Ekonomicko - matematické metody I (cvičení)

Jiří Polanský

Department of Applied Mathematics and Computer Science

Faculty of Economics and Administration

Masaryk University

Brno

Content

Úvodní informace

- Jiří Polanský
- KAMI, 6. patro, dveře č. 646
- polansky@econ.muni.cz, jirka.polansky@gmail.com
- konzultační hodiny dle dohody
- účast na cvikách povinná, povoleny 2 neomluvené absence

Podklady ke cvičením

- Podklady ke cvičením od Hanky Fitzové (jsou v ISu)
- sylabus k několika prvním cvičením od Michala Kvasničky
  http://www.econ.muni.cz/∼ qasar/vyuka/emm1/sylabusemm1.pdf
- mé slidy (pouští se ctrl+L), některá zadání, matematické věty atd.
  http://www.econ.muni.cz/∼ polansky/emm
- zájem o ekonomii:
  Chiang: Fundamental Methods of Mathematical Economics
  Simon - Blume: Mathematics for Economists

Testy

- budou dva (7. a 12. týden)
- pokud student nebude moci fyzicky absolvovat seminární test (omluvenka), napíše náhradní test (dle dohody)
- za každý test je možno dostat maximálně 10 bodů. Pro připuštění ke zkoušce je nutné získat z každého testu alespoň 5 bodů. Při menším počtu má student možnost napsat opravný test

Projekt

- zadání úlohy studenti obdrží ve 4. týdnu výuky
- úkolem bude formulace matematického modelu, jeho vyřešení v Excelu a interpretace získaného řešení
- za vypracovaný projekt je možno dostat maximálně 10 bodů, pro připuštění ke zkoušce je zapotřebí získat alespoň 5 bodů
- body získané za semestrální projekt se budou plně započítávat do výsledného hodnocení

Matice I

- sčítání a odčítání
  - matice stejného typu, sčítají (odčítají) se odpovídající si prvky
  - komutativní, asociativní zákon
- násobení matic
  - skalárem (číslem) $\rightarrow$ je komutativní
  - maticí $\rightarrow$ je komutativní jen ve dvou případech (jednotková matice a inverzní matice)

Matice II

- jednotková matice
- transpozice matice A^T
  - výměna prvků podle hlavní diagonály
  - vlastnosti
- inverzní matice A^{-1}
  - vlastnosti
  - využití například pro řešení soustavy atd.
  - příklad výpočtu pomocí Gaussovy eliminační metody
- determinant matice D
  - matice $2x2$, $3x3$, Laplace expansion law
  - vlastnosti

Gaussova eliminační metoda

- soustava rovnic
- povolené úpravy
  - záměna řádků, sloupců
  - vynásobení řádku (sloupce) nenulovým číslem
  - sečtení dvou řádků (sloupců)
- na hodnosti matice závisí výsledek
- výpočet inverzní matice

Postup

- slovní zadání
- definování veličin (výsledková veličina, rozhodovací veličiny)
- sestavení tabulky (pokud to je účelné)
- matematický zápis

Úloha 1 - zadání

Výživa (dieta)
(minimalizační úloha lineárního programování)

Zadání: Výživné látky (pro jednoduchost jen 3 - kalcium, bílkoviny, vitamín A), u kterých jsou stanoveny požadované minimální denní dávky, dva typy jídel (I a II), které tyto látky obsahují, ceny jídel.

Cíl: Nalezení kombinace jídel I a II, která minimalizuje náklady a zároveň splňuje požadovaná omezení.

