Početní základy finanční matematiky

sylabus 3. přednášky

(5.7)
12. 10. 2005

3.4.1 Spoření

3.4.1.1 Nyní odvodíme jediný vzorec, který v sobě zahrne předlhůtní i polhútní spúoření i všechna možná mezilhůtní spoření, splácení dluhů a vypúlácení důchodů. Pro neužitečnou úplnost odvodíme tento vzorec i pro jednoduché úročení.

3.4.2 Spoření při složeném úročení a ekvidistantních úložkách

3.4.2.1 Předpokládejme, že ukládáme v ekvidistantních okamžicích, které jsou od sebe v čase vzdáleny τ, že první úložka se děje v okamžiku ε, druhá v okamžiku $\varepsilon + \tau$, třetí v okamžiku $\varepsilon + 2 \cdot \tau \ldots$ a poslední v okamžiku $\varepsilon + T$.

3.4.2.2 Ukládáme v čase $n \cdot \tau + \varepsilon$, $n = 0 \ldots T$

3.4.2.3 Kolik je úložek v čase $t < T + \varepsilon$?

$$\mathrm{pocetA} := \mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right) + 1$$

a v čase $T + \varepsilon < t$ je uloženo

$$\mathrm{pocetB} := \frac{T}{\tau} + 1$$

úložek, což je celé číslo. Tedy obecně, ukládáme-li v čase $n \cdot \tau + \varepsilon$, $n = 0..T$ máme v čase t

$$\mathrm{pocet} := \min\left(\mathrm{pocetA}, \mathrm{pocetB}\right) = \min\left(\mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right) + 1, \frac{T}{\tau} + 1\right)$$

úložek.

3.4.2.4 Ve kterém okamžiku se ukládá i-tá úložkla?

$$\mathrm{okamzik} := i \mapsto i \cdot \tau + \varepsilon$$

3.4.2.5 Jak dlouho se do okamžiku $t$úročí i-tá úložka je-li $\mathrm{okamzik}\,(i) \leq t$ tj. $i \cdot \tau + \varepsilon \leq t$?

$$\mathrm{doba} := i \mapsto t - \mathrm{okamzik}\,(i) = t - i \cdot \tau - \varepsilon$$

3.4.2.6 Jaká je současná hodnota (tj. původní nominální hodnota a úroky z ní) i-té úložky v čase tpří úrokové míře ξ, je-li $\mathrm{okamzik}\,(i) \leq t$a pokud byla v okamžiku ukládání její nominální hodnota z? $\mathrm{hodnota} := i \mapsto z\,(1+\xi)^{\mathrm{doba}(i)}$; $\mathrm{hodnota}\,(i)$je tedy za předpokladu

$$i\,\tau + \varepsilon \leq t$$

rovna

$$\text{hodnota}\,(i) = z\,(1+\xi)^{(t - i\,\tau - \varepsilon)}$$

3.4.2.7 Chceme-li sečíst současné hodnoty všech úložek provedených v čase předcházejícím nobo rovném okamžiku t. Dostáváme řadu

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{pocet}-1} \mathrm{hodnota}\,(i)$$

3.4.2.8 Podíl i-tého a $i + 1$-ního členu této řady nezávisí na i, můžeme jej označit kvocient, a je roven

$$\mathrm{kvocient} := \frac{\mathrm{hodnota}\,(i+1)}{\mathrm{hodnota}\,(i)} = (1+\xi)^{(-\tau)}$$

Jedná se tedy o geometrickou řadu.

3.4.2.9 Počet členů této řady je

$$\mathrm{PocetClenu} = \min\left(\mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right)+1,\ \frac{T}{\tau}+1\right)$$

nultý člen je

$$\mathrm{NultyClen} := \mathrm{hodnota}\,(0) = z\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon)}$$

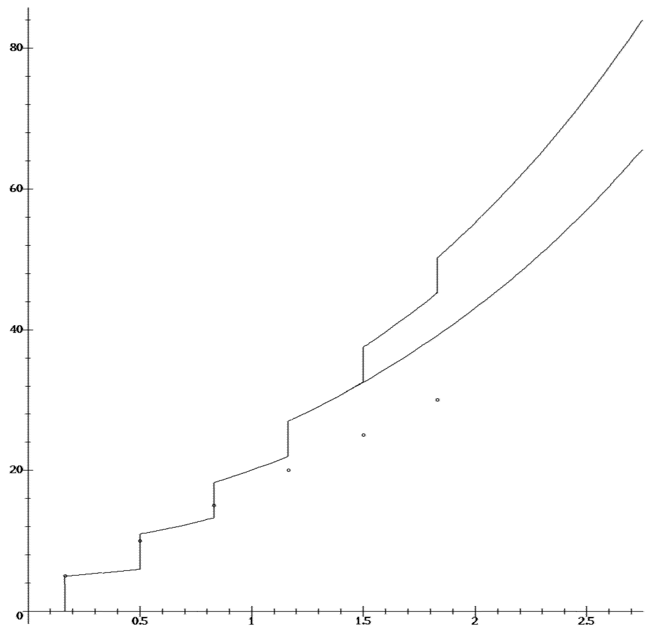
tedy součet je:

$$\frac{z\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon)}\left(\left((1+\xi)^{(-\tau)}\right)^{\min\left(\mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right)+1,\ \frac{T}{\tau}+1\right)}-1\right)}{(1+\xi)^{(-\tau)}-1}$$

Definujme funkci

$$\psi\colon(\tau,\epsilon,\xi,z,T,t)\mapsto\frac{z\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon)}\left(\left((1+\xi)^{(-\tau)}\right)^{\min\left(\mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right)+1,\ \frac{T}{\tau}+1\right)}-1\right)}{(1+\xi)^{(-\tau)}-1}$$

Graf této funkce v závislosti na čase je na obrázku



jednak pro hopdnoty parametrů $\tau = 1/3$, $\epsilon = 1/6$, $\xi = 3/4$, $z = 5$, $T = 2 - 1/3$, jednak pro spoření, které skončí o chvíli dříve a kolečky (body) je namalován součet nominálních výší úložek.

