2. test z EMM I

Skupina: čt 16:20-17:50 **Jméno:** Daniel Němec **UČO:** 22939
Verze: nesnadná **Maximum bodů:** 10 **Počet bodů:** 10
Minimální počet bodů pro připuštění ke zkoušce je 5

- Řešte úlohu nelineárního programování uvedenou níže. Úlohu řešte pomocí Kuhn-Tuckerových podmínek a dostatečných podmínek optimality 2. řádu. Sestavte Lagrangeovu funkci, najděte stacionární body, prověřte dostatečné podmínky optimality 2. řádu. Na závěr zřetelně napište své nalezené otimální řešení této úlohy (existuje-li) a optimální hodnotu (či hodnoty) funkce, kterou optimalizujete.

$$f(i,j) = j + 99.99 \to max$$
$$(j+2)^2 + (i-3)^2 \le 25$$
$$\frac{i+j}{4} + 1 \ge 0$$

$\Rightarrow \bar{f}(i,j) = -j - 99{,}99 \to min$

$(j+2)^2 + (i-3)^2 - 25 \le 0$

$-i - j - 4 \le 0$

$L(\ldots) = -j - 99{,}99 + u_1 \cdot [(j+2)^2 + (i-3)^2 - 25] + u_2 \cdot [-i-j-4]$

KKT:

$\frac{\partial L}{\partial j} = -1 + 2u_1 j + 4u_1 - u_2 = 0$ (1)

$\frac{\partial L}{\partial i} = 2u_1 i - 6u_1 - u_2 = 0$ (2)

$\frac{\partial L}{\partial u_1} = (j+2)^2 + (i-3)^2 - 25 \le 0$ (3)

$u_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial u_1} = u_1 \cdot [(j+2)^2 + (i-3)^2 - 25] = 0$ (4)

$u_1 \ge 0$ (5)

$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -i - j - 4 \le 0$ (6)

$u_2 \cdot \frac{\partial L}{\partial u_2} = u_2 \cdot (-i-j-4) = 0$ (7)

$u_2 \ge 0$ (8)

Rovnice:

(1) $-1 + 2u_1 j + 4u_1 - u_2 = 0$

(2) $2u_1 i - 6u_1 - u_2 = 0$

(4) $u_1 \cdot [(j+2)^2 + (i-3)^2 - 25] = 0$

(7) $u_2 \cdot (-i-j-4) = 0$

Nerovnice

(3) $(j+2)^2 + (i-3)^2 - 25 \le 0$

(5) $u_1 \ge 0$

(6) $-i - j - 4 \le 0$

(8) $u_2 \ge 0$

I. $u_1 = 0 \wedge u_2 = 0$

II. $u_1 = 0 \wedge u_2 \neq 0$

III. $u_1 \neq 0 \wedge u_2 = 0$

IV. $u_1 \neq 0 \wedge u_2 \neq 0$

ad I: (1) $-1 = 0$ spor

ad II: (1) $-1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -1$ $\boxed{\text{spor}}$ $\wedge$ (8)

$\hookrightarrow$

ad III. ① $-1+2u_1 j+4u_1=0$

② $2u_1 i-6u_1=0$ => $/:2u_1$ $(u_1\neq 0)$ -> $i-3=0$ => $i=3$

④ $(j+2)^2+(i-3)^2-25=0$ => $j^2+4j+4-25=0$

⑦ splněno

$$j_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot(-21)}}{2}=\begin{cases}3 & \overset{①}{\Rightarrow} -1+6u_1+4u_1=0,\ u_1=0{,}1\\ -7 & \Rightarrow -1-14u_1-25u_1=0 \Rightarrow \text{spor s ⑤ } (u_1\geq 0)\end{cases}$$