Úloha 1 - tabulka

	Food I	Food II	
Cena	0.50	1.00	**min.den.pož.**
Kalcium	10	4	20
Bílkoviny	5	5	20
Vitamin A	2	6	12

Výsledková veličina ... náklady ($\rightarrow MIN$)
Rozhodovací veličina ... volba jídel (x_1, x_2)

Úloha 1 - matematický zápis

- Účelová funkce (objective function) ⇒ Minimalizace

$$C = 0.5x_1 + x_2$$

- omezující podmínky (kalcium, bílkoviny, vitamín A, nezápornost)

$$\begin{aligned} 10x_1 + 4x_2 &\geq 20 \\ 5x_1 + 5x_2 &\geq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 1 - grafické řešení

- rozhodovací veličiny na osy (Food I, II)
- podmínka nezápornosti $x_1, x_2 \geq 0$
- omezující podmínky (jako rovnost, u přímky stačí najít 2 body a spojit, pak přidáme nerovnost)
- najdeme společnou oblast
- hledáme min náklady $x_2 = C - 0.5x_1$
- $\Rightarrow$ bod [3,1], $\bar{C} = 2.50$

Úloha 2 - zadání

Výroba
(maximalizační úloha lineárního programování)

Zadání: Závod vyrábí 2 komodity, využívá 3 oddělení (lisovna, válcovna a montáž), kapacita lisovny a válcovny je 8 hodin a montáže je 3 hodiny denně. Komodita 1 se lisuje a poté montuje (každá tuna využívá 30 min kapacity lisovny a 10 minut kapacity montáže); komodita 2 se válcuje a pak montuje (každá tuna využívá 60 min kapacity válcovny a 20 minut kapacity montáže). Čistý zisk na tunu u výrobku **I** je 1, u výrobku **II** je 2.

Cíl: Jakou kombinaci výstupu by měl podnik zvolit, aby maximalizoval zisk.

Úloha 2 - tabulka

	Výrobek I	Výrobek II	denní kapacita
Lisovna	30 min (1/2h)	0	8h
Válcovna	0	60min (1h)	8h
Montáž	10min (1/6h)	20min (1/3h)	3h
Zisk na tunu	1	2	

Výsledková veličina ... čistý zisk ($\rightarrow MAX$)
Rozhodovací veličina ... volba výstupu (x_1, x_2)

Úloha 2 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = x_1 + 2x_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 1/2x_1 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 8 \\ 1/6x_1 + 1/3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 2 - matematický zápis (po úpravě)

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = x_1 + 2x_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 16 \\ x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 2 - grafické řešení

- rozhodovací veličiny na osy (Výrobek I, II)
- podmínka nezápornosti $x_1, x_2 \geq 0$
- omezující podmínky (jako rovnost, u přímky stačí najít 2 body a spojit, pak přidáme nerovnost)
- najdeme společnou oblast
- hledáme max zisk $x_2 = \pi/2 - 1/2x_1$

- $\Rightarrow$ úsečka vymezená body [2,8] a [16,1], $\bar{\pi} = 18$

Úloha 3 - zadání

Výroba kalhot
(maximalizační úloha lineárního programování)

Zadání: Závod vyrábí 3 druhy kalhot (jednobarevné JED, kostkované KOS a kombinované KOM); kapacitní omezení jsou 12000 metrů jednobarevné látky a 9000 metrů kostkované látky; na výrobu jednobarevných kalhot (JED) se použije 1,4 metru jednobarevné látky, na KOS 1,4 metru kostkované látky a na KOM 0,8 metru jednobarevné látky a 0,65 metru kostkované látky; maximální odbyt je u KOS 3000ks a u KOM 5000ks; zisk z JED je 400, z KOS 450 a z KOM je 500.

Cíl: Jakou kombinaci výstupu (kalhot) by měl podnik zvolit, aby maximalizoval zisk.

Úloha 3 - tabulka

	JED	KOS	KOM	kapacita
Látka jednobar.	1,4	0	0,8	12000
Látka kostkov.	0	1,4	0,65	9000
Max odbyt	-	3000	5000	
Zisk	400	450	500	

Výsledková veličina ... čistý zisk ($\rightarrow MAX$)
Rozhodovací veličina ... volba výstupu (kalhot) (x_1, x_2, x_3)

Úloha 3 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = 400x_1 + 450x_2 + 500x_3$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 1,4x_1 + 0,8x_3 &\leq 12000 \\ 1,4x_2 + 0,65x_3 &\leq 9000 \\ x_2 &\leq 3000 \\ x_3 &\leq 5000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 4 - zadání

Chemická úloha
(minimalizační úloha lineárního programování)

Zadání: Závod nakupuje sloučeniny (I,II,III,IV) s cílem získat cílové množství chemických prvků (A,B,C), které tyto sloučeniny obsahují a které z nich získá. Ve sloupcích 2-5 je množství prvku v gramech, které lze získat z 1kg sloučeniny.