3.4.2.10 **Příklad:** Předpokládejme, že ukládáme 10. den každého měsíce 250Kč. Začneme v březnu a skočíme v květnu o tři roky později. Jaký bude stav účtu na konci onoho května, je-li úroková míra stále $2/50$ p. a.?

- vzdálenost sousedních dvou v čase je jeden měsíc, to je $\frac{1}{12}$roku (někdy je to 30 dní, někdy 31 dní, někdy 28 dní).

3.4.2.10.1 • První (přibližné) řešení:

- za počátek vezmeme 1. březen.
- za jednotku času bereme rok a tedy $T = 3 + \frac{3}{12}$, $t = 3 + 2/12$
- počítáme všechny měsíce třicetidenní a tedy $\varepsilon = \frac{1}{3}$
- měsíců je 12 za rok

pak jde o mezilhůtní spoření a podle vzorce:

$$\psi\left(\frac{1}{12}, \frac{(1/12)}{3}, \frac{2}{50}, 250, 3+\frac{2}{12}, 3+\frac{3}{12}\right) = 10404.3298$$

3.4.2.10.2 • Druhé (přibližné) řešení:

• za počátek vezmeme 10. 3. Pak je $\varepsilon = 0$a
• $t = 12 + \frac{3}{12} - \frac{1}{12 \cdot 3}$

$$\psi\left(\frac{1}{12}, 0, \frac{2}{50}, 250, 3 + \frac{2}{12}, 3 + \frac{3}{12} - \frac{1}{36}\right) = 10404.3298$$

3.4.2.10.3 • Třetí (přibližné) řešení:

• Spočítáme efektivní úrok za měsíc.
• Za jednotku času bereme měsíc

$$\xi_{\text{mesic}} := -1 + \frac{1}{25}\, 26^{\frac{1}{12}}\, 25^{\frac{11}{12}} = 0.003273740$$
$$\psi\left(1, \frac{1}{3}, \xi_{\text{mesic}}, 250, 3 \cdot 12 + 2, 3 \cdot 12 + 3\right) = 10404.3298$$

3.4.2.10.4 • Přesné řešení záleží na tom, je-li rok přestupný, předpokládejme, že není, nebo není a po jakou dobu zůstávájí úroky konstantní, předpokládejme, že po jeden den. Pak doby, po kterou jsou úložky úročeny jsou posupně:. . .

3.4.2.11 **Poznámka:** Uvedené úvahy můžeme zobecnit a pak vždy vystačíme se vzorcem 3.4.0.8 tedy bez ε, (zejména tedy není rozdíl mezi předlhůtním a polhůtním spoření).

3.4.2.12 Pokud navíc předpokládáme, že v čase ϵ_0 byla uložena částka z_0 je stav účtu v čase t

$$z_0 \cdot (1 + xi)^{t - \epsilon_0} + \frac{z\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon)}\left(\left((1+\xi)^{(-\tau)}\right)^{\min\left(\mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right)+1,\, \frac{T}{\tau}+1\right)} - 1\right)}{(1+\xi)^{(-\tau)} - 1}$$

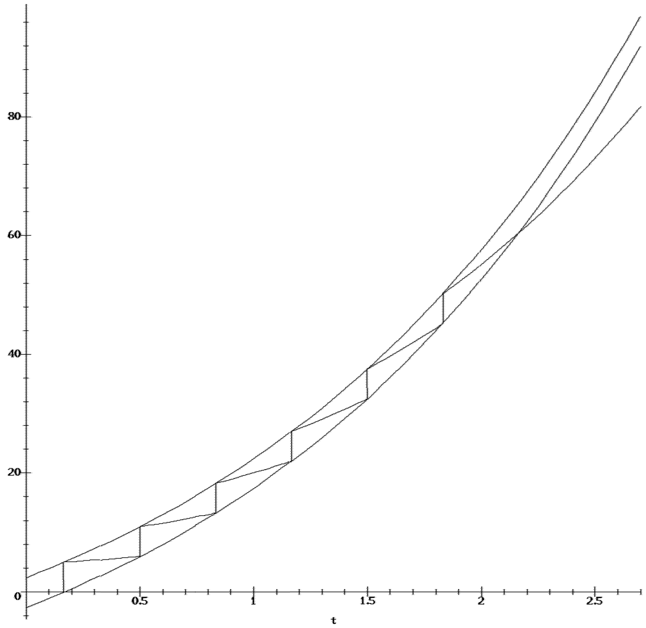
3.4.2.13 **Poznámka:** poznamenejme ještě, že pokud označíme

$$\psi\colon t \mapsto z_0 \cdot (1 + xi)^{t - \epsilon_0} + \frac{z\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon)}\left(\left((1+\xi)^{(-\tau)}\right)^{\min\left(\mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right)+1,\, \frac{T}{\tau}+1\right)} - 1\right)}{(1+\xi)^{(-\tau)} - 1}$$
$$\phi_1\colon t \mapsto z_0\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon_0)} + \frac{z\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon)}\left((1+\xi)^{(\varepsilon - t - \tau)} - 1\right)}{(1+\xi)^{(-\tau)} - 1}$$
$$\phi_2\colon t \mapsto z_0\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon_0)} + \frac{z\,(1+\xi)^{(t-\varepsilon)}\left((1+\xi)^{(\varepsilon - t)} - 1\right)}{(1+\xi)^{(-\tau)} - 1}$$

pak platí pro všechna $0 < t < T + \varepsilon$

$$\phi_2(t) < \psi(t) < \phi_1(t)$$
$$\psi(n\tau\varepsilon) = \phi_1(n\tau\varepsilon)$$
$$\lim_{t \to (n\tau\varepsilon)^-} \phi_2(t) = \psi(n\tau\varepsilon)$$

Což nám například umožňuje po dobu spoření v okmžicích ukládání úložek počítat stav účtu funkcí phi_1, která je jednodužší (zejména je analytická), než funkce ψ, která je v okamžicích ukládání úložek nespojitá. Graf všech tří funkcí je na následujícím obrázku:



hodnoty jsou: $\tau = 1/3$, $\epsilon = 1/6$, $\xi = 3/4$, $z = 5$, $T = 5/3$.