(nebo $(j+2)^2=25$ => $j+2=\pm 5$)

$$\Rightarrow \text{bod } \begin{array}{cccc} i & j & u_1 & u_2\\ \end{array} [3, 3, \tfrac{1}{10}, 0)$$

ověření nerovnic ③ splněna jako rovnost ⑥ $-10\leq 0$ ⑤, ⑧ splněno => stacionární bod

ad IV. ① $-1+2u_1 j+4u_1-u_2=0$

② $2u_1 i-6u_1-u_2=0$

④ $(j+2)^2+(i-3)^2-25=0$

⑦ $-i-j-4=0$ => $i=-j-4$

→ $j^2+4j+4+j^2+14j+49-25=0$

$2j^2+18j+28=0$

$j^2+9j+14=0$

$$j_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81-4\cdot 14}}{2}=\begin{cases}-2\\ -7\end{cases} \Rightarrow i_{1,2}=\begin{cases}-2\\ 3\end{cases}$$

~~pro $j=2$ a $i=6$~~

~~$-1+4u_1+4u_1-u_2=0$~~ ~~$-1+8u_1-6u_1=0$~~

~~$12u_1-6u_1-u_2=0$ => $u_2=6u_1$~~ ~~$u_1=$~~

pro $j=-2$ a $i=-2$

$-1-4u_1+4u_1-u_2=0$ => $u_2=-1$ -> spor s ⑤

pro $j=-7$ a $i=3$

$-1-14u_1+4u_1-u_2=0$

$6u_1-6u_1-u_2=0$ => $u_2=0$ -> spor s podmínkou IV $u_2\neq 0$!

Jediný stac. bod $i=3$ $j=3$ $u_1=\frac{1}{10}$ $u_2=0$

dost. podmínky 2. řádu:

$$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial L}{\partial i\partial i} & \frac{\partial L}{\partial i\partial j}\\ \frac{\partial L}{\partial j\partial i} & \frac{\partial L}{\partial j\partial j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u_1 & 0\\ 0 & 2u_1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}|H_1|=2\cdot\frac{1}{10}\geq 0\\ |H_2|=2\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{10}\geq 0\end{array}\right\}\ H \text{ pozit. definitní}$$

=> minimum fce. $F(i,j)$

=> maximum původní fce. $f(i,j)$

$$\boxed{\text{bod } i=3\ \ j=3\ \ \text{maximum fce. } f(i,j) \quad f^*_{(opt)}=3+99{,}99=102{,}99}$$

2. test z EMM I

Skupina: čt 16:20-17:50 **Jméno:** Daniel Kämer **UČO:** 22939
Verze: nelehká **Maximum bodů:** 10 **Počet bodů:** 10
Minimální počet bodů pro připuštění ke zkoušce je 5

- Řešte úlohu nelineárního programování uvedenou níže. Úlohu řešte pomocí Kuhn-Tuckerových podmínek a dostatečných podmínek optimality 2. řádu. Sestavte Lagrangeovu funkci, najděte stacionární body, prověřte dostatečné podmínky optimality 2. řádu. Na závěr zřetelně napište své nalezené otimální řešení této úlohy (existuje-li) a optimální hodnotu (či hodnoty) funkce, kterou optimalizujete.

$$f(q,r) = -0.8r - 317 \to min$$

$$(q+1)^2 + (r+1)^2 \leq 16 \quad \to (q+1)^2 + (r+1)^2 - 16 \leq 0$$

$$q + 6 \geq -r \quad \to -r - q - 6 \leq 0$$

$L(\dots) = -0{,}8r - 317 + u_1 \cdot [(q+1)^2 + (r+1)^2 - 16] + u_2 \cdot [-r - q - 6]$

KKT:

$\frac{\partial L}{\partial r} = -0{,}8 + 2u_1 r + 2u_1 - u_2 = 0$ (1)

$\frac{\partial L}{\partial q} = 2u_1 q + 2u_1 - u_2 = 0$ (2)

$\frac{\partial L}{\partial u_1} = (q+1)^2 + (r+1)^2 - 16 \leq 0$ (3)

$u_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial u_1} = u_1 \cdot [(q+1)^2 + (r+1)^2 - 16] = 0$ (4)

$u_1 \geq 0$ (5)

$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -r - q - 6 \leq 0$ (6)

