{p+2}\\ \boldsymbol{r}_{p+3}\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_{q-1}\\ \boldsymbol{r}_p\\ \boldsymbol{r}_q\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_m\\ \hline\end{array}\;\xrightarrow[\{q-1,q\}]{}\;\begin{array}{|l|}\hline \boldsymbol{r}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_{p+1}\\ \boldsymbol{r}_{p+2}\\ \boldsymbol{r}_{p+3}\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_{q-1}\\ \boldsymbol{r}_q\\ \boldsymbol{r}_p\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_m\\ \hline\end{array}\;\begin{array}{l} \ldots\ \text{pozice } 1\\ \\ \ldots\ \text{pozice } p\\ \ldots\ \text{pozice } p+1\\ \ldots\ \text{pozice } p+2\\ \\ \ldots\ \text{pozice } q-2\\ \ldots\ \text{pozice } q-1\\ \ldots\ \text{pozice } q\\ \\ \ldots\ \text{pozice } m\end{array}$$

2. Ve druhé etapě přesuneme řádek $\boldsymbol{r}_q$ z pozice $q-1$ na pozici p. Provedeme to těmito postupnými výměnami dvou po sobě uložených řádků. Výměnou $\{q-1, q-2\}$ se řádek $\boldsymbol{r}_q$ z pozice $q-1$ dostane na pozici $q-2$. Následnou výměnou $\{q-2, q-3\}$ se řádek r_q posune z pozice $q-1$ na pozici $q-3$, tedy o dvě pozice zpět proti pozici $q-1$. Tímto způsobem dále pokračujeme, až po $q-p-1$ vzájemných výměnách dvou po sobě jdoucích řádků se řádek $\boldsymbol{r}_q$ posune z pozice $q-1$ na pozici $q-1-(q-p-1)$ to jest na pozici p.

Z úvah v těchto dvou etapách vyplývá, že po těchto $(q-p)+(q-p-1)$, to jest po $2(q-p)-1$ vzájemných výměnách dvou po sobě umístěných řádků dospějeme z matice $\boldsymbol{A}$ k matici $\tilde{\boldsymbol{A}}$, to jest k matici, která vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou p–tého a q–tého řádku. □

Tohoto poznatku využijeme k důkazu následující věty.

Věta 5.5. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$. Označme $\boldsymbol{B}$ matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou jejího p–tého a q–tého řádku. Potom platí*

$$det\boldsymbol{A} = -det\boldsymbol{B}. \tag{5.30}$$

Důkaz: Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $p < q$. Podle předešlé věty vznikne matice $\boldsymbol{B}$ z matice $\boldsymbol{A}$ celkem $2(q-p)-1$ vzájemnými výměnami dvou po sobě jdoucích řádků. Podle věty 5.3 je

$$det(\boldsymbol{B}) = (-1)^{2(q-p)-1} det(\boldsymbol{A}).$$

Platí tedy (5.30). □

V následující větě si ukážeme výpočet hodnoty determinantu matice podle vzorce, který je analogickým vztahu (5.4). Místo prvků v prvním řádku v něm vystupují explicitně prvky libovolně zvoleného řádku.

Věta 5.6. (Výpočet determinantu)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je libovolná matice řádu $n \geq 0$. Potom

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} \cdot a_{s,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{s,k}| \tag{5.31}$$

pro každé $s \in \{1, \dots n\}$. Výpočet pomocí tohoto vzorce nazýváme výpočtem determinantu matice $\boldsymbol{A}$ rozvojem podle s–tého řádku.

Výpočet determinantu

Důkaz: Označme $\boldsymbol{r}_i$ i–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$, $i = 1, \dots, n$. Tedy

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{A}(i,:), \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom matici $\boldsymbol{A}$ lze zapsat stručně takto

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_{s-1} \\ \boldsymbol{r}_s \\ \boldsymbol{r}_{s+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n \end{pmatrix}.$$

Z této matice obdržíme postupnými výměnami dvou po sobě jdoucích řádků matici $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_s \\ \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_{s-2} \\ \boldsymbol{r}_{s-1} \\ \boldsymbol{r}_{s+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n \end{pmatrix}.$$

Matici $\boldsymbol{B}$ jsme obdrželi z matice $\boldsymbol{A}$ podle věty 5.4 postupně celkem $(s-1)$ vzájemnými výměnami dvou po sobě jdoucími řádků. Každá výměna pořadí dvou řádků má za následek změnu znamení determinantu. Poněvadž těchto výměn bylo celkem $s-1$, platí

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{s-1}\,|\boldsymbol{B}|\,. \tag{5.32}$$

Podle definice hodnoty determinantu matice $\boldsymbol{B}$ dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}\cdot b_{1,k}\cdot|\boldsymbol{B}_{1,k}|\,.$$

Poněvadž $b_{1,k} = a_{s,k}$ a $\boldsymbol{B}_{1,k} = \boldsymbol{A}_{s,k}$, dostáváme s ohledem na (5.32) vztah

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{s-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}\cdot a_{s,k}\cdot|\boldsymbol{A}_{s,k}|.$$

Tedy skutečně platí vztah (5.31), to jest

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{s+k}\cdot a_{s,k}\cdot|\boldsymbol{A}_{s,k}|\,. \qquad \square$$

Příklad 5.7. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Poněvadž ve druhém řádku má matice $\boldsymbol{A}$ tři nulové prvky a jenom jeden nenulový prvek, provedeme výpočet determinatu dané matice rozvojem podle druhého řádku. Podle předcházející věty obdržíme

$$|\boldsymbol{A}| = -0\cdot|\boldsymbol{A}_{2,1}| + 0\cdot|\boldsymbol{A}_{2,2}| + 3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot|\boldsymbol{A}_{2,4}| =$$
$$= -3\cdot(-2) = 6.$$

Vztah mezi determinantem matice $\boldsymbol{A}$ a determinantem matice $\boldsymbol{A}^T$.

Zabývejme se nyní vztahem mezi hodnotou determinantu matice $\boldsymbol{A}$ a matice k ní transponované $\boldsymbol{A}^T$.

Připomeňme si, že matice $\boldsymbol{A}^T$ je transponovaná k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže každý i–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je i–tým sloupcem matice $\boldsymbol{A}^T$.

Lehce nahlédneme, že platí vztah

$$(\boldsymbol{A}_{i,j})^T = (\boldsymbol{A}^T)_{j,i}. \tag{5.33}$$

Doporučuji, aby jste si tento vztah sami dokázali. Abychom demonstrovali pravdivost tohoto vztahu, uveďme následující příklad.

Příklad 5.8. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že např.

$$(\boldsymbol{A}^T)_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A}_{3,2})^T.$$

Dokažme nyní, platnost této věty.

Věta 5.7.

Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu n. Potom

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T). \tag{5.34}$$

Důkaz: Větu dokážeme užitím matematické indukce. Věta je evidentně správná pro matice řádu $n = 1$. Předpokládejme nyní, že věta je správná pro matice řádu n a dokažme, že je pak správná i pro matice řádu $n+1$. Nechť tedy $\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Označme $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^T$, takže

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \dots & \widetilde{a}_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{k,n+1} & \widetilde{a}_{k,n+2} & \dots & \widetilde{a}_{k,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{n+1,1} & \widetilde{a}_{n+1,2} & \dots & \widetilde{a}_{n+1,n+1} \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } \widetilde{a}_{i,j} = a_{j,i}$$

Rozvojem podle i–tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{i+k} a_{i,k} |A_{i,k}|. \tag{5.35}$$

Rozvojem podle k–tého řádku matice $\tilde{\boldsymbol{A}}$ dostáváme

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{k+i} \widetilde{a}_{k,i} |\tilde{\boldsymbol{A}}_{k,i}|. \tag{5.36}$$

Vzhledem k tomu, že $\widetilde{a}_{k,i} = a_{i,k}$ a poněvadž podle (5.33) je $(\boldsymbol{A}_{i,j})^T = (\boldsymbol{A}^T)_{j,i} = \tilde{\boldsymbol{A}}_{j,i}$, lze tento vztah přepsat na tvar

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{k+i} a_{i,k} |(\boldsymbol{A}_{i,k})^T|. \tag{5.37}$$

Poněvadž podle indukčního předpokladu je věta správná pro matice řádu n, je $|(\boldsymbol{A}_{i,k})^T| = |\boldsymbol{A}_{i,k}|$, takže

$$|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{k+i} a_{i,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|. \tag{5.38}$$

Provedeme-li výpočet $|\boldsymbol{A}|$ podle (5.35) pro $i = 1, 2, \ldots, n+1$ a tyto obdržené výsledky sečteme, dostáváme

$$(n+1)|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+k} \sum_{k=1}^{n+1} a_{i,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|. \tag{5.39}$$

Podobně, provedeme-li výpočet $|\tilde{\boldsymbol{A}}|$ podle (5.37) pro $k = 1, 2, \ldots, n+1$ a tyto obdržené výsledky sečteme, dostáváme

$$(n+1)|\tilde{\boldsymbol{A}}| = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+k} \sum_{k=1}^{n+1} a_{i,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|. \tag{5.40}$$

Porovnáním (5.39) a (5.40), dostáváme, že

$$det\boldsymbol{A} = det\boldsymbol{A}^T.$$

□

Bezprostředním důsledkem této věty je následující věta, která ukazuje způsob vyčíslení determinantu matice rozvojem podle libovolného sloupce matice.

Výpočet determinantu

Věta 5.8. (Výpočet determinantu)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice n–tého řádu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,j} & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Nechť j je libovolný index jejího sloupce. Potom

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{k,j}\, |\boldsymbol{A}_{k,j}|. \tag{5.41}$$

Důkaz: Vzorec (5.41) je výpočet determinantu matice $\boldsymbol{A}^T$ podle jejího j-tého řádku. $\square$

Příklad 5.9. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

rozvojem podle druhého sloupce.

Řešení. Dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Po vyčíslení obdržíme $|\boldsymbol{A}| = 0$.

5.2 Vlastnosti determinantů

V minulé části jsme zavedli pojem determinantu matice řádu n a ukázali jsme způsob jeho výpočtu rozvojem podle jejího libovolného řádku, resp. jejího libovolného sloupce. Tento způsob výpočtu je pro matice vyššího řádu značně náročný na počet prováděných aritmetických operací.

Úkol. *Odhadněte počet operací sečítání a násobení pro vyčíslení determinantu matice řádu* $n = 100$.

Proto si ukážeme jinou metodu, která vychází z některých vlastností determinantů matic.

Začněme s několika větami, které nám pomohou při výpočtu hodnoty determinantu matice $\boldsymbol{A}$. Zejména sledujme vztah mezi determinantem matice $\boldsymbol{A}$ a determinantem matice $\boldsymbol{B}$, která vznikla z $\boldsymbol{A}$ elementárními transformacemi.

Věta 5.9.

Nechť $\boldsymbol{A}$ *je matice řádu* $n \geq 1$. *Nechť všechny prvky v některém jejím řádku (resp. sloupci) jsou rovny* 0. *Potom* $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Důkaz: Tvrzení vychází z výpočtu determinantu matice rozvojem podle řádku (sloupce), jehož všechny prvky jsou rovny 0. $\square$

Výpočet
$|\mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}|$

Věta 5.10. (Výpočet $|\mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}|$)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu n. Nechť matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ vynásobením libovolného jejího řádku číslem $\alpha \neq 0$. (Poznamenejme, že $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}$.) Potom platí

$$|\boldsymbol{B}| = \alpha \cdot |\boldsymbol{A}|,$$

tedy

$$|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{\alpha} \det(\mathcal{H}1(i,\alpha))\boldsymbol{A}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Důkaz: Důkaz vyplývá bezprostředně z výpočtu determinantu matice $\boldsymbol{B}$ rozvojem podle i-tého řádku. □

Uveďme si nyní pomocnou větu, kterou později využijeme při důkazech několika vět.

Věta 5.11. (Pomocná.) *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu n. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \cdot a_{j,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{i,k}| = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & \text{pro } j = i \\ 0 & \text{pro } j \neq i \end{cases} \tag{5.42}$$

Důkaz: Označme $\boldsymbol{C}$ matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její i–tý řádek nahradíme vektorem $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$. Potom platí $|\boldsymbol{C}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot c_k \cdot |\boldsymbol{A}_{i,k}|$. Je-li $\boldsymbol{c} = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$, potom $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$, takže $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}|$. Je-li $\boldsymbol{c} = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,n})$, kde $i \neq j$, má matice $\boldsymbol{C}$ dva stejné řádky (i–tý řádek je roven j–tému řádku). V tomto případě je $|\boldsymbol{C}| = 0$. Platí tedy (5.42). □

Analogická věta platí pro sloupce. Uveďme si ji:

Věta 5.12. (Pomocná.) *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu n. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \cdot a_{k,j} \cdot |\boldsymbol{A}_{k,i}| = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & \text{pro } j = i \\ 0 & \text{pro } j \neq i \end{cases} \tag{5.43}$$

Výpočet
$|\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{A}|$

Věta 5.13. (Výpočet $|\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{A}|$)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu n. Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že k jejímu j–tému řádku připočteme její i–tý řádek, kde $i \neq j$. Potom $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. (Poznamenejme, že $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{A}$.) Tedy

$$|\boldsymbol{A}| = \det(\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{A}).$$

Důkaz: Rozvojem podle j– tého řádku dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \cdot (a_{j,k} + a_{i,k}) \cdot |\boldsymbol{A}_{j,k}|.$$

Odtud dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \cdot a_{j,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{j,k}| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \cdot a_{i,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{j,k}| \, .$$

Podle (5.42) dostáváme odtud $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. □

Věta 5.14. (Výpočet $|\widetilde{\mathcal{H}}3(r,s)\boldsymbol{A}|$)

Výpočet $|\widetilde{\mathcal{H}}3(r,s)\boldsymbol{A}|$

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu n. Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ výměnou jejího r–tého a s–tého řádku (sloupce). (Poznamenejme, že $\boldsymbol{B} = \widetilde{\mathcal{H}}3(r,s)\boldsymbol{A}$). Potom

$$|\boldsymbol{A}| = -\,|\boldsymbol{B}| \, ,$$

tedy

$$|\boldsymbol{A}| = -\det(\widetilde{\mathcal{H}}3(r,s)\boldsymbol{A}).$$

Důkaz: Věta je pro řádky citací již dříve uvedené věty 5.5 a pro sloupce vychází z věty 5.7. □

Věta 5.15. (Výpočet $|\mathcal{H}3(r,s)\boldsymbol{A}|$)

Výpočet $|\mathcal{H}3(r,s)\boldsymbol{A}|$

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu n a nechť $r \neq s$ jsou dva její řádkové (sloupcové) indexy. Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ výměnou jejího r–tého a s–tého řádku (sloupce) a vynásobením jejího s–tého řádku v takto vzniklé matici číslem (-1). (Poznamenejme, že $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}3(r,s)\boldsymbol{A}$). Potom

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| \, ,$$

tj.

$$|\boldsymbol{A}| = \det(\mathcal{H}3(r,s)\boldsymbol{A}).$$

Důkaz: Věta je důsledkem vět 5.14 a věty 5.10. □

Věta 5.16.

Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu n, jejíž dva řádky jsou stejné. Potom $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Důkaz: Označme $\boldsymbol{B}$ matici, která vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou obou stejných řádků. Podle věty 5.14 je $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|$. Poněvadž však $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ (vyměnili jsme vzájemně dva stejné řádky), je $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. Tedy

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|.$$

To je možno jen v případě, že $|\boldsymbol{A}| = 0$. □

Příklad 5.10. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

První a třetí řádek této matice jsou stejné. Výpočtem se přesvěčte, že $|\boldsymbol{A}| = 0$.

Věta 5.17. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu $n > 1$. Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že k jejímu j–tému řádku přičteme α–násobek jejího i–tého řádku, kde $i \neq j$. Potom $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. (Připomeňme, že $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}4(i, \alpha, j, 1)\boldsymbol{A}$).*

Důkaz: Matice $\boldsymbol{B}$ vznikla po sobě následujícími elementárními transformacemi matice $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{C} = \mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{D} = \mathcal{H}2(i, j)\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{B} = \mathcal{H}1(i, 1/\alpha)\boldsymbol{D}.$$

Podle předcházejících vět je

$$|\boldsymbol{C}| = \alpha \cdot |\boldsymbol{A}|, \quad |\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{C}|, \quad |\boldsymbol{B}| = \frac{1}{\alpha}|\boldsymbol{D}|.$$

Odtud $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|$. □

Výpočet $|\mathcal{H}4(i, \alpha, j, \beta)\boldsymbol{A}|$

Věta 5.18. (Výpočet $|\mathcal{H}4(i, \alpha, j, \beta)\boldsymbol{A}|$)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu $n > 1$. Nechť α, β jsou reálná čísla, $\beta \neq 0$. Dále nechť i, j jsou řádkové indexy matice $\boldsymbol{A}$. Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice, jejíž j–tý řádek je roven součtu α–násobku i–tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a β–násobku j–tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a ostatní řádky matice $\boldsymbol{B}$ se rovnají odpovídajícím řádkům matice $\boldsymbol{A}$. Potom

$$|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{\beta}|\boldsymbol{B}|,$$

tj.

$$|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{\beta}|\mathcal{H}4(i, \alpha, j, \beta)\boldsymbol{A}|.$$

(Poznamenejme, že $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}4(i, \alpha, j, \beta)\boldsymbol{A}$).

Důkaz: Matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ postupně těmito úpravami.

$$\boldsymbol{C} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{D} = \mathcal{H}1(\beta,j)\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{F} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{B} = \mathcal{H}1(i,1/\alpha)\boldsymbol{F}.$$

Potom s ohledem na věty 5.13, 5.10 dostáváme $|\boldsymbol{A}| = 1/\beta \cdot |\boldsymbol{B}|$. □

Důsledek. Nechť $\boldsymbol{X}$ je matice typu (n,n). Nechť $\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}$, kde $\alpha \neq 0$, $\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$. Potom s ohledem na věty 5.10, 5.13 platí

$$\det(\boldsymbol{X}) = 0 \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{Y}) = 0, \quad \det(\boldsymbol{X}) = 0 \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{Z}) = 0.$$

Výpočet determinantu matice jejím převodem na horní trojúhelníkovou matici

Napřed si ukažme způsob výpočtu determinantu horní trojúhelníkové matice. V dalších úvahách si ukážeme dva postupy výpočtu, které se opírají o transformaci matice na horní trojúhelníkovou matici.

Věta 5.19. (Determinant trojúhelníkové matice)

Determinant trojúhelníkové matice

Nechť $\boldsymbol{B}$ je horní trojúhelníková matice $n-$tého řádu:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

Potom

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1} \cdot b_{2,2} \cdot \ldots \cdot b_{n,n}. \tag{5.45}$$

Důkaz: Proveďme výpočet hodnoty determinantu této matice rozvojem podle jejího prvního sloupce. Dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = (-1)^{1+1} \cdot b_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ 0 & b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Hodnotu determinantu takto vzniklé matice určíme opět rozvojem podle prvního sloupce. Dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1}\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-1)^{1+1}\cdot b_{2,2}\cdot\begin{vmatrix} b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Tímto způsobem pokračujeme, až po n krocích obdržíme hledaný vzorec (5.45)

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1}\cdot b_{2,2}\cdot\ldots\cdot b_{n,n}.$$ □

Příklad 5.11. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5.46}$$

Řešení. Podle vzorce (5.45) dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = 5\cdot 4\cdot 8\cdot 2 = 320.$$

Algoritmy výpočtu determinantu matice $\boldsymbol{A}$

Ukažme si nyní dva algoritmy na výpočet determinantu matice $\boldsymbol{A}$ založené na elementárních transformacích, jimiž se matice $\boldsymbol{A}$ transformuje na horní trojúhelníkovou matici.

První algoritmus používá jen transformace $\mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{A}$, $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,1)\boldsymbol{A}$, jimiž se nemění hodnota determinantu matice $\boldsymbol{A}$, viz věty 5.15 a 5.17.

Druhý algoritmus používá transformace $\tilde{\mathcal{H}}3(i,j)\boldsymbol{A}$, $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{A}$, kde $\beta \neq 0$. Těmito tranformacemi se hodnota determinantu mění, viz věty 5.14 a 5.18.

Výpočet determinantu

Algoritmus 1.

Předpokládejme, že proměnné $\boldsymbol{A}$ je přiřazena čtvercová matice a proměnné n je přiřazen její řád. Ve výkladu používáme toto označení:
$D = \det(\boldsymbol{A})$ ... $\boldsymbol{A}$ je výchozí matice,
j ... pořadové číslo sloupce, se kterým pracujeme,
i, p ... čísla řádků.

Začátek

B1 Začneme s úpravou prvního sloupce. Položíme

$$j := 1.$$

B2 Jestliže

$$a_{i,j} = 0 \qquad \text{pro } i = j, j+1, \ldots, n, \tag{5.47}$$

(to jest jestli prvky v j-tém sloupci v řádcích $i = j, \ldots, n$ jsou nulové), položíme

$$D := 0$$

a výpočet je ukončen.

Jestliže alespoň jeden z prvků $a_{i,j}$, $i = j, \ldots, n$, je nenulový, jdeme k bodu **B3**.

B3 Zvolme $p \in \{j, j+1, \ldots, n\}$, pro něž je

$$a_{p,j} \neq 0.$$

Touto volbou zvolíme p-tý řádek jako hlavní pro následné eliminace. Jdeme k **B4**.