3.4.3 Spoření při jednoduchém úročení a ekvidistantních úložkách

3.4.3.1 Předpokládejme, že ukládáme v ekvidistantních okamžicích, které jsou od sebe v čase vzdáleny τ, že první úložka se děje v okamžiku εa poslední v čase T + epsilon

3.4.3.2 V čase $t < T + \varepsilon$ máme $\mathrm{pocetA} := \mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right) + 1$ a v čase $T + \varepsilon < t$máme $\mathrm{pocetB} := \frac{T}{\tau} + 1$úložek, tedy v čase $0 < t$ máme $\mathrm{pocet} := \min\left(\mathrm{pocetA},\ \mathrm{pocetB}\right)$úložek, i-tá úložka se ukládá v okamžiku $\mathrm{okamzik} := i \mapsto i\,\tau + \varepsilon$

$$\mathrm{okamzik} := i \mapsto i\,\tau + \varepsilon$$

A do okamžiku t se úročí po dobu

$$\mathrm{doba} := i \mapsto t - \mathrm{okamzik}\left(i\right)\ ;\ \mathrm{doba}\left(i\right) = t - i\,\tau - \varepsilon$$

3.4.3.3 Její hodnota v okamžiku t je

$$\mathrm{hodnota} := i \mapsto z\ \left(1 + \xi\,\mathrm{doba}\left(i\right)\right)\ ;\ \mathrm{hodnota}\left(i\right) = z\ \left(1 + \xi\ \left(t - i\,\tau - \varepsilon\right)\right)$$

3.4.3.4 Máme sečíst současné hodnoty (jejích původní hodnoty a úroky) všech úložek až do okamžiku t. Rozdíl hodnoty i-té a $i+1$-ní úložky je

$$\text{diference} := \left(\text{hodnota}\left(i+1\right) - \text{hodnota}\left(i\right)\right) = -z \cdot \xi \cdot \tau$$

A tedy nezávisí na t a tedy řada je aritmetická. Nultý člen má v čase t hodnotu

$$\mathrm{hodnota}\left(0\right) = z \cdot \left(1 + \xi \cdot \left(t - \varepsilon\right)\right)$$

a poslední úložka má v čase t už hodnotu hodnotu

$$\mathrm{hodnota}\left(\mathrm{pocet} - 1\right) = z \cdot \left(1 + \xi\ \left(t - \left(\min\left(\mathrm{CelaCast}\left(\frac{t-\varepsilon}{\tau}\right) + 1, \cdot\frac{T}{\tau} + 1\right) - 1\right)\ \tau - \varepsilon\right)\right)$$

tedy součet je:

$$\frac{1}{2}\left(\text{hodnota}\left(0\right) + \text{hodnota}\left(\text{pocet} - 1\right)\right) \cdot \text{pocet} =$$

$$-\frac{1}{2} z \cdot \left(-2 - 2 \cdot \xi \cdot t + 2 \cdot \xi \cdot \varepsilon + \xi \cdot \tau \min\left(\frac{T}{\tau} + 1,\ \mathrm{CelaCast}\left(-\frac{-t+\varepsilon}{\tau}\right) + 1\right) - \xi\,\tau\right) \cdot$$

$$\cdot \min\left(\frac{T}{\tau} + 1,\ \mathrm{CelaCast}\left(-\frac{-t+\varepsilon}{\tau}\right) + 1\right)$$

3.4.3.5 Pokud navíc předpokládáme, že v čase ϵ_0 byla uložena částka z_0 je stav účtu v čase t

$$x_0 \cdot (1+\xi \cdot (t-\varepsilon_o)) - \frac{1}{2} z \cdot \left(2 \cdot ((\varepsilon - t) \cdot \xi - 1) + \xi \cdot \tau \cdot \min\left(\frac{T}{\tau}+1,\ \text{CelaCast}\left(-\frac{-t+\varepsilon}{\tau}\right)+1\right) - \xi\,\tau\right) \cdot \\ \cdot \min\left(\frac{T}{\tau}+1,\ \text{CelaCast}\left(-\frac{-t+\varepsilon}{\tau}\right)+1\right)$$

3.4.3.6 **Poznámka:** Nyní ještě uvažujme smíšené úročení: rozdělíme čas t na $[t] + (t-[t])$. Po dobu $[t]$ se uročí podle 3.4.2.12. Naspořená částka je pak hodnotou x_0 v čase $t = [t]$ v , kterým se spori po dobu $t - [t]$

3.4.3.7 **Poznámka:** Je-li $\epsilon = 0$ jde o *spoření předlhůtní*, je-li $\epsilon = \frac{1}{k}$ jde o *spoření polhůtní* Je-li $t < 1$ říká se spoření *krátkodobé*, Je-li $t > 1$ říká se spoření *dlouhodobé*.

3.4.4 Důchod

3.4.4.1 Důchod je spoření se zápornými úložkami (a většinou s nenulovou počáteční úložkou a nezáporným zůstatkem).

3.4.4.2 Volíme, bez újmy na obecnosti $k = 1$ (tj. budeme uvažovat efektivní úrok pro odobí, v němž dochází k výplatám).

3.4.4.3 Důchod bezprostřední, polhůtní (na konci každého úrokového období jsou vypláceny konstantní platby (anuity)): V 3.4.2.12 volíme $\epsilon = \frac{1}{k}, \epsilon_0 = 0$. Záporné úložky z představují vyplácené částky $-z$. Stav konta se určí vzorečkem 3.4.2.12. Pro vyorečky, které následují byl použit ovšem pomocný vztah 3.4.2.13.