$u_2 \cdot \frac{\partial L}{\partial u_2} = u_2 \cdot [-r - q - 6] = 0$ (7)

$u_2 \geq 0$ (8)

Rovnice:

(1) $-0{,}8 + 2u_1 r + 2u_1 - u_2 = 0$

(2) $2u_1 q + 2u_1 - u_2 = 0$

(4) $u_1 \cdot [(q+1)^2 + (r+1)^2 - 16] = 0$

(7) $u_2 [-r - q - 6] = 0$

Nerovnice:

(3) $(q+1)^2 + (r+1)^2 - 16 \leq 0$

(5) $u_1 \geq 0$

(6) $-r - q - 6 \leq 0$

(8) $u_2 \geq 0$

I. $u_1 = 0 \wedge u_2 = 0$

II. $u_1 = 0 \wedge u_2 \neq 0$

III. $u_1 \neq 0 \wedge u_2 = 0$

IV. $u_1 \neq 0 \wedge u_2 \neq 0$

ad I: (1) $-0{,}8 = 0$ spor

ad II: (1) $-0{,}8 - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -0{,}8$ $\boxed{\text{spor}}$ s (8)

↪

ad III: ① $-0{,}8 + 2u_1 r + 2u_1 = 0$

② $2u_1 q + 2u_1 = 0$ $\Rightarrow / : 2u_1 \ (u_1 \neq 0) \rightarrow q = -1$

④ $(q+1)^2 + (r+1)^2 - 16 = 0$ $\rightarrow (r+1)^2 = 16$

⑦ splněno

$r = \begin{cases} 3 & \Rightarrow -0{,}8 + 6u_1 + 2u_1 = 0 \quad \underline{u_1 = \frac{1}{10}} \\ -5 & \Rightarrow -0{,}8 - 10u_1 + 2u_1 \Rightarrow \text{spor s ⑤ } (u_1 \geq 0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{bod} \begin{array}{cccc} q & r & u_1 & \\ \end{array} \left[-1, 3, \tfrac{1}{10}, 0\right]$$

ověření nerovnic: ③ splněna jako rovnost, ⑥ $-3 + 1 - 6 \leq 0$ ✓, ⑤⑧ splněna

$\Rightarrow$ stacionární bod

ad IV. ① $-0{,}8 + 2u_1 r + 2u_1 - u_2 = 0$

② $2u_1 q + 2u_1 - u_2 = 0$

④ $(q+1)^2 + (r+1)^2 - 16 = 0$ $\longrightarrow q^2 + 2q + 1 + q^2 + 10q + 25 - 16 = 0$

⑦ $\underline{-r - q - 6 = 0}$ $\Rightarrow r = -q - 6$

$2q^2 + 12q + 10 = 0$

$q^2 + 6q + 5 = 0$

$q_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$

$r_{1,2} = \begin{cases} -5 \\ -1 \end{cases}$

pro $q = -1$ a $r = -5$

$-0{,}8 - 10u_1 + 2u_1 - u_2 = 0$

$-2u_1 + 2u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = 0 \Rightarrow$ spor s IV. $(u_2 \neq 0)$

pro $q = -5$ a $r = -1$

$-0{,}8 - 2u_1 + 2u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -0{,}8$ spor s ⑧

Jediný stac. bod $q = -1$ $r = 3$ $u_1 = \frac{1}{10}$ $u_2 = 0$

dost. podmínky 2. řádu

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q \partial q} & \frac{\partial L}{\partial q \partial r} \\ \frac{\partial L}{\partial r \partial q} & \frac{\partial L}{\partial r \partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_1 & 0 \\ 0 & 2u_1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H_1| = 2 \cdot \frac{1}{10} \geq 0 \\ |H_2| = 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot \frac{1}{10} \geq 0 \end{array}\right\} H \text{ pozit. definitní} \Rightarrow \text{minimum } f(q,r)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{bod } q = -1 \ r = 3 \ \text{ minimum fce. } f(q,r) \\ f^{*}_{(opt.)} = -0{,}8 \cdot 3 - 317 = -319{,}4 \end{array}}$$