Cíl: Jakou kombinaci sloučenin by měl podnik nakoupit, aby získal požadované množství prvků a minimalizoval náklady.

název prvku	I	II	III	IV	cíl.množ. prvků (v kg)
A	0	2	4	5	5
B	2	2	0	4	6
C	10	5	4	10	18
cena slouč. (Kč/kg)	15	10	12	25	

Úloha 4 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Minimalizace

$$C = 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 25x_4$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 5000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 6000 \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 &= 18000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 5 - zadání

Krmná směs
(minimalizační úloha lineárního programování)

Zadání: Krmná směs musí obsahovat alespoň 60 jednotek látky L1, 160 jednotek L2 a 180 jednotek L3; směs lze vyrobit ze dvou krmovin K1 a K2, přičemž 1kg K1 obsahuje 3 jednotky L1, 4 jednotky L2 a 2 jednotky L3; 1kg krmoviny K2 obsahuje 1 jednotku L1, 3 jednotky L2 a 4 jednotky L3; cena za 1kg krmoviny K1 je 14 Kč, za 1 kg K2 je 13 Kč.

Cíl: Jakou kombinaci K1 a K2, abychom smícháním získali krmnou směs s požadovaným obsahem látek a minimalizovali náklady.

Úloha 5 - tabulka

	K1	K2	požadované množ. látek
L1	3	1	60
L2	4	3	160
L3	2	4	180
Cena (za kg)	14	13	

Výsledková veličina ... náklady ($\rightarrow MIN$)
Rozhodovací veličina ... volba krmoviny (x_1, x_2)

Úloha 5 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Minimalizace

$$C = 14x_1 + 13x_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 60 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 160 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 180 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 6 - zadání

Řezný plán
(minimalizační úloha lineárního programování)

Zadání: Závod k výrobě využívá tyče (T1 = 90cm, T2 = 70cm, T3 = 50cm); nakupuje pouze tyče délky 190 cm, které si musí sám rozřezat do požadovaných velikostí; odpad z jedné tyče nesmí být větší než 40cm. Závod k výrobě požaduje 400ks T1, 400 ks T2 a 1300ks T3.

Cíl: minimální počet použitých tyčí standardní délky (190cm)
(alternativně: minimalizace odpadu)

Úloha 6 - tabulka

	způsob 1	2	3	4	5	6	požadavek
T1	2	1	1	0	0	0	400
T2	0	1	0	2	1	0	400
T3	0	0	2	1	2	3	1300
odpad (cm)	10	30	0	0	20	40	

Výsledková veličina ... min počet tyčí ($\rightarrow MIN$)
Rozhodovací veličina ... volba způsobu řezání ($x_1, ..., x_6$)

Úloha 6 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Minimalizace

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$(z = 10x_1 + 30x_2 + 20x_5 + 40x_6)$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 400 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 &= 400 \\ 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 &= 1300 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 7 - zadání

Směny
(minimalizační úloha lineárního programování)

Zadání: Směny po 8 hodinách, nástup vždy o půlnoci, ve 4, ... (vždy po 4 hodinách), minimální počet osob ve službě viz tabulka.