- Počáteční úložka, kterou je potřeba v čase ε_0 učinit, aby mohl být důchod o nominální výši $-z$ vyplácen v okamžicích $n\tau + \varepsilon$ po dobu t při úrokové míře ξ;
- Okamžik, ve kterém je potřeba uložit počáteční úložku z_0, aby mohl být důchod o nominální výši $-z$ vyplácen v okamžicích $n\tau + \varepsilon$ po dobu t při úrokové míře ξ;
- doba, mezi dvěma výplatami důchodu a
- nominální výše jednotlivých výplat (předpokládáme, že jsou všechny stejné) po dobu t při úrokové míře ξ...

jsou řešením rovnice $\phi = 0$:

3.4.4.4

$$z_0 = \frac{z\,(1+\xi)^{(\tau+\varepsilon_0-\varepsilon)}\left(\left((1+\xi)^{(-\tau)}\right)^{\left(\frac{t-\varepsilon+\tau}{\tau}\right)} - 1\right)}{-1+(1+\xi)^{\tau}}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{t \ln(1+\xi) - \ln\left(-\frac{z\left(-1+(1+\xi)^{(t-\varepsilon+\tau)}\right)}{z_0\,(-1+(1+\xi)^{\tau})}\right)}{\ln(1+\xi)}$$

$$\tau = -\frac{\ln\left(\frac{z_0\,(1+\xi)^t + (1+\xi)^{(\varepsilon_0+t-\varepsilon)}\,z}{z_0\,(1+\xi)^t + z\,(1+\xi)^{\varepsilon_0}}\right)}{\ln(1+\xi)}$$

$$-z = \frac{z_0\left(-(1+\xi)^{(\varepsilon-\varepsilon_0-\tau)} + (1+\xi)^{(\varepsilon-\varepsilon_0)}\right)}{1-\left((1+\xi)^{(-\tau)}\right)^{\left(\frac{t-\varepsilon+\tau}{\tau}\right)}}$$

3.4.4.5 Jaká je doba, po kterou bude celá počáteční úložka z_0 vyplacena jako důchod? Pro jednoduchost opředpokládejme, že $\tau = 1$, tj. že úroková míra ξ je spočítána pro dobu, která je vzdáleností dvou po sobě jdoucích výplat důchodu v čase. Potom

$$t = \frac{\ln\left(\frac{z}{z_0\,\xi + z\,\xi\,(1+\xi)^{(-\varepsilon+\varepsilon_0)} + z\,(1+\xi)^{(-\varepsilon+\varepsilon_0)}}\right) + \ln(1+\xi)\,\varepsilon_0}{\ln(1+\xi)}$$

3.4.4.6 Důchod odložený, je důchod s $\varepsilon_0 < 0$.

3.4.4.7 Důchod věčný je důchod při kterém je vyplácená částka $-z_0$ rovna úroku.

3.4.4.8 Za splnění vhodných předpokladů budou vzorečky jednodušší. Tak tedy, předokládejme, že známe uložený kapitál v okamžiku $t = 0$ a že se z něj začne vyplácet od tohoto okamžiku pravidelný důchod až do úplného vyčerpání účtu v čase T částkami $-z$ v okamžicích $n \cdot \tau$, $\mathbb{N}_0$ a že efektivní úrok, jímž se úročí zůstatek na účtu má za dobu τ míru ξ. Pak tyto veličiny musí podle 3.4.2.12 splňovat rovnici:

$$0 = z_0\,(1+\xi)^T + \frac{z\,(1+\xi)^T\left(\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^{(T+1)} - 1\right)}{\frac{1}{1+\xi} - 1}$$

ze které plyne:

$$T = \frac{\ln\left(\frac{z}{z_0\,\xi + z\,\xi + z}\right)}{\ln(1+\xi)}$$

$$z_0 = -\frac{\left(\xi - \left(\frac{1}{1+\xi}\right)^T + 1\right) z}{\xi}$$

$$-z = \frac{z_0\,\xi}{\xi - \left(\frac{1}{1+\xi}\right)^T + 1}$$

3.4.5 **Splácení úvěru** Splácení úvěru je spoření, při záporné počáteční úložce, při kterém chceme naspořit čásrku 0, $z_0 < 0$, $z > 0$.

3.4.5.1 Anuita (=splátka) = úmor + úrok

3.4.5.2 **Příklad:** Předpokládejme, že na účet ukládáme v okamžicích $(t_i)_{i=1\ldots t}$ částky $(z_i)_{i=1\ldots t}$ a v okamžicích $(\tau)_{j=1\ldots t}$ vybíráme částky $(w_j)_{j=1\ldots t}$. Pokud nás zajímá stav účtu v čase $T > t_i, \tau_i$ musíme sečíst budoucí hodnotu všech těchto částek, příčemž vybírané částky jsou v součtu záporné:

$$\sum_i (z_i)(1+\xi)^{t_i} - \sum_j |w_j|(1+\xi)^{\tau_j}$$

3.4.5.3 **Příklad:** Předpokládejme, že se během spoření změní úroková míra. Stav účtu spočítáme tak, že sečteme budoucí hodnotu všech últožek, které se děly za první úrokové míry v okamžiku, kdy se úroková míra mění. Pak k budoucí hodnotě této částky v okamžiku, ve kterém počítáme stav účtu — jde o složené úročení — přičteme budoucí hodnotu všech úložek, které se dějí za druhé úrokové míry od změny úrokové míry až po okamžik, ve kterém počítáme stav účtu.

$$(1+\xi_2)^T \sum_i (z_i)(1+\xi_1)^{t_i} + \sum_j (z_j)(1+\xi_2)^{t_j},$$

T je doba, po kterou probíhá druhá část spoření.

3.4.5.4 **Příklad:** 12. den každého měsíce ukládáme 100zlatých. 24. den 6. a 12. měsíc vybíráme 600zlatých. Jaký je stav našeho účtu 1. 1. 2010, pokud prvních 5 let byla úroková míra 0.06 p. a. a zbylých 5 let 0.04 p. a. a pokud byl založen 1. 1. 2000? Pro jednoduchost uvažujte každý měsíc 30denní a každý rok 12 měsíční.

