Seminar 10

Model

Uvažujte následující model

$$
\begin{aligned}
y_t &= E_t y_{t+1} - \alpha_t(i_t - E_t\pi_{t+1}) + u_t & (1)\\
\pi_t &= \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa y_t + e_t & (2)\\
L_t &= \frac{1}{2}\left[\pi_t^2 + \lambda y_t^2\right] & (3)
\end{aligned}
$$

kde u_t a e_t jsou bílé šumy.

Problem 1

Předpokládejte, že poptávkový šok u_t nemůže být dokonale pozorován centrální bankou (centrální banka může sledovat vše ostatní). Dále předpokládejme, že centrální banka obdrží signál o šoku. Její odhad je dán jako $\tilde{u}_t = u_t + z_t$, kde z_t je bílý šum s rozptylem $E(z_t^2) = var(z_t) = \sigma_z^2$.

Napište podmínky prvního řádu pro optimální dikreční politiku. Vyřešte pro úrokovou míru. (Hint: Všechny budoucí očekávané proměnné jsou rovny nule kvůli dikreční politice a nepřítomnosti autokorelace) Jak nejistota ohledně u_t ovlivní monetární politiku?

V podmínkách diskrece je optimální politika v čase t určena minimalizací ztrátové funkce v obodbí t. Vzhledem k tomu, že u_t je nepozorovatelná veličina, nemůže CB přesně pozorovat y_t. Pracujeme tedy s očekávánými veličinami. Řešíme problém

$$
\begin{aligned}
\min_{i_t} E_t L_t &= \frac{1}{2} E_t\left[\pi_t^2 + \lambda y_t^2\right]\\
s.t.\quad E_t y_t &= E_t\left[y_{t+1} - \alpha_t(i_t - \pi_{t+1}) + u_t\right]\\
s.t.\quad E_t \pi_t &= E_t\left[\beta\pi_{t+1} + \kappa y_t + e_t\right]
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, že očekávané hodnoty jsou rovny nule, lze problém zjednodušit na:

$$
\begin{aligned}
\min_{i_t} E_t L_t &= \frac{1}{2} E_t\left[\pi_t^2 + \lambda y_t^2\right]\\
s.t.\quad E_t y_t &= -\alpha_t i_t + E_t u_t\\
s.t.\quad E_t \pi_t &= \kappa E_t y_t + e_t
\end{aligned}
$$

Podmínka prvního řádu je pak

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_t L_t}{\partial i_t} &= E_t\pi_t \frac{\partial E_t \pi_t}{\partial E_t y_t}\frac{\partial E_t y_t}{\partial i_t} + \lambda E_t y_t \frac{\partial E_t y_t}{\partial i_t} = 0\\
&= E_t\left[\pi_t \kappa(-\alpha_t) + \lambda y_t(-\alpha_t)\right] = 0\\
&= E_t\left[\pi_t\kappa + \lambda y_t\right] = 0
\end{aligned}
$$

Můžeme dosadit za $E_t\pi_t$ a E_ty_t z IS křivky a Phillipsovy křivky

$$
\begin{aligned}
E_t\left[\pi_t\kappa + \lambda y_t\right] &= 0 \\
E_t\left[\kappa(\kappa(-\alpha_t i_t + u_t) + e_t) + \lambda(-\alpha_t i_t + u_t)\right] &= 0
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, že $E_tu_t = \tilde{u}_t - z_t = \tilde{u}_t$ dostaneme

$$\kappa(\kappa(-\alpha_t i_t + \tilde{u}_t) + e_t) + \lambda(-\alpha_t i_t + \tilde{u}_t) = 0$$

Což již můžeme vyřešit pro úrokovou míru

$$
\begin{aligned}
\kappa^2(-\alpha_t i_t + \tilde{u}_t) + \kappa e_t + \lambda(-\alpha_t i_t + \tilde{u}_t) &= 0 \\
\kappa^2\alpha_t i_t + \lambda\alpha_t i_t &= \kappa^2\tilde{u}_t + \kappa e_t + \lambda\tilde{u}_t \\
i_t\left[\alpha_t(\kappa^2 + \lambda)\right] &= (\kappa^2 + \lambda)\tilde{u}_t + \kappa e_t \\
i_t &= \frac{1}{\alpha_t}\tilde{u}_t + \frac{\kappa}{\alpha_t(\kappa^2 + \lambda)}\,e_t
\end{aligned}
$$

Nejistota ohledně u_t neovlivňuje monetární politiku. Rozptyl u_t nevstupuje do reakční funkce CB (srovnej s druhým případem). Centrální banka reaguje na signál, který obdrží $\tilde{u}_t$, nemůže si nijak polepšit jiným chováním. Platí „ekvivalence jistoty“.