Cíl: kolik osob má nastoupit do služby v každou nástupní dobu, aby služby byly zajištěny s min počtem osob

Úloha 7 - tabulka

hodiny	osoby
0-4	3
4-8	8
8-12	10
12-16	8
16-20	14
20-24	5

Výsledková veličina ... min počet osob ($\rightarrow MIN$)
Rozhodovací veličina ... počet osob ($x_1, \ldots, x_6$)

Úloha 7 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Minimalizace

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} x_1 + x_6 &\geq 3 \\ x_1 + x_2 &\geq 8 \\ x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_3 + x_4 &\geq 8 \\ x_4 + x_5 &\geq 14 \\ x_5 + x_6 &\geq 5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 8 - zadání

Doprava
(minimalizační úloha lineárního programování)

Zadání: dva sklady (S1, S2), tři zákazníci (Z1, Z2, Z3), v tabulce jsou měsíční zásoby cementu, měsíční požadavky zákazníků, náklady na dopravu 1 tuny cementu ze skladu S k zákazníkovi Z

Cíl: minimální náklady na dopravu při splnění požadavků zákazníků a plném využití kapacity skladů

Úloha 8 - tabulka

sklady	Z1	Z2	Z3	zásoby
S1	5	2	3	30
S2	2	1	1	75
požadavky	35	25	45	

Výsledková veličina ... min náklady ($\rightarrow MIN$)
Rozhodovací veličina ... dopravené množství (x_{sz})

Úloha 8 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Minimalizace

$$C = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23}$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 75 \\ x_{11} + x_{21} &= 35 \\ x_{12} + x_{22} &= 25 \\ x_{13} + x_{23} &= 45 \\ x_{sz} &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 9 - zadání

Výroba
(minimalizační úloha lineárního programování)

Zadání: závod vyrábí 4 typy výrobků (V1, V2, V3, V4), kapacita vstupů (zařízení Z má kapacitu 1200 hodin, suroviny 1400 tun), výrobky V1 a V2 mohou být použity jako vstupy (meziprodukty, polotovary) pro statky V2, V3, V4, či mohou být prodávány samostatně. Odbytové ceny jsou V1=300, V2=600, V3=1000, V4=3000.

Cíl: maximalizace tržeb (výnosů z prodaného množství)

Úloha 9 - tabulka

	V1	V2	V3	V4	kapacita
Z	1,5	-	2	2,5	1200
S	2	1,5	2	-	1400
V1 (vstup)	-	0,5	-	1	
V2 (vstup)	-	-	0,5	2	
ceny	300	600	1000	3000	

Výsledková veličina ... výnosy(tržby) ($\rightarrow MAX$)
Rozhodovací veličina ... množství výrobků (x_i)
!!!! je nutné rozlišit vyrobené množství x a prodané množství $\tilde{x}$

Úloha 9 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = 300x_1 + 450x_2 + 700x_3 + 1500x_4$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 1,5x_1 + 2x_3 + 2,5x_4 &\leq 1200 \\ 2x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 &\leq 1400 \\ x_1 &\geq 0,5x_2 + x_4 \\ x_2 &\geq 0,5x_3 + 2x_4 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Úloha 10 - zadání

Výroba
(minimalizační úloha lineárního programování)

Zadání: závod vyrábí 2 typy zaměnitelných výrobků (I, II), kapacita slévárny je max 80 ks I nebo 100 ks II či nějakou jejich kombinaci, kapacita lisovny je 200 ks I nebo 60 ks II nebo jejich kombinace, montáž typu I má kapacitu 60 ks, montáž typu II má kapacitu 80 ks, ceny za oba statky je 28000.

Cíl: maximalizace hodnoty výstupu (max hodnota produkce)

Úloha 10 - postup

Postup:
x_i se v jednotlivých úsecích dělí maximálním možným vyrobeným počtem kusů $\rightarrow$ jaký podíl kapacity úseku vezme výroba x_i (po vynásobení 100 je podíl v procentech)

Výsledková veličina ... hodnota produkce ($\rightarrow MAX$)
Rozhodovací veličina ... množství výrobků (x_i)

Úloha 10 - matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = 28000x_1 + 28000x_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\leq 400 \\ 3x_1 + 10x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\leq 60 \\ x_2 &\leq 80 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Zadání I

Výroba
(maximalizační úloha lineárního programování)

Zadání: Závod vyrábí 2 komodity, využívá 3 oddělení (lisovna, válcovna a montáž), kapacita každého oddělení je 8 hodin denně. Komodita 1 se lisuje a poté montuje (každá tuna využívá 30 min kapacity lisovny a 20 minut kapacity montáže); komodita 2 se válcuje a pak montuje (každá tuna využívá 60 min kapacity válcovny a 40 minut kapacity montáže). Čistý zisk na tunu u výrobku **I** je 40, u výrobku **II** je 30.