3.4.5.5 *Řešení:* Všimněme si, že po 6 měsících vybereme vždy všechno, co jsme na účet vložili a zbydou nám jenom úroky. Stav účtu po deseti létech je

$$(1+\xi_2)^{\mathrm{PocetLetB}}\left(\sum_{i=1}^{12\,\mathrm{PocetLetA}} z_1\,(1+\xi_1)^{\mathrm{PocetLetA}-i/12+1/20} - \sum_{i=1}^{2\,\mathrm{PocetLetA}} z_{-1}\,(1+\xi_1)^{\mathrm{PocetLetA}-i/2+\frac{1}{60}}\right) + \sum_{i=1}^{12\,\mathrm{PocetLetB}} z_1\,(1+\xi_2)^{\mathrm{PocetLetB}-i/12+1/20} - \sum_{i=1}^{2\,\mathrm{PocetLetB}} z_{-1}\,(1+\xi_2)^{\mathrm{PocetLetB}-i/2+\frac{1}{60}}$$

kde $xi_1 = 3/50$, $xi_2 = 1/25$, $z_1 = 100$, $z_{-1} = 60$, $\mathrm{PocetLetA} = 5$ a $\mathrm{PocetLetB} = 5$. Všechny čtyři řady jsou geometrické, takže je snadné je sečíst. Součtem zjistíme, že na účtu budeme mít 193,375167 zlatých.

3.4.5.6 **Příklad:** Kdy vznikl dluh. 1000 zlatých, který splatíme 20 měsíčními splátkami o velikosti 100 zlatých pří úrokové míře 1/3 p. a.?

3.4.5.7 *Řešení:* Budoucí hodnota dluhu a budoucí hodnota splátek za 20 měsíců bude stejná. Tedy

$$z_0 \ (1+\xi)^{t+\frac{19}{12}} = \sum_{i=1}^{20} z\,(1+\xi)^{i/121/12},$$

neboli

$$z_0 \ (1+\xi)^{t+\frac{19}{12}} = z + z\,(1+\xi)^{1/12} + z\sqrt[6]{1+\xi} + z\sqrt[4]{1+\xi} + z\sqrt[3]{1+\xi} + z\,(1+\xi)^{\frac{5}{12}} + z\sqrt{1+\xi} + \\ + z\,(1+\xi)^{\frac{7}{12}} + z\,(1+\xi)^{2/3} + z\,(1+\xi)^{3/4} + z\,(1+\xi)^{5/6} + z\,(1+\xi)^{\frac{11}{12}} + z\,(1+\xi) + z\,(1+\xi)^{\frac{13}{12}} + \\ + z\,(1+\xi)^{7/6} + z\,(1+\xi)^{5/4} + z\,(1+\xi)^{4/3} + z\,(1+\xi)^{\frac{17}{12}} + z\,(1+\xi)^{3/2} + z\,(1+\xi)^{\frac{19}{12}},$$

kde $z_0 = 1000$, $z = 100$, $\xi := 1/3$ a t je neznámé. Po dosazení dostaneme exponenciální rovnici

$$1000 \cdot 1{,}333333333^{t+1{,}583333333} = 2535{,}604510,$$

kterou vyřešíme logaritmováním $\left(\text{řešením rovnice } AB^{C+x} = D \text{ je } x = -\frac{\ln(B)C-\ln(D)+\ln(A)}{\ln(B)}\right)$. Zjistíme, že dluh vznikl před 1,6509 roky t. j. před 19,81 měsíci.

3.4.5.8 **Příklad:** Splácíte dluh 12345 chechtáků při úrokové míře 12,3/100 (za splátkové odobí) splátkami 2345 chechtáků. Jak velká bude poslední splátka.

3.4.5.9 *Řešení:* Počítáme v jakém okamžiku by byl rozdíl budoucí hodnoty dluhu a splátek

$$Z\,(1+\xi)^t - \sum_{i=0}^{t-1} z\,(1+\xi)^i,$$

kde $Z = 12345$, $\xi := 123/1000$ a $z := 2345$, nulový, tedy řešíme rovnici

$$12345\,\left(\frac{1123}{1000}\right)^t - \sum_{i=0}^{t-1} 2345\,\left(\frac{1123}{1000}\right)^i = -\frac{826565}{123}\,\left(\frac{1123}{1000}\right)^t + \frac{2345000}{123} = 0$$

Její řešení je

$$t = \frac{\ln(\frac{469000}{165313})}{\ln(\frac{1123}{1000})}$$

což není celé číslo. Dosadíme tedy do prvního výrazu njbližší menší celé číslo (to je 8) a spočítáme rozdíl. Ten pak jedno úrokové období úročíme a tak dostaneme částku, kterou v devátém splátkovém období splatíme dluh. Dluh bude splacen 9. splátkami. Poslední splátka bude mít hodnotu 2320,753691 chechtáků což je o 24,246309 chechtáků méně, než ostatní splátky.

3.4.5.10 **Příklad:** Kolik byste naspořili, kdybyste během svého života při konstantní úrokové míře 0.04p. a. uložili v ekvidistantních okamžicích (poprvé v den svého narození, naposledy dnes)

3.4.5.10.1 • 5 krát $1/5$ z 10^6 korun a kolik byste uspořili, kdybyste uložili ekvidistantních okamžicích

3.4.5.10.2 • 108 krát $1/108$ z 10^6 korun?

3.4.5.11 Jaká je limita současné hodnoty tohoto spoření, je-li velikost úložek $1/n$ a počet úložek n pro $n \to \infty$? Dosadíme hodnoty:

$$\text{Dnes} := 7,\ 12,\ 2003$$
$$\text{DatNar} := 6,\ 11,\ 1982$$
$$\xi := \frac{1}{25}$$

a definujeme funkce

$$z := n \to \frac{1000000}{n}, \quad \text{doba} := n \to \frac{\text{DOBA}}{n}$$

kde DOBA je vzdálenost mezi dneškem a datem narození. V našem případě

$$DOBA := 7701$$

Řešení prvních dvou příkladů je

$$z(n) \cdot \sum_{i=0}^{n} ((1+\xi)^{i * \mathrm{doba}(n)/365}$$

což je pro $n = 5$

$$\frac{250000}{27} \sum_{i=0}^{107} \left(\frac{26}{25}\right)^{\frac{2567}{13140}\, i} = 1550052.583$$

a pro $n = 108$

$$200000 \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{26}{25}\right)^{\frac{7701}{1825}\, i} = 1430796.087$$

Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} z(n) \cdot \sum ((1+\xi)^{i * \mathrm{doba}(n)/365} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{3637978807091712951660156 25} \cdot$$
$$\cdot \left(518131871275444637960845131776\, 26^{\frac{36}{365}}\, 25^{\frac{329}{365}} - 568434188608080148696899414062 5\right) \cdot$$
$$\cdot \lim_{n\to\infty} n^{-1} \left(26^{\frac{7701}{365}\, n^{-1}}\, 25^{-\frac{7701}{365}\, n^{-1}} - 1\right)^{-1} =$$
$$= 2257874.470$$

3.4.5.12 **Příklad:** Je výhodnější zaplatit teď $1/20$ ceny a pak každý z následujících 11 měsíců $1/10$ ceny, nebo zaplatit teď $1/10$ ceny a pak každý z následujících 20 měsíců $1/20$ ceny?