B4 Jestliže $p = j$, je j-tý řádek hlavní. Jdeme k **B6**. Je-li $p \neq j$, jdeme k **B5**.

B5 Poněvadž $p \neq j$, vyměníme navzájem p-tý a j-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ a po výměně násobíme j-tý řádek číslem -1. Tento úkon jsme označili jako elementární transformaci $\mathcal{H}3$. Je tedy

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}3(j, p)\boldsymbol{A}. \tag{5.48}$$

Po této transformaci je j-tý řádek hlavním řádkem. Zřejmě je $a_{j,j} \neq 0$. Pro matici $\boldsymbol{A}$ určenou vztahem (5.48) platí

$$D = \det(\boldsymbol{A}).$$

Jdeme k **B6**.

B6 V j-tém sloupci provedeme eliminaci prvků

$$a_{j+1,j}, \ldots, a_{n,j}$$

takto:

b1. Položme

$$i := j + 1.$$

Jdeme k b2.

b2. Jestliže

$$a_{i,j} = 0$$

jdeme k b4. Jestliže $a_{i,j} \neq 0$, jdeme k b3.

b3. Hlavní řádek, to jest j-tý řádek, násobený číslem $-\frac{a_{i,j}}{a_{j,j}}$ přičteme k i-tému řádku. (Hlavní řádek byl zvolen tak, že $a_{j,j} \neq 0$.) Tento úkon odpovídá elementární transformaci

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{H}4\left(j, -\frac{a_{i,j}}{a_{j,j}}, i, 1\right)\boldsymbol{A}. \tag{5.49}$$

V takto vzniklé matici $\boldsymbol{A}$ je $a_{i,j} = 0$. Pro vzniklou matici v (5.49) platí

$$D = \det(\boldsymbol{A}).$$

Jdeme k b4.

b4. Položme

$$i := i + 1.$$

Jestliže $i \leq n$, jdeme k b2. Je-li $i = n + 1$, jdeme k **B7**.

B7 Přejdeme k dalšímu sloupci. Položme

$$j := j + 1.$$

Je-li $j \leq n - 1$, jdeme k **B2**. Je-li $j = n$, jdeme k **B8**.

B8 Matice $\boldsymbol{A}$ je již horní trojúhelníkovou maticí. Je tedy

$$D := a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

Výpočet je ukončen.

Algoritmus 2.

Předpokládejme, že proměnné $\boldsymbol{A}$ je přiřazena čvercová matice a proměnné n je přiřazen její řád. Ve výkladu používáme toto označení:
$D = \det(\boldsymbol{A}) \dots \boldsymbol{A}$ je výchozí matice,
$\gamma \dots$ proměnná pro sledování hodnoty D. Na začátku výpočtu položíme $\gamma := 1$, takže $D = \gamma \cdot \det \boldsymbol{A}$.
$j \dots$ pořadové číslo sloupce, se kterým pracujeme,
$i, p \dots$ pořadová čísla řádků.

Začátek

B1 Položme

$$\gamma := 1, \quad j := 1.$$

Začneme s úpravou prvního sloupce.

B2 Jestliže

$$a_{i,j} = 0 \qquad \text{pro } i = j, j+1, \dots, n, \tag{5.50}$$

(to jest jestli prvky v j-tém sloupci v řádcích $i = j, \dots, n$ jsou nulové), položíme

$$D := 0$$

a výpočet je ukončen.
Jestliže alespoň jeden z prvků $a_{i,j}$, $i = j, \dots, n$, je nenulový, jdeme k bodu **B3**.

B3 Zvolme $p \in \{j, j+1, \dots, n\}$, pro něž je

$$a_{p,j} \neq 0.$$

Touto volbou zvolíme p-tý řádek jako hlavní pro následné eliminace. Jdeme k **B4**.

B4 Jestliže $p = j$, je j-tý řádek hlavní. Jdeme k **B6**. Je-li $p \neq j$, jdeme k **B5**.

B5 Poněvadž $p \neq j$, vyměníme navzájem p-tý řádek a j-tý řádek matice $\boldsymbol{A}$. Tento úkon jsme označili jako elementární transformaci $\widetilde{\mathcal{H}}3$. Je tedy

$$\boldsymbol{A} := \widetilde{\mathcal{H}}3(j,p)\boldsymbol{A}. \tag{5.51}$$

Po této transformaci je p-tý řádek hlavním řádkem. Zřejmě je $a_{j,j} \neq 0$. Poněvadž podle věty 5.14 se výmennou dvou řádků matice změní znaménko hodnoty determinantu, položíme $\gamma := -\gamma$. Je tedy

$$D = \gamma \cdot \det(\boldsymbol{A}),$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matice vzniklá transformací (5.51).

B6 V j-tém sloupci provedeme eliminaci prvků

$$a_{j+1,j}, \ldots, a_{n,j}$$

takto:

b1. Položme

$$i := j + 1.$$

Jdeme k b2.

b2. Jestliže

$$a_{i,j} = 0$$

jdeme k b4. Jestliže $a_{i,j} \neq 0$, jdeme k b3.

b3. Hlavní řádek, to jest j-tý řádek, násobený číslem $-a_{i,j}$ přičteme k násobku i-tého řádku číslem $a_{j,j}$. Tento úkon odpovídá elementární transformaci

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4\,(j, -a_{i,j}, i, a_{j,j})\,\boldsymbol{A}. \tag{5.52}$$

V takto vzniklé matici $\boldsymbol{A}$ je $a_{i,j} = 0$. S ohledem na větu 5.18 položme

$$\gamma := \frac{1}{a_{j,j}}\gamma.$$

Pro matici $\boldsymbol{A}$ vzniklou transformací (5.52) platí

$$D = \gamma \cdot \det \boldsymbol{A}.$$

Jdeme k b4.

b4. Položme

$$i := i + 1.$$

Jestliže $i \leq n$, jdeme k b2. Je-li $i = n + 1$, jdeme k **B7**.

B7 Přejdeme k dalšímu sloupci. Položme

$$j := j + 1.$$

Je-li $j \leq n - 1$, jdeme k **B2**. Je-li $j = n$, jdeme k **B8**.

B8 Matice $\boldsymbol{A}$ je již horní trojúhelníkovou maticí. Položme

$$D := \gamma a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

Výpočet je ukončen. D je hledaná hodnota determinantu.

Poznámky k popisu při řešení úloh.

Při popisu řešení příkladů je značení **B1 – B7** z popisu algoritmu doplněno údajem o číslu sloupce, s nímž se pracuje. Např.

B1-2, B2-2,. . . , B7-2

značí, že se provádějí úkony popsané v **B1, B2,. . . , B7** pro $j = 2$.

Označení b1, b2, b3, b4 v popisu algoritmů je doplněno údajem o číslu sloupce a o čísle řádku, s nimiž se pracuje, a to takto:

b1-$j.i$, b2-$j.i$, b3-$j.i$, b4-$j.i$,

což je aplikování úkonů v popsaných v b1, b2, b3, b4 v pro sloupec j a řádek i. Např.

b2-3.4

je označení úkonů uvedených v b2 pro třetí sloupec a čtvrtý řádek.

Příklad 5.12. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{5.53}$$

pomocí její transformace na horní trojúhelníkovou matici.

Řešení. Použijme algoritmus 1.