Cíl: Jakou kombinaci výstupu by měl podnik zvolit, aby maximalizoval zisk.

Tabulka

	Výrobek I	Výrobek II	denní kapacita
Lisovna	30 min (1/2h)	0	8h
Válcovna	0	60min (1h)	8h
Montáž	20min (1/3h)	40min (2/3h)	8h
Zisk na tunu	40	30	

Výsledková veličina ... čistý zisk ($\rightarrow MAX$)
Rozhodovací veličina ... volba výstupu (x_1, x_2)

Matematický zápis

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = 40x_1 + 30x_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 1/2x_1 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 8 \\ 1/3x_1 + 2/3x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Matematický zápis (po úpravě)

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = 40x_1 + 30x_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 16 \\ x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Grafické řešení

- rozhodovací veličiny na osy (Výrobek I, II)
- podmínka nezápornosti $x_1, x_2 \geq 0$
- omezující podmínky (jako rovnost, u přímky stačí najít 2 body a spojit, pak přidáme nerovnost)
- najdeme společnou oblast
- hledáme max zisk $x_2 = \pi/30 - 4/3x_1$
- $\Rightarrow$ bod [16,4], $\bar{\pi} = 760$

Postup řešení pomocí jednofázové simplexové metody I

- přepis úlohy do kanonického tvaru (matice A musí obsahovat libovolně umístěnou jednotkovou submatici)
  - ZATÍM postup pro MAXIMALIZAČNÍ úlohu
  - ZATÍM všechny omezení jsou ve tvaru $\leq$ (pokud budou ve tvaru $=$ nebo $\geq$, je nutné použít dvoufázovou metodu)
- $\Rightarrow$ pro tento případ model doplníme o doplňkové proměnné s_i
  - tyto proměnné mají ekonomický význam (omezení je zcela využito pokud je tato proměnná rovna nule, omezení není zcela využito, pokud je proměnná větší než nula)
  - používám značení pomocí písmena s (s ... slack variables, surplus variables)

Kanonický tvar

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = 40x_1 + 30x_2 (+0s_1 + 0s_2 + 0s_3)$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} x_1 + s_1 &= 16 \\ x_2 + s_2 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + s_3 &= 24 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (v účelové fci mají doplňkové proměnné koeficienty rovny 0, neboť nevyužité kapacity nezvýší zisk)

Postup řešení pomocí jednofázové simplexové metody II

- musíme najít PIVOT (klíčový prvek v simplexové tabulce)
  - klíčový sloupec: v řádku účelové fce jde o zápornou hodnotu, jež je největší v absolutní hodnotě (to znamená, že pro maxim. úlohu jde vlastně o největší zápornou hodnotu)
  - klíčový řádek: hledáme minimální hodnotu $\lambda = b/a$ (může být i nulová); a je klíčový sloupec, v němž nás zajímají pouze kladné prvky
- počítáme Gaussovskou eliminační metodou, aby na pivotní pozici byla jednička a v celém sloupci nuly
  - !!! vždy přičítáme násobky klíčového řádku k ostatním řádkům, nikdy ne naopak
- výměna otočením proměnné v bázi podle pivotního prvku
- postup opakujeme v dalších simplexových tabulkách, dokud je v řádku účelové fce alespoň jedna záporná proměnná (záporná proměnná v řádku účelové fce u maximalizační úlohy znamená, že hodnota účelové fce (např. zisk) poroste...)