Problem 2

Předpokládejme, že α_t je dána jako $\alpha_t = \alpha + \varepsilon_t$, kde ε_t je šok s vlastnostmi bílého šumu s rozptylem $E(\varepsilon_t^2) = var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$. Dále předpokládejme, že centrální banka nastaví úrokové míry ještě před tím, než je šok ε_t realizován. Napište podmínky prvního řádu pro optimální diskreční politiku. Řešte pro úrokovou míru.

Jak ovlivní nejistota ohledně α_t monetární politiku? Vysvětlete rozdíl mezi aditivní nejistotou a multiplikativní nejistotou.

Řešíme podobný problém

$$
\begin{aligned}
\min_{i_t} E_tL_t &= \frac{1}{2}E_t\left[\pi_t^2 + \lambda y_t^2\right] \\
s.t. \quad E_ty_t &= E_t[y_{t+1} - \alpha_t(i_t - \pi_{t+1}) + u_t] \\
s.t. \quad E_t\pi_t &= E_t[\beta\pi_{t+1} + \kappa y_t + e_t]
\end{aligned}
$$

Což můžeme zjednodušit na

$$
\begin{aligned}
\min_{i_t} E_tL_t &= \frac{1}{2}E_t\left[\pi_t^2 + \lambda y_t^2\right] \\
s.t. \quad E_ty_t &= E_t[-\alpha_t i_t + u_t] \\
s.t. \quad E_t\pi_t &= E_t[\kappa u_t + e_t]
\end{aligned}
$$

Podmínka prvního řádu je

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_t L_t}{\partial i_t} &= E_t\pi_t \frac{\partial E_t \pi_t}{\partial E_t y_t}\frac{\partial E_t y_t}{\partial i_t} + \lambda E_t y_t \frac{\partial E_t y_t}{\partial i_t} = 0 \\ &= E_t[\pi_t \kappa(-\alpha_t) + \lambda y_t(-\alpha_t)] = 0\end{aligned}$$

Pozn. α_t je náhodná veličina, nelze vykrátit jako v předchozím případě.

Můžeme dosadit za π_t a y_t

$$\begin{aligned}E_t[\pi_t \kappa(-\alpha_t) + \lambda y_t(-\alpha_t)] &= 0 \\ E_t[-\kappa\alpha_t(-\kappa\alpha_t i_t + \kappa u_t + e_t) - \lambda\alpha_t(-\alpha_t i_t + u_t)] &= 0 \\ E_t[\kappa^2\alpha_t^2 i_t - \kappa^2\alpha_t u_t - \kappa\alpha_t e_t + \lambda\alpha_t^2 i_t - \lambda\alpha_t u_y] &= 0\end{aligned}$$

Dosazením $E_t\alpha_t = E_t(\alpha+\varepsilon_t) = \alpha$ a za $E_t\alpha_t^2 = E_t[\alpha+\varepsilon_t]^2 = E_t(\alpha^2+2\alpha\varepsilon_t+\varepsilon_t^2) = \alpha^2+\sigma_\alpha^2$

$$\begin{aligned}\kappa^2(\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2)i_t - \kappa^2\alpha u_t - \kappa\alpha e_t + \lambda(\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2)\, i_t - \lambda\alpha u_t &= 0 \\ i_t[\kappa^2(\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2) + \lambda(\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2)] &= \kappa^2\alpha u_t + \kappa\alpha e_t + \lambda\alpha u_t \\ i_t[(\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2)(\kappa^2+\lambda)] &= \alpha[(\kappa^2+\lambda)u_t + \kappa e_t] \\ i_t &= \frac{\alpha[(\kappa^2+\lambda)u_t + \kappa e_t]}{(\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2)(\kappa^2+\lambda)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\sigma_\alpha^2}u_t + \frac{\alpha\kappa}{(\alpha^2+\sigma_\varepsilon^2)(\kappa^2+\lambda)}e_t\end{aligned}$$

Všiměte si, že pokud je $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ (nulová nejistota), pak se reakční funkce zjednodušší na

$$\sigma_\varepsilon^2 \to 0 \Rightarrow i_t = \frac{1}{\alpha}\, u_t + \frac{\kappa}{\alpha(\kappa^2+\lambda)}e_t$$

Ze srovnání výrazů vyplývá, že nejistota ohledně α_t způsobuje, že centrální banka méně reaguje na šoky u_t a e_t. Centrální banka je opatrnější. Není si jistá ohledně fungování ekonomiky (vyjádřeno modelem a parametry), takže změní úrokovou míru jen málo. Neplatí „ekvivalence jistoty“. Banka mění své chování při existenci nejistoty.

Aditivní nejistota je ilustrována v problému 1. Nejistá proměná u vstupuje do podmínky prvního řádu aditivně (jako součet). Multiplikativní nejistota je ilustrována v problému 2. Nejistá proměnná α_t vstupuje v podmínce prvního řádu multiplikativně (jako násobek).