Proměnné $\boldsymbol{A}$ přiřaďme danou matici a proměnné n její řád, takže

$$n := 4.$$

B1-1 Začneme s 1. sloupcem. Položme

$$j := 1.$$

B2-1 Všechny prvky matice $\boldsymbol{A}$ v prvním sloupci, to jest prvky

$$a_{1,1}, a_{2,1}, a_{3,1}, a_{4,1}$$

jsou nenulové. Jdeme k **B3-1**.

B3-1 Zvolíme $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ tak, aby $a_{p,1} \neq 0$. Položme $p := 1$, takže první řádek volíme jako hlavní. Jdeme k **B4-1**.

B4-1 Poněvadž $p = j(= 1)$, je již hlavní řádek v prvním řádku (j-tém řádku). Neprovádíme tedy výměnu řádků a jdeme k **B6-1**.

B6-1 Provedeme eliminaci prvků

$$a_{2,1}, a_{3,1}, a_{4,1}$$

v prvním sloupci a to takto:

b1-1.2 Položme $i := 2$. Postoupíme k b2-1.2.

b2-1.2 Poněvadž $a_{i,1}$, to jest $a_{2,1} = 2 \neq 0$, jdeme k b3-1.2.

b3-1.2 Použijeme transformaci

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(1, -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}, 2, 1)\boldsymbol{A}. \qquad (5.54)$$

Po této transformaci bude druhý řádek roven

$$\boldsymbol{A}(2, :) = -\frac{2}{1}(1, 2, 4, 0) + (2, 1, 4, 5) = (0, -3, -4, -5).$$

Ostatní řádky se transformací nemění. Transformací (5.54) tedy dostáváme

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 8 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinant této matice je roven determinantu zadané matice (5.53). Jdeme k b4-1.2.

b4-1.2 Položme

$$i := i + 1, \quad \text{takže } i = 3.$$

Poněvadž $i < n$, tj. $3 < 4$, jdeme k b2-1.3.

b2-1.3 Poněvadž $a_{i,1}$, to jest $a_{3,1} = 8 \neq 0$, jdeme k b3-1.3.

b3-1.3 Použijeme transformaci

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(1, -\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}, 3, 1)\boldsymbol{A}. \qquad (5.55)$$

Po této transformaci bude třetí řádek roven

$$\boldsymbol{A}(3, :) = -\frac{8}{1}(1, 2, 4, 0) + (8, 2, 4, 3) = (0, -14, -28, 3).$$

Ostatní řádky se transformací nemění. Transformací (5.55) tedy dostáváme

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -14 & -28 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinant této matice je roven determinantu zadané matice (5.53). Jdeme k b4-1.3.

b4-1.3 Položme

$$i := i + 1, \quad \text{takže } i = 4.$$

Poněvadž $i = n$, tj. $4 = 4$, jdeme k b2-1.4.

b2-1.4 Poněvadž $a_{i,1}$, to jest $a_{4,1} = 1 \neq 0$, jdeme k b3-1.4.

b3-1.4 Použijeme transformaci

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(1, -\frac{a_{4,1}}{a_{1,1}}, 4, 1)\boldsymbol{A}. \tag{5.56}$$

Po této transformaci bude čtvrtý řádek roven

$$\boldsymbol{A}(4,:) = -\frac{1}{1}(1,2,4,0) + (1,2,0,4) = (0,0,-4,4).$$

Ostatní řádky se transformací nemění. Transformací (5.56) tedy dostáváme

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -14 & -28 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinant této matice je roven determinantu zadané matice (5.53). Jdeme k b4-1.4.

b4-1.4 Položme

$$i := i + 1, \quad \text{takže } i = 5.$$

Poněvadž $i > n$, tj. $5 > 4$, je první sloupec v požadovaném tvaru.

Půjdeme tedy k dalšímu sloupci. Položme tedy

$$j := j + 1, \quad \text{takže } j = 2.$$

Jdeme k bodu **B2-2**.

B2-2 Prvky

$$a_{2,2}, \ a_{3,2}$$

ve druhém sloupci jsou od nuly různé. Jdeme k **B3-2**.

B3-2 Zvolme $p \in \{2, 3\}$. Zvolme $p := 2$, takže 2. řádek volíme jako hlavní. Jdeme k **B4-2**.

B4-2 Poněvadž $p = j (= 2)$, je již hlavní řádek v 2. řádku (j-tém řádku). Neprovádíme tedy výměnu řádků a jdeme k **B6-2**.

B6-2 Provedeme eliminaci prvků

$$a_{3,2}, a_{4,2}$$

ve 2. sloupci a to takto:

b1-2.3 Položme $i := 3$ (to jest $i := j + 1$). Postoupíme k b2-2.3.

b2-2.3 Poněvadž $a_{i,2}$, to jest $a_{3,2} \neq 0$, jdeme k b3-2.3.

b3-2.3 Použijeme transformaci

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(2, -\frac{a_{3,2}}{a_{2,2}}, 3, 1)\boldsymbol{A}. \tag{5.57}$$

Po této transformaci bude 3. řádek roven

$$\boldsymbol{A}(3,:) = -\frac{14}{3}(0,-3,-4,5) + (0,-14,-28,3) = (0,0,-\frac{28}{3},-\frac{61}{3}).$$

Ostatní řádky se transformací nemění. Transformací (5.57) tedy dostáváme matici

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{3} & -\frac{61}{3} \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinant této matice je roven determinantu zadané matice (5.53). Jdeme k b4-2.3.

b4-2.3 Položme

$$i := i+1, \quad \text{je tedy } i = 4.$$

Poněvadž $i = n$, jdeme k b2-2.4

b2-2.4 Poněvadž $a_{4,2} = 0$, to jest $a_{i,j} = 0$, jdeme k b4-2.4.

b4-2.4 Položme

$$i := i+1, \quad \text{tedy } i = 5.$$

Poněvadž $i = 5 > n$, jdeme k B7-2.

B7-2 Přejdeme k dalšímu sloupci. Položme $j := j+1$, takže $j = 3$. Poněvadž $j = 3 \le n-1$ $(3 = 3)$, jdeme k **B2-3**.

B2-3 Prvky

$$a_{3,3},\ a_{4,3}$$

ve třetím sloupci jsou nenulové. Jdeme k bodu **B3-3**.

B3-3 Zvolme $p \in \{3,4\}$. Položmeme $p := 3$, takže 3. řádek zvolíme jako hlavní. Jdeme k **B4-3**.

B4-3 Poněvadž $p = j(= 3)$, je již hlavní řádek v 3. řádku (j-tém řádku). Neprovádíme tedy výměnu řádků a jdeme k **B6-3**.

B6-3 Provedeme eliminaci prvků ve třetím sloupci a to takto:

b1-3.4 Položme $i := 4$ (to jest $i := j+1$). Postoupíme k bodu b2-3.4.

b2-3.4 Poněvadž $a_{i,j} \neq 0$, to jest $a_{4,3} \neq 0$, jdeme k b3-3.4.

b3-3.4 Použijeme transformaci

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(3, -\frac{a_{4,3}}{a_{3,3}}, 4, 1)\boldsymbol{A}. \tag{5.58}$$

Po této transformaci bude 4. řádek roven

$$\boldsymbol{A}(4,:) = -\frac{3}{7}(0,0,-\frac{28}{3},-\frac{61}{3}) + (0,0,-4,4) = (0,0,0,\frac{89}{7}).$$

Ostatní řádky se transformací nemění. Transformací (5.58) tedy dostáváme matici

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{3} & -\frac{61}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{89}{7} \end{pmatrix}$$

Determinant této matice je roven determinantu zadané matice. Jdeme k bodu b4-3.4.

b4-3.4 Položme

$$i := i + 1.$$

Je tedy $i = 5$. Poněvadž $i = n + 1$, jdeme k **B7-3**.