Gaussovká eliminační metoda - tabulka I

- řádek s_1: jednička tam už je, stačí jen opsat (jinak bychom dělili odpovídajícím číslem)
- s_2: nula tam už je, stačí opsat
- s_3: $(-1) * s_1 + s_3$ (!! Vždy násobíme klíčový řádek a sčítáme s ostatními, nikdy ne naopak !!)
- π: $40 * s_1 + \pi$
- Vyměníme klíčový sloupec x_1 za klíčový řádek s_1

Gaussovká eliminační metoda - tabulka II

- řádek s_3: dělíme 2
- x_1: nula už tam je, stačí opsat
- s_2: $(-1) * s_3 + s_2$
- π: $30 * s_3 + \pi$
- Vyměníme klíčový sloupec (x_2) za klíčový řádek (s_3)

Řešení

Výsledek vyčteme z tabulky - první sloupec udává veličiny, sloupec b hodnoty: $[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3]$
$\Rightarrow [16, 4, 0, 4, 0]$

Poznámky

- na počátku volíme bázi takovou, aby v ní byly jen doplňkové proměnné (nevyrábíme žádný výrobek)
- MINIMALIZAČNÍ ÚLOHA $\Rightarrow$ hledáme v řádku účelové fce největší kladný prvek, poté opět minimální λ
- omezení typu $=$ nebo $\geq$ $\Rightarrow$ dvoufázová metoda (viz příští cviko)

Zadání II

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = 15000x_1 + 5000x_2 + 10000x_3 + 10000x_4 + 30000x_5$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 &\leq 400 \\ 0.5x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 120 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + 0.5x_5 &\leq 200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zadání III

- Účelová funkce $\Rightarrow$ Maximalizace

$$\pi = 300x_1 + 450x_2 + 700x_3 + 1500x_4$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 1,5x_1 + 2x_3 + 2,5x_4 &\leq 1200 \\ 2x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 &\leq 1400 \\ x_1 &\geq 0,5x_2 + x_4 \\ x_2 &\geq 0,5x_3 + 2x_4 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Postup řešení pomocí dvoufázové simplexové metody

- pokud jsou omezení typu $=$ nebo $\geq$ $\rightarrow$ nemáme v matici A jednotkovou submatici $\rightarrow$ nemáme bazické proměnné pro počáteční řešení

- do omezení (do rovnic, neboť jsme odstranili znaménka $<$ a $>$), kde chybí $+1$ doplníme pomocnou neekonomickou veličinu
- k původnímu modelu přidáme pomocnou účelovou fci, která minimalizuje součet pomocných proměnných
- řešíme pomocný model - pokud existuje řešení, budou všechny pomocné proměnné rovny nule (jinak řešení neexistuje)
- řešíme původní model

Zadání (4.8 ze Syllabu Hanky Fitzové)

- Účelová funkce ⇒ Maximalizace

$$\pi = 2x_1 + x_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\geq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &= 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Řešení I - přidání ekonomických proměnných

- Účelové funkce

$$\pi = 2x_1 + x_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + s_1 &= 12 \\ x_1 + x_2 - s_2 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 &= 9 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Řešení II - přidání neekonomických proměnných

- Účelové funkce

$$\pi = 2x_1 + x_2$$
$$z' = 15 - 3x_2 + s_2$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + s_1 &= 12 \\ x_1 + x_2 - s_2 + u_1 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 + u_2 &= 9 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, u_1, u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Gaussovká eliminační metoda - tabulka I

- řádek u_2 dělíme 2
- $(+1) * u_2 + s_1$
- $(-1) * u_2 + u_1$
- $(+1) * u_2 + \pi$
- $(-3) * u_2 + z'$
- Vyměníme klíčový sloupec x_2 za klíčový řádek u_2

Gaussovká eliminační metoda - tabulka II

- řádek u_1 dělíme $3/2$
- $(-5/2) * u_1 + s_1$
- $(+1/2) * u_1 + x_2$
- $(+5/2) * u_1 + \pi$
- $(-3/2) * u_1 + z'$
- Vyměníme klíčový sloupec x_1 za klíčový řádek u_1

