

Poznámky k příkladům pro II. část písemné zkoušky

1. Je dána matice \mathbf{A} typu $(2, n)$. Určete všechny báze.
Viz DSO, příklad 2.3.
2. Je dána soustava dvou lineárních rovnic a báze \mathbf{B} . Zjistěte odpovídající bázické řešení.
Viz DSO, příklad 2.3.
3. Je dána úloha LP se 2 proměnnými. Graficky určete optimální řešení.
Viz DSO, příklady 2.2, 2.4 – 2.8.
4. Je dána simplexová tabulka odpovídající optimálnímu řešení s příznakem existence dalších optimálních řešení. Určete všechna optimální bázická řešení.
Viz DSO, příklad 3.12.
5. Je dána jedna z dvojice symetricky duálně sdružených úloh. Zkonstruuje k ní úlohu duální.
Viz DSO, příklad 4.2. V tomto příkladu je jako výchozí zadána maximalizační úloha. Může být ale také jako výchozí zadána úloha minimalizační.
6. Je dána nelineární funkce $f(\mathbf{x})$ více proměnných a bod \mathbf{x}_0 . Určete směry, v nichž funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{x}_0 nejrychleji roste a klesá.
Tyto směry se získají pomocí gradientu funkce $f(\mathbf{x})$ (viz DSO, příklad 5.3).
7. Je dána nelineární funkce dvou proměnných ve tvaru polynomu 3. stupně. Určete obor, ve kterém je daná funkce konvexní.
Konvexnost se ověřuje pomocí Hessovy matice (viz DSO, příklad 5.6, kde se ověřuje konvexnost funkcí z příkladu 5.3). V uvedeném příkladě se ovšem jedná o polynomy nejvýše druhého stupně, takže příslušné Hessovy matice jsou konstantní. V případě polynomu 3. stupně bude Hessova matice záviset na \mathbf{x} .
Uvažujme např. funkci $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + (x_2 - 4)^3$. Hessova matice této funkce vypadá takto:
$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6x_2 - 24 \end{pmatrix}$$

Aby tato matice byla pozitivně semidefinitní, musejí být všechny hlavní minory nezáporné. Platí, že $2 > 0$. Dále pak musí platit, že $6x_2 - 24 \geq 0$ a $2(6x_2 - 24) - 16 \geq 0$. Řešením těchto dvou nerovnic dostaneme, že $f(\mathbf{x})$ je konvexní pro $x_2 \geq 16/3$.
8. Je dána úloha NLP. Zjistěte, zda se jedná o úlohu konvexního programování.
Řekneme, že úloha

$$\min \{f(\mathbf{x}) \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

je úlohou konvexního programování právě tehdy, když funkce $f(\mathbf{x})$ a všechny funkce $g_i(\mathbf{x})$ jsou konvexní. Poznamenejme, že pokud by se mezi omezujícími podmínkami vyskytla rovnice, pak tato rovnice musí být lineární.

Při ověřování konvexnosti musí být úloha nejprve upravena do požadovaného tvaru, tj. musí být minimalizační, všechny nerovnice musejí být typu \leq a pravé strany omezujících podmínek musejí být nulové.

Viz DSO, příklad 5.6. kde je ověřována konvexnost úlohy z příkladu 5.1, která je v příkladu 5.3 nejprve upravena do požadovaného tvaru.

9. Jsou zadány veličiny dopravní úlohy (vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} a matice \mathbf{C}). Sestavte matematický model.

Viz DSO, příklad 1.19 a podkapitola 7.2. Je třeba prověřit, zda je úloha vyvážená, tj. je-li

součet kapacit dodavatelů $A = \sum_{i=1}^m a_i$ roven součtu požadavků odběratelů $B = \sum_{j=1}^n b_j$.

V takovém případě mohou mít všechna vlastní omezení tvar rovnic. Je-li $A > B$, musejí mít omezení odpovídající dodavatelům tvar nerovnic typu \leq . Je-li $A < B$, musejí mít tento tvar omezení odpovídající odběratelům.

10. Je dána úloha stochastického LP, kde koeficienty v účelové funkci jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny se zadanými středními hodnotami a rozptyly. Sestavte možné deterministické ekvivalenty dané úlohy.

Viz DSO, příklady 8.14 a 8.15. Stačí zformulovat pouze příslušné účelové funkce podle vztahů (8.58) a (8.59) resp. (8.60). Vzhledem k nezávislosti náhodných veličin c_1 a c_2 pro kovariance platí $\sigma_{11} = D(c_1)$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$, $\sigma_{22} = D(c_2)$.

11. Je dána úloha dvoukriteriálního LP. Dále jsou dány minimální a maximální hodnoty obou účelových funkcí a případně také jejich váhy. Sestavte možné jednokriteriální úlohy.

Viz DSO, příklady 8.17 a 8.19. Pokud jsou maximální hodnoty obou účelových funkcí přibližně stejné, není třeba provádět normalizaci.

12. Úloha vícekriteriálního hodnocení variant je zadána kriteriální maticí a případně také vahami jednotlivých kritérií. Určete bazální variantu, ideální variantu, dominované a nedominované varianty a pomocí nějaké vhodné metody také kompromisní variantu.

Viz DSO, příklady 8.20 (ideální a bazální varianta) a 8.21 (nedominované varianty). Kompromisní variantu je možno jednoduše určit pomocí agregace kritérií nebo vzdálenosti od ideálního vektoru. Uvažujme např. kriteriální matici

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 7 & 9 & 9 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a vektor vah kritérií (3, 2, 1), přičemž všechna kritéria jsou maximalizační. Ideální hodnoty všech kritérií jsou stejné (jsou rovny 9) a tedy nemusíme provádět normalizaci.

Při váženém součtu hodnot kritérií podle vzorce

$$\sum_{j=1}^p v_j y_{ij}$$

kde v_j jsou váhy kritérií, dostáváme pro jednotlivé varianty tyto hodnoty: 38, 48, 28, 50, 21. Nejvýhodnější je tedy 4. varianta.

Při počítání vzdálenosti od vektoru ideálních hodnot kritérií podle vzorce

$$\sum_{j=1}^p v_j (H_j - y_{ij})$$

kde H_j jsou ideální hodnoty kritérií, dostáváme pro jednotlivé varianty tyto hodnoty: 16, 6, 26, 4, 33. Nejvýhodnější je tedy opět 4. varianta, která je nejbližší ideální variantě.

Uvedené výpočty stačí ovšem dělat pouze pro nedominované varianty, tj. pro variantu druhou a čtvrtou.