B7-3 Položme $j := j + 1$. Je tedy $j = 4$. Poněvadž $j = n$, jdeme k **B8**.

B8

$$D := 1 \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{28}{3}\right) \cdot \frac{89}{7}, \quad \text{tedy } D = 356,$$

kde D je determinant dané matice (5.53).

Příklad 5.13. Vypočítejte hodnotu determinantu matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. K výpočtu použijeme algoritmus 1, avšak popis řešení bude stručný.
Proměnné $\boldsymbol{A}$ přiřaďme danou matici a proměnné n přiřadíme řád matice, tedy $n := 4$. Označme $D = \det(\boldsymbol{A})$.

Položme $\boldsymbol{j} := 1$. Úpravy budeme provádět v 1. sloupci. Za hlavní řádek zvolíme řádek 2. Transformací

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}3(1,2)\boldsymbol{A}$$

dostaneme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro ni platí

$$\det(\boldsymbol{A}) = D.$$

Transformací

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{H}4(1,-2,2,1)\boldsymbol{A}$$

dostaneme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro tuto matici je $|\boldsymbol{A}| = D$.

Položme $\boldsymbol{j} := 2$. Úpravy budeme provádět v 2. sloupci. Za hlavní řádek zvolme 2. řádek matice $\boldsymbol{A}$. Transformací

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(2,3,4,1)\boldsymbol{A}$$

dostaneme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Pro ni platí $\det(\boldsymbol{A}) = D$.

Položme $\boldsymbol{j} := 3$. Úpravy budeme provádět v 3. sloupci. Za hlavní řádek zvolme 3. řádek. Transformací

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(3, -\frac{1}{2}, 4, 1)\boldsymbol{A}$$

dostaneme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Pro ni platí $\det(\boldsymbol{A}) = D$. Obdržená matice je horní trojúhelníková matice. Je tedy

$$D = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-5), \quad \text{tedy } D = -30.$$

Příklad 5.14. Vypočítejte determinant matice

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K výpočtu použijte algoritmus 2.

Řešení. Označme $D = \det(\boldsymbol{A})$, Položme $\gamma := 1$, takže $D = \gamma \cdot \det(\boldsymbol{A})$.

$\boxed{\text{Položme } j := 1.}$ Poněvadž $a_{11} = 0$, proveďme transformaci

$$\boldsymbol{A} := \tilde{\mathcal{H}}3(1, 3)\boldsymbol{A}$$

a položme $\gamma := -\gamma$. Dostáváme

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.59}$$

Potom platí $D = \gamma \cdot \det(\boldsymbol{A})$, kde $\boldsymbol{A}$ je matice (5.59). Za hlavní řádek zvolme 1. řádek. Transformací

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(1, 2, 2, 3)\boldsymbol{A}$$

dostáváme matici

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Položme $\gamma := \frac{1}{3}\gamma$. Potom $D = \gamma \cdot \det(\boldsymbol{A})$.

$\boxed{\text{Položme } j := 2.}$ Za hlavní řádek zvolíme 2. řádek. Transformací

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{H}4(2, -2, 3, 9)\boldsymbol{A}$$

dostaneme

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Položíme-li $\gamma := \frac{1}{9}\gamma$, platí

$$D = \gamma \cdot \det(\boldsymbol{A}).$$

Transformací

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(2, -3, 4, 9)\boldsymbol{A}$$

dostáváme

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Položíme-li $\gamma := \frac{1}{9}\gamma$, potom

$$D = \gamma . \det(\boldsymbol{A}).$$

$\boxed{\text{Položme } j := 3.}$ Za hlavní řádek zvolme 3. řádek. Transformací

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(3, 3, 4, 1)\boldsymbol{A}$$

dostáváme

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

Položíme-li $\gamma := 1 \cdot \gamma$, platí

$$D = \gamma \cdot \det(\boldsymbol{A}).$$

Poněvadž $\boldsymbol{A}$ je horní trojúhelníková matice, dostáváme

$$D = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot (-3) \cdot 9 \cdot 1 \cdot 36, \quad \text{takže } D = 4.$$

Poznámka k hodnosti matice

Singulární a regulární matice

Definice 5.2. Řekneme že čtvercová *matice* $\boldsymbol{A}$ je *regulární*, jestliže $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. Je-li $|A| = 0$, říkáme, že *matice* $\boldsymbol{A}$ je *singulární*.

Věta 5.20. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je daná čtvercová matice řádu n. Potom matice $\boldsymbol{A}$ je regulární, když a jenom když má hodnost n.*

Důkaz: Matici $\boldsymbol{A}$ převeďme elementárními transformacemi na horní schodovitou matici $\boldsymbol{B}$. Evidentně tato matice nemá nulový řádek, to jest má hodnost n, když a jenom když je horní trojúhelníkovou maticí s nenulovými diagonálními prvky, to jest, jestliže je regulární. □

Věta 5.21. (Věta o hodnosti matice)

Nechť $\boldsymbol{X}$ je nenulová matice typu (m, n). Potom matice $\boldsymbol{X}$ má řádkovou hodnost h, když a jenom když existuje taková submatice $\boldsymbol{A}$ matice $\boldsymbol{X}$ řádu $h \leq m$, že $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ a že determinant každé submatice matice $\boldsymbol{X}$ řádu většího než h, pokud existuje, má hodnotu rovnu 0.

Důkaz:

a) Dokažme: Jestliže matice $\boldsymbol{X}$ má řádkovou hodnost h, existuje taková submatice $\boldsymbol{A}$ matice $\boldsymbol{X}$ řádu $h \leq m$, že $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ a že determinant každé submatice matice $\boldsymbol{X}$ řádu $> h$, pokud existuje, má hodnotu rovnu 0.
Označme $\boldsymbol{Y}$ horní schodovitou matici, která vznikla z matice $\boldsymbol{X}$ elementárními transformacemi. Poněvadž matice $\boldsymbol{X}$ má hodnost h, má matice $\boldsymbol{Y}$ právě h nenulových řádků. Označme s_i nejmenší index, pro nějž je prvek $y_{i,s_i} \neq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, h$. Označme $\boldsymbol{B}$ submatici matice $\boldsymbol{Y}$ vytvořenou z řádků $1, 2, \ldots, h$ a sloupců $s_1, s_2, \ldots s_h$. Matice $\boldsymbol{B}$ je horní trojúhelníková matice řádu h s nenulovými diagonálními prvky. Tedy hodnota determinantu této matice je $\neq 0$. Determinant každé submatice matice $\boldsymbol{Y}$ řádu $> h$, pokud taková submatice existuje, má poslední řádek nulový a tedy jeho hodnota je rovna 0. Poněvadž každá submatice matice $\boldsymbol{Y}$ vznikla z matice $\boldsymbol{X}$ elementárními transformacemi, je první část věty dokázána.

b) Nechť existuje čtvercová submatice $\boldsymbol{C}$ matice $\boldsymbol{X}$ řádu h, jejíž determinant je nenulový a determinant každé submatice řádu $> h$, pokud takové submatice existují, mají nulovou hodnotu. Podle věty 5.20 jsou řádky matice $\boldsymbol{C}$ lineárně nezávislé, takže alespoň h řádků matice $\boldsymbol{X}$ je lineárně nezávislých. Má tedy matice $\boldsymbol{X}$ hodnost $\geq h$. Kdyby hodnost matice $\boldsymbol{X}$ byla $> h$, existovala by podle a) čtvercová submatice $\boldsymbol{X}$ řádu $> h$, jejíž determinant je $\neq 0$. To by bylo v rozporu s předpokladem. Tím je druhá část věty dokázána. □

Vztah mezi řádkovou a sloupcovou hodností matice.