Gaussovká eliminační metoda - tabulka III

- řádek s_1 dělíme $5/3$
- $(+2/3) * s_1 + x_1$
- $(+1/3) * s_1 + x_2$
- $(+5/3) * s_1 + \pi$
- Vyměníme klíčový sloupec s_2 za klíčový řádek s_1

Zadání (4.7 ze Syllabu Hanky Fitzové)

- Účelová funkce ⇒ Maximalizace

$$\pi = 200x_1 + 250x_2 + 250x_3 + 300x_4$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 400 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 400 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 430 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Řešení

- Účelové funkce

$$\pi = 200x_1 + 250x_2 + 250x_3 + 300x_4$$
$$z' + 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 830$$

- omezující podmínky

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 2x_4 + s_1 &= 400 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + u_1 &= 400 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + u_2 &= 430 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, u_1, u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

viz syllabus Michala Kvasničky, kapitola 4

- úloha nemá žádné přípustné řešení
- úloha nemá konečné optimální řešení
- úloha má jediné optimální řešení
- úloha má nekonečně mnoho řešení, z toho dvě bazická
- úloha má nekonečně mnoho řešení, z toho jedno bazické
- degenerovaná úloha (jedno optimální řešení ve více bázích)

Koncept duality

- dosud jsme chápali MAX a MIN úlohy jako oddělené koncepty
- ale: každé MAX úloze odpovídá MIN úloha a naopak (duálně sdružené úlohy)

Značení

- x - rozhodovací veličiny v původní (primární) úloze
- y - rozhodovací veličiny v duální úloze
- s - doplňkové veličiny v původní (primární) úloze
- t - doplňkové veličiny v duální úloze
- pomocné veličiny nejsou relevantní (budeme se bavit o optimu)

Obecný návod

- Hanky sylabus strana 21
- pozor na převod z MIN do MAX úlohy (měníme rozhodovací veličiny)

Pravidla

- MAX $\rightarrow$ MIN a naopak
- znaménka ($\geq$, $\leq$, $=$) viz tabulka v sylabu
- matice koeficientů u duální úlohy je transponovaná matice u původní úlohy

Výhody

- můžeme si zvolit, jaká úloha má méně omezujících podmínek a tu počítat (menší velikost báze - zavádíme méně doplňkových či pomocných veličin)
- často může být snazší maximalizovat..., neboť taková úloha má velmi často omezení typu $\leq$, což se dá spočítat jednofázovou metodou (nezavádíme pomocné veličiny)

Duality theorems

- pokud má úloha optimum, má optimum i duální úloha, navíc hodnoty účelových fcí jsou stejné, tj. $\pi^* = \pi_D^*$, $C^* = C_D^*$
- jestliže je v optimu rozhodovací veličina úlohy nenulová $(y_i^* > 0)$ nebo $(x_i^* > 0)$, pak odpovídající doplňková veličina u k ní duální úlohy je nulová $(s_i^* = 0)$ nebo $(t_i^* = 0)$
- jestliže je v optimu doplňková veličina úlohy nenulová $(s_i^* > 0)$ nebo $(t_i^* > 0)$, pak odpovídající rozhodovací veličina u k ní duální úlohy je nulová $(y_i^* = 0)$ nebo $(x_i^* = 0)$

Analýza citlivosti pravých stran omezení

- jak se může Δb změnit, aby se zachovalo přípustné řešení určené stávajícími proměnnými
- vždy jen změny jedné složky vektoru b (ostatní jsou neměnné)
- $\Rightarrow$ intervaly stability (v tomto intervalu zůstanou v optimu stávající veličiny a hodnoty stínových cen se nezmění)

Analýza citlivosti cenových koeficientů

- jak se může Δc změnit, aby stávající řešení zůstalo optimální
- vždy jen změny jedné složky vektoru c (ostatní jsou neměnné)
- $\Rightarrow$ intervaly stability (v tomto intervalu zůstanou v optimu stávající veličiny)