3.4.5.13 *Řešení:* Vybíráme projekt s menší současnou hodnotou. (Peníze máme zaplatit a tak chceme zaplatit co nejméně). Řešení je závislé na úrokové míře: Hodnota první projektu v okamžiku první splátky je:

$$P1 = 1/20 + \sum_{i=1}^{11} 1/10\ (1+\xi)^{-i}$$

Hodnota druhého projektu v okamžiku první splátky je:

$$P2 = 1/10 + \sum_{i=1}^{20} 1/20\ (1+\xi)^{-i}$$

Hledáme nejprve úrokovou míru ξ, pro kterou se současné hodnoty rovnají $P1 = P2$. Tato úroková míra je kořenem algebraické rovnice stupně 20. Polynom 20 stupně je spojitá funkce a tak na intervalech jejichž krajní body jsou jeho po sobě jdoucí kořeny nemění znaménko. Zajímají nás jen kladné kořeny. Takový je jedinný a je to $\xi_0 = 0{,}01130441950$ Nyní dosazením do projektů za úrokovou míru zjistíme, který je výhodnější na intervalu $\langle 0, \xi_0)$ a který je výhodnější na intervalu (ξ_0, ∞) (v bodě ξ_0 jsou oba projekty stejně výhodné). Pokud dosadíme body: 0 a 0,1 dostaneme

	0	0.1
P1	1.05	0.6644567105
P2	1.1	0.5256781862

V prvním sloupečku tabulky máme čísla, která si zákazníci většinou spočítají. Zjistí z nich o kolik zaplatí nominálně víc, než byla původní cena. A přitom neberou v potaz úrokovou míru a fakt, že peníze, které zaplatí později mají menší hodnotu. Ještě primitivnější lidé, jak je patrné z formulací reklam, které jsou pro ně psány, si všímají pouze velikosti jednptlivých splátek splátek a nebo pouze velikosti první splátky (Odneste si novou pračku hned a zaplaťte jen desetinu její ceny!). Z Našeho, čistě obchodního, způsobu nazíráni se jeví, že při úrokové míře menší než 0,01130441950, je výhodnější první splátkový kalendář, při větší úrokové míře druhý. Sokrates by se asi smál a řekl by že novou pračku nepotřebuje. Možná by ale kladl dosti hloupé otázky, které by obchodníky kolem popuzovali.

3.4.5.14 **Příklad:** Jaká je reálná hodnota kapitálu úročeného konstantní úrokovou mírou 0.04, po dobu jednoho roku, když index cen byl postupně ve dvanácti měsících tohoto roku 100, 101.3, 102.5, 103, 103, 104.7, 104.5, 105.1, 106.7, 106.6, 106.7, 108?

3.4.5.15 *Řešení:* Míra inflace za onen rok je:

$$\iota = \frac{108}{100} - 1 = \frac{2}{25},$$

úroková míra je

$$\xi = \frac{1}{25}$$

a reálná hodnota kapitálu je

$$\frac{1+\xi}{1+\iota} = \frac{26}{27}$$

násobek původní hodnoty.

3.4.5.16 **Příklad:** Předpokládaná roční míra inflace byla 0.02, skutečná míra inflace byla 0.04. O kolik by se musela snížit daň, aby zůstal čistý reálný výnos z úroků stejný jako byl ten, který jsme původně očekávali?

3.4.5.17 *Řešení:* Rovnice

$$\frac{x\,(1+\xi\,(1-\delta))}{1+\iota_1} = \frac{x\,(1+\xi\,(1-\delta+h))}{1+\iota_2}$$

má pro

$$\iota_1 = \frac{1}{50}, \iota_2 = 1/25$$

tvar

$$\frac{50}{51} + \frac{50}{51}\,\xi\,(1-\delta) = \frac{25}{26} + \frac{25}{26}\,\xi\,(1-\delta+h)$$

a řešení v závislosti na hodnotách úrokové míry a daňové sazbě:

$$h = \frac{1}{51}\,\frac{1+\xi-\xi\,\delta}{\xi}$$

tj.: Pokud byla původní daňová sazba δ musela by se zmenšit, při úrokové míře ξ o $h = 1/51 \cdot (1+\xi+\xi\cdot\delta)/\xi$. Tedy například při úrokové míře

$$\xi = \frac{1}{52\cdot\delta-1}$$

je k udržení reálné hodnoty potřeba snížit daňovou sazbu δ na nulu.

3.4.5.18 **Příklad:** Pan Akihito si nechává vyplácet od svých šedesáti let důchod, 150chechtáků ročně z účtu, na němž měl v den svých 60. narozenin a tedy v den první výplaty nahromaděno 1000chcechtáků. Až bude účet vyčerpán, pan Akihito vykoná sepuku (rituální sebevraždu). Pohřeb měl naplánovaný na své 73 narozeniny kdz utratí poslední vyplacený důchod. O kolik let se jeho život zkrátí, pokud úroková míra klesne na polovinu?
Hledáme čas T, ve kterém bude hodnota všech výpklat stejná jako hodnota počátečního stavu účtu Z_0

$$Z_0\,(1+\xi)^T = \sum_{i=0}^{T} z\,(1+\xi)^i = \frac{z\left((1+\xi)^{T+1}-1\right)}{\xi}$$

kde $Z_0 := 1000$ a $z := 150$. tedy řešíme rovnici

$$1000\,(1+\xi)^T = 150\,\frac{(1+\xi)^{T+1}-1}{\xi}$$

Pan Akihito zřejmě předpokládal, že poslední výplacený důchod dostane o svých 72. narozeninách, tedy, že mu bude důchod vyplácešn po dobu $T = 12$ let. Pro tuto dobu má rovnice řešení

$$\xi = 0{,}1397434523$$

pokud je úroková míra poloviční, je

$$\xi = 0{,}06987172615$$

a pro tuto hodnutu ξ má rovnice tvar

$$Z_0\, e^{0.06753875904\, T} = 2146.791107\, e^{0.06753875904\, T + 0.06753875904} - 2146.791107$$

a řešení

$$T = 7.463586747$$

což je o 4.536413253 let méně, než původní plánovaná doba. Tedy poslední výplatu důchodu dostane pan Akihito při svých 68 narozeninách, ale bude už menší, než byly původní. Takže sepuku vykoná nejpozději při svých 69 narozeninách.