Věta 5.22. (Řádková a sloupcová hodnost)
Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Potom její sloupcová hodnost je rovna její řádkové hodnosti.

Rovnost řádkové a sloupcové hodnosti

Důkaz: Připomeňme si, že řádková hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je největší počet jejich lineárně nezávislých řádků a sloupcová hodnost je největší počet jejich lineárně nezávislých sloupců. Označme h řádkovou hodnost matice $\boldsymbol{A}$ a $\widetilde{h}$ sloupcovou hodnost matice $\boldsymbol{A}$. Předpokládejme, že $h \neq \widetilde{h}$. Je uvidentní, že sloupcová hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je rovna řádkové hodnosti matice $\boldsymbol{A}^T$. Budeme tedy srovnávat řádkové hodnosti matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}^T$. Poněvadž podle předpokladu je řádková hodnost matice $\boldsymbol{A}$ rovna h, existuje taková submatice $\boldsymbol{B}$ matice $\boldsymbol{A}$ řádu h, že $det(\boldsymbol{B}) \neq 0$ a determinant každé submatice $\boldsymbol{F}$ matice $\boldsymbol{A}$ řádu $> h$ je roven 0. Poněvadž podle věty 5.7 je determinant každé matice roven deterinantu z matice k ní transponované, je $det(\boldsymbol{B}^T) \neq 0$ a $det(\boldsymbol{F}^T) = 0$. Tedy existuje podmatice matice $\boldsymbol{A}^T$ řádu h, jejíž determinat je různý od 0 a všechny submatice řádu $> h$ mají determinant roven 0. Tedy řádková hodnost matic $\boldsymbol{A}^T$ je rovna h. Je tedy $h = \widetilde{h}$. □

5.3 Použití determinantů

Přímá metoda řešení systému lineárních rovnic.

Již dříve jsme se seznámili s pojmem systému m lineárních algebraických rovnic o n neznámých

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5.60}$$

a s pojmem jeho řešení. Ukážeme si nyní, jak se toto řešení dá nalézt v případě, že $\boldsymbol{A}$ je čtvercová regulární matice. V další kapitole se budeme zabývat s pojmem řešení obecněji a uvedeme si několik metod vhodných k jeho nalezení. V této části uvedeme pouze nalezení řešení pomocí determinantů. *Tato metoda má sice velký význam z teoretického hlediska, avšak numericky je použitelná pouze pro řešení systému rovnic o relativně malém počtu neznámých.*

5.3.1 Cramerovo pravidlo

Věta 5.23. (Cramerovo pravidlo)
Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n, $\boldsymbol{b}$ je n–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je hledaný n–rozměrný vektor. Označme

$$\boldsymbol{B}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

Řešení systému n rovnic o n neznámých *matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její i–tý sloupec nahradíme vektorem pravých stran $\boldsymbol{b}$. Potom systém lineárních rovnic*

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{5.61}$$

má právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$, pro něž platí

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.62}$$

Důkaz: Dokažme především, že je-li vektor $\boldsymbol{x}$ řešením systému (5.61), potom platí (5.62). Poněvadž vektor $\boldsymbol{x}$ je řešením (5.61), platí

$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,j}x_j + \ldots + a_{k,n}x_n = b_k, \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.63}$$

Zvolme i, $1 \le i \le n$. Dokážeme, že pro x_i platí (5.62). Vynásobením (5.63) výrazem $(-1)^{k+i} \cdot |\boldsymbol{A}_{k,i}|$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot a_{k,j} \cdot |\boldsymbol{A}_{k,i}| \cdot x_j = b_k \cdot (-1)^{k+i} |\boldsymbol{A}_{k,i}|. \tag{5.64}$$

Sečtením rovnic (5.64) pro $k = 1, \ldots, n$, dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} (-1)^{k+i} |\boldsymbol{A}_{k,i}| = \sum_{k=1}^{n} b_k (-1)^{k+i} |\boldsymbol{A}_{k,i}|. \tag{5.65}$$

Použitím věty 5.42 odtud dostáváme

$$x_i \cdot |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}_i|,$$

odkud plyne (5.62).
Dokažme nyní, že jestliže $\boldsymbol{x}$ je vektor o složkách

$$x_k = \frac{|\boldsymbol{B}_k|}{|\boldsymbol{A}|}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{5.66}$$

potom $\boldsymbol{x}$ je řešením systému (5.61). Nechť j je jedno z čísel $1, \ldots, n$. Dosazením těchto hodnot x_k do levé strany j–té rovnice obdržíme veličinu, kterou označíme L. Dostáváme

$$L = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \frac{|\boldsymbol{B}_k|}{|\boldsymbol{A}|}.$$

Rozvojem determinantu $|\boldsymbol{B}_k|$ podle k–tého sloupce dostáváme odtud

$$L = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} b_i |\boldsymbol{A}_{i,k}|.$$

Provedením úpravy pak dostáváme

$$L = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-j} b_i \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|.$$

S ohledem na (5.42) odtud vyplývá

$$\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k = b_j,$$

takže vektor $\boldsymbol{x}$ vyhovuje j–té rovnici ($j = 1, \ldots, n$.) □

Příklad 5.15. Užitím Cramerova pravidla řešte následující systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array} \tag{5.67}$$

Řešení. Označíme-li $\boldsymbol{A}$ matici soustavy tohoto systému, $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých, je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{5.68}$$

Výpočtem zjistíme, že $|\boldsymbol{A}| = 6$. Je tedy matice $\boldsymbol{A}$ regulární a daný systém lze řešit Cramerovým pravidlem.
Matici $\boldsymbol{B}_1$ dostaneme tak, že první sloupec matice $\boldsymbol{A}$ nahradíme vektorem $\boldsymbol{b}$. Dostáváme tak matici

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_1| = -6.$$

Matici $\boldsymbol{B}_2$ dostaneme tak, že druhý sloupec matice $\boldsymbol{A}$ nahradíme vektorem $\boldsymbol{b}$. Dostáváme tak matici

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_2| = 6.$$

Matici $\boldsymbol{B}_3$ dostaneme z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její třetí sloupec nahradíme vektorem $\boldsymbol{b}$. Dostaneme tak matici

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_3| = 12.$$

Řešením systému (5.67) je tedy

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{B}_1|}{6} = \frac{-6}{6} = -1,$$

$$x_2 = \frac{|\boldsymbol{B}_2|}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

$$x_3 = \frac{|\boldsymbol{B}_3|}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