3.4.5.19 **Příklad:** Jedne ze tří klasických motivů poptávky po penězích podle Johna Maynarda Keynese je spekulační motiv. Keynes se zabýval otázkou, proč suběkty drží (poptávají) větší množství peněz, než je objem peněz poptávaný z transakčního a opatrnostního motivu. Soudil, že tyto peníze jsou drženy v důsledku nejistoty o pohybu budoucích úrokových sazeb a v důsledku vztahu mezi úrokovou sazbou a tržními cenami obligací. Důsledkem růstu úrokových sazeb jsou kapitálové ztráty z držení obligací.
Uvažujme perpetuitu, tj. obligaci, která není nikdy dospělá (zralá) — její jistina nebude nikdy splacena ale přináší svému držiteli pevnou roční kupónovou platbu. Nechť je investorem koupena tato obligace za tržní cenu 1000Kč, a nechť jsou výnosy z kupónů 100Kč ročně. Jakou hodnotu má tato obligace pokud běžná tržní úroková sazba klesla na polovinu?
Držení obligace odpovídá věčnému důchodu o pravidelných výplatách 100Kč ročně při uloženém kapitálu 1000Kč. Roční úroková míra, odpovídající ročnímu uroku 100Kč z 1000Kč v okamžiku, kdy investor obligaci koupil je

$$\begin{aligned} 1000\,\xi_0 &= 100 \\ \xi_0 &= 1/10 \end{aligned}$$

nynyní je ale úroková míra poloviční

$$\xi_1 = 1/20$$

a při ní je hodnota obligace

$$\begin{aligned} z \cdot \xi_1 &= 100 \\ z &= 2000 \end{aligned}$$

Tedy kapitálový zisk je 1000Kč

3.4.5.20 **Příklad:** Kurs jen-min-piao (juan) je 36:37 k rupii je. Očekávaný kurs v následujícím období je 34:39. Jakou z těchto dvou měn je výhodnější podržet. vyjádřete tuto výhodu kvantitativně.

$$\kappa_0 = \frac{36}{37}, \quad \kappa_1 = \frac{34}{39}$$

κ_t je hodnota rupie v jenech v čase t. Hodnota jenu v rupiích je převrácená hodnota κ_t
Je-li $\kappa_0 > \kappa_1$ pak kurs rupie klesá v opačném případě kurs rupie stoupá. tedy v našem případě kurs rupie klesá. Měřme zisk v této míře: podržíme-li rupie, nic nezískáme, ani neztratíme. Podržíme-li místo rupií jeny, bude náš (relativní) zisk v rupiích roven:

$$x \cdot \frac{\kappa_0}{\kappa_1} \text{ rupií} = x \cdot \frac{702}{629} \text{ rupií}$$

x rupií investujeme, $x \cdot \kappa_0/\kappa_1$ rupií získáme zpátky. Míra zisku je

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_1} - 1 = \frac{73}{629}$$

Pokud bychom chtěli měřit zisk v jenech, zisk bychom přeškálovali tak, že držení jenu by pro nás znamenalo zisk 0 znamenalo by držení rupií ztrátu, kterou vyčíslíme takto: pokud investujeme do rupii x jenů, budeme mít v následujícím období už jen

$$x \cdot \kappa_0^{-1}\kappa_1 \text{jenů} = \frac{629}{702} \text{ jenů}$$

a míra zisku by byla

$$\kappa_0^{-1}\kappa_1 - 1 = \frac{-73}{102}$$

Jak to, že nám nevyšlo číslo s toutéž absolutní hodnotou, jako v předchozím případě? Protože jsme zvolili jinou (větší) jednotku (přijít o jen je větší ztrátam než přijít o rupii). Vhodné by tedy bylo pro podobné výpočty zvolit nějakou pevnou měnu.

3.4.5.21 **Cvičení:** Kurz měn (1) jen-min-piao (2) ngultrum (bhůtán) a (3) kyata (Barma) je k Dánská koruně v čase

$$\kappa(i,t) = 9\, i^{-1} + |\sin(1/6\, it\pi)|$$

(tj. součet absolutni hodnoty sinu šestiny součinu pořadového čísla měny času a čísla π s číslem devět děleno pořadové číslo měny je cena v dánských korunách). Máte k dispozici 100 dánských korun a přesnou znalost všech kurzů předem. Směäovat můžete měny v aktualních kurzech v časech $i = 1, 2, 3, 4, 5$ bez poplatků. Jakou největší částku můžete vyobchodovat?

3.4.5.22 **Příklad: Podmínka nekryté úrokové parity (uncovered interest parity condition), mezinárodní úroková arbitráž:**

Uvažujme dvě měny, třeba CZK a USD, jejich kurzy v čase 0 a (skutečný) a v čase 1 (předpokládaný) $E(0)$ a $E(1)$ (tj. $E(i)$ je cena dolaru v korunách v čase i)dvě úrokové sazby ξ_{CZK} a xi_{USD}. Pokud investujeme v čase 0 koruny (o objemu x CZK) do dolarových depozit, bude náš zisk v čase 1 roven

$$\mathrm{Vynos}_{\mathrm{US}} = x \cdot E(0)^{-1} \cdot (1 + \xi_{\mathrm{USD}}) \cdot E(1) - x = \frac{x\,(1 + \xi_{\mathrm{USD}})\,E(1)}{E(0)} - x$$

Při jaké úrokové míře $\xi_C ZK$ by tento výnos byl stejný, jako výnos z Českých depozit?