5.4 Přímý výpočet inverzní matice pomocí determinantů

Výpočet inverzní matice

V dřívějším pojednání jsme si zavedli pojem inverzní matice k dané matici $\boldsymbol{A}$. Řekli jsme, že matice $\boldsymbol{B}$ je inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Dá se dokázat, že matice $\boldsymbol{B}$ je inverzní k *regulární* čtvercové matici $\boldsymbol{A}$, jestliže platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}.$$

V tomto případě není tedy nutno požadovat splnění požadavku

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Nechť tedy matice $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n. Hledejme čtvercovou matici $\boldsymbol{B}$ tak, že

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}. \tag{5.69}$$

Zvolme $i \in \{1, \ldots, n\}$. Uvažujme i–tý sloupec $\boldsymbol{B}(:, i)$ matice $\boldsymbol{B}$ a i–tý sloupec $\boldsymbol{E}(:, i)$ matice $\boldsymbol{E}$, to jest sloupcové vektory

$$\boldsymbol{B}(:, i) = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \\ \vdots \\ b_{i-1,i} \\ b_{i,i} \\ b_{i+1,i} \\ \vdots \\ b_{n,i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}(:, i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \ldots i\text{–tý řádek} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Ze vztahu (5.69) vyplývá

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(:, i) = \boldsymbol{E}(:, i). \tag{5.70}$$

Tento systém rovnic řešme užitím Cramerova pravidla. Dostáváme

$$b_{j,\,i} := \frac{|\boldsymbol{C}_j|}{|\boldsymbol{A}|}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5.71}$$

kde $\boldsymbol{C}_j$ je matice, která vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ nahrazením jejího j–tého sloupce vektorem $\boldsymbol{E}(:, i)$. Determinant $|\boldsymbol{C}_j|$ vyčíslíme rozvojem podle j–tého sloupce. Jediný nenulový prvek v tomto sloupci je číslo 1 v i–tém řádku.Tedy

$$|\boldsymbol{C}_j| = (-1)^{i+j} \cdot |\boldsymbol{A}_{i,j}|\,. \tag{5.72}$$

Z (5.71), (5.72) vyplývá

$$b_{j,\,i} := (-1)^{i+j} \cdot \frac{|\boldsymbol{A}_{i,j}|}{|\boldsymbol{A}|}. \tag{5.73}$$

Z (5.73) pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ dostáváme matici $\boldsymbol{B}$. Vypočítejme nyní $\boldsymbol{BA}$. Užitím (5.43) dostáváme

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}.$$

Je tedy matice $\boldsymbol{B}$ maticí inverzní k matici $\boldsymbol{A}$.

Dosažený výsledek můžeme shrnout do následující věty.

Věta 5.24. (Výpočet inverzní matice)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n. Potom k matici $\boldsymbol{A}$ existuje právě jedna matice inverzní, označme ji $\boldsymbol{B}$. Její prvek $b_{i,j}$ se vypočítá podle vztahu

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{|\boldsymbol{A}_{j,i}|}{|\boldsymbol{A}|} \qquad \text{pro } i, j = 1, \ldots n. \tag{5.74}$$

Poznámka. Všimněte si pořadí indexů i, j u $b_{i,j}$, $\boldsymbol{A}_{j,i}$ v (5.74)!

Příklad 5.16. K matici $\boldsymbol{A}$ určete matici inverzní.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení. Výpočtem dostáváme

$$|\boldsymbol{A}| = -5$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,1}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1, \quad |\boldsymbol{A}_{1,2}| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -18,$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad |\boldsymbol{A}_{2,1}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2,$$

$$|\boldsymbol{A}_{2,2}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -11, \quad |\boldsymbol{A}_{2,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 5,$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |\boldsymbol{A}_{2,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$|\boldsymbol{A}_{3,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Tedy podle věty 5.24 dostáváme

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{|\boldsymbol{A}_{1,1}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{-|\boldsymbol{A}_{2,1}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{|\boldsymbol{A}_{3,1}|}{|\boldsymbol{A}|} \\ \frac{-|\boldsymbol{A}_{1,2}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{|\boldsymbol{A}_{2,2}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{-|\boldsymbol{A}_{3,2}|}{|\boldsymbol{A}|} \\ \frac{|\boldsymbol{A}_{1,3}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{-|\boldsymbol{A}_{2,3}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{|\boldsymbol{A}_{3,3}|}{|\boldsymbol{A}|} \end{pmatrix}.$$

Dosazením vypočítaných hodnot za jednotlivé determinanty dostáváme

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -18/5 & 11/5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku správnost výpočtu provedeme výpočtem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. Zjistíme, že oba tyto součiny jsou rovny matici $\boldsymbol{E}$.

5.5 Základní poznatky z kapitoly 4 a úlohy k procvičení

1. Definice determinantu matice.
2. Pravidla pro výpočet determinantů matic řádu 2, 3.
3. Věta o výpočtu determinantu rozvojem podle libovolného řádku, resp. libovolného sloupce matice.
4. Vztah mezi hodností matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{B}$, která z ní vznikla elementárními transformacemi.
5. Výpočet hodnoty determinantu matice její transformací na horní trojúhelníkovou matici.
6. Vztah mezi hodnotami determinantu z matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}^T$.
7. Cramerovo pravidlo na řešení systému lineárních rovnic.
8. Hledání inverzní matice.
9. Vztah mezi hodností matic a determinanty jejich submatic.

Úlohy

1. Vypočítejte hodnoty determinantů následujících matic

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

[$|\boldsymbol{A}| = 6$, $|\boldsymbol{B}| = -2$, $|\boldsymbol{C}| = 0$.]

2. Vypočítejte hodnoty determinantů následujících matic užitím Sarusova pravidla.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

[$|\boldsymbol{A}| = 112$, $|\boldsymbol{B}| = -17$, $|\boldsymbol{C}| = 0$.]

3. Určete vztah mezi hodnotami determinantů matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, aniž byste počítali jejich hodnoty. Proveďte zdůvodnění.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[$|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|$. Matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ postupnými výměnami těchto řádků: řádek 1 a řádek 3; řádek 2 a řádek 3; řádek 3 a řádek 4. Celkem třemi výměnami dvojic řádků. Je tedy $|\boldsymbol{B}| = (-1)^3 \cdot |\boldsymbol{A}|$, takže $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|$.]

4. Vypočítejte hodnoty determinantů následujících matic transformací na horní trojúhelníkovou matici.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[$|\boldsymbol{A}| = -8$, $|\boldsymbol{B}| = 178$.]

5. Užitím Cramerova pravidla řešte následující systémy lineárních rovnic

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -17 \\ 4 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$[\text{a) } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ b) } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.]$$

6. K dané matici $\boldsymbol{A}$ nalezněte matici inverzní a proveďte zkoušku správnosti výpočtu.

$$\text{a)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$[\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \text{ b)} \begin{pmatrix} -\frac{23}{105} & \frac{5}{21} & \frac{4}{35} & -\frac{4}{105} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{37}{105} & \frac{2}{21} & -\frac{11}{35} & \frac{11}{105} \\ \frac{6}{35} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{35} & -\frac{2}{35} \end{pmatrix}.]$$