$$\mathrm{Vynos}_{\mathrm{CZ}} = x \cdot \xi_{\mathrm{CZK}}$$

Řešíme rovnici

$$\mathrm{Vynos}_{\mathrm{US}} = \mathrm{Vynos}_{CZ}$$
$$\frac{x\,(1 + \xi_{\mathrm{USD}})\,E(1)}{E(0)} - x = x \cdot \xi_{\mathrm{CZK}}$$
$$\xi_{\mathrm{CZK}} = -\frac{-E(1) - E(1)\xi_{\mathrm{USD}} + E(0)}{E(0)}$$

Upravíme. Označme očekávanou míru depreciace koruny proti dolaru Q:

$$Q = \frac{E(1) - E(0)}{E(0)}$$

Vydělíme $\xi_{\mathrm{CZK}}\, Q$, upravíme a zase Q vynásobíme. Dostaneme:

$$\frac{\xi_{\mathrm{CZK}}}{Q} = \frac{E(1)\xi_{\mathrm{USD}}}{E(1) - E(0)} + \frac{E(1)}{E(1) - E(0)} - \frac{E(0)}{E(1) - E(0)}$$

a tedy podmínka rovnováhy je

$$\xi_{\mathrm{CZK}} = \xi_{\mathrm{USD}} + \frac{(E(1) - E(0))\,\xi_{\mathrm{USD}}}{E(0)} - \frac{-E(1) + E(0)}{E(0)}$$

Můžeeme shrnout: v rovnovážném stavu je rozdíl úrokových měr roven zúročené očekávane míře depreciace:

$$\xi_{\mathrm{CZK}} = \xi_{\mathrm{USD}} - \frac{(1 + \xi_{\mathrm{USD}})\,(-E(1) + E(0))}{E(0)}$$

3.4.5.23 **Poznámka:** Výraz

$$\frac{(E(1) - E(0))\,\xi_{\mathrm{USD}}}{E(0)}$$

Je velmi malý (pokud je ξ_{USD} i míra očekávané depreciace malá, neboť jej jejich součinem).

3.5.1 Rozdíly v úrokových sazbách

3.5.1.1 **Příklad:** na trhu jsou dvě banky, jedna nabízí hypotéční úrok s pevnou úrokovou mírou 4.1% a s komplikovanou administrativou. Druhá s úrokovou mírou 4.4% a se snadno dostupným úvěrem. Vypúlatí se nám podstupovat administrativní těžkosti, spojené s přiznáním úvěru v první bance? jaá by byla cena obejití těchto těžkostí ve druhé bance.

Poku sme požádání o radu, máme říkat, že ve druhé bance je úroková míra o „0.3% nižší“ nebo „*jen* o 0.3%“ nižší? Jak vhodně kvantifikovat dopad změny úrokové sazby?

3.5.1.2 Relativní rozdíl budoucích hodnot.

3.5.1.3 Relativní rozdíl současných hodnot.

3.5.2 **Durace a konvexita** Buď $PV(CF, \xi)$ současná hodnota závislá na toku peněz a úrokové míře. Zkoumáme relativní změnu PV v závislosti na změně úrokové míry, tedy výraz

$$\frac{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi+\Delta_{\xi})-\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)}$$

funkci

$$\Delta \mapsto \frac{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi+\Delta)-\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)}$$

Rozvineme do taylorovy řady:

$$0+\frac{D_2(\mathrm{PV})(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)} \Delta+1/2 \frac{\left(D_{2,2}\right)(\mathrm{PV})(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)} \Delta^2+ \\ +1/6 \frac{\left(D_{2,2,2}\right)(\mathrm{PV})(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)} \Delta^3+1/24 \frac{\left(D_{2,2,2,2}\right)(\mathrm{PV})(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)} \Delta^4+ \\ +\frac{1}{120} \frac{\left(D_{2,2,2,2,2}\right)(\mathrm{PV})(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)} \Delta^5+O\left(\Delta^6\right)$$

A definujeme:

3.5.2.1 **Definice:** Durace (v literatuře se tak nazývají i různé jiné modifikace tohoto výrazu) † je druhý člen výše uvedené taylorovy řady:

$$\frac{D_2(\mathrm{PV})(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)}$$

3.5.2.2 **Definice:** Konvexita‡ je až na numerický koeficient třetí člen výše uvedené taylorovy řady:

$$\frac{\left(D_{2,2}\right)(\mathrm{PV})(\mathrm{CF}, \xi)}{\mathrm{PV}(\mathrm{CF}, \xi)}$$

3.5.2.3 **Příklad:** Uvažujme pět projektů:

$$\begin{aligned} \mathrm{CF}_1 &:= (-1000, 300, 500, 200, 100) \\ \mathrm{CF}_2 &:= (-1000, 47, 47, 47, 1047) \\ \mathrm{CF}_3 &:= (-851.18586, 281.0005, 170.39716, 300, 200) \\ \mathrm{CF}_4 &:= (-600, -500, -300, 400, 500, 600) \\ \mathrm{CF}_5 &:= (1200, -400, -300, -200, -400) \end{aligned}$$

† Duration =discount mean term of the cash flow = elasticity of the net present value. Je vyjádřena v jednotkách času.

‡ konvexnost(?) konvexity of a cash flow. Je vyjádřena ve čtvercích jednotek času.

3.5.2.4 Projekty 1,2,3,4 jsou prvního druhu, projekt 5 je druhého druhu. Projekt 2 přčedstavuje kupónový dluhopis. Současná hodnota závisí na úrokové míře:

$$\Xi_1 = 0{,}04706344221$$
$$\Xi_2 = 0{,}04700000000$$
$$\Xi_3 = 0{,}04723874435$$
$$\Xi_4 = 0{,}02082688008$$
$$\Xi_5 = 0{,}03338619090$$

Tedy akceptujeme 1., 2., 3., 4., projekt je-li $\xi < 0.02082688008$ akceptujeme 1., 2., a 3., projekt je-li $\xi \in (0.02082688008, 0.047)$ a akceptujrma pouze 5., je-li $0.04723874435 < \xi$

3.5.2.5 Porovnáme nyní pouze 1. a 3. projekt. Rozdíl současné hodnoty v okolí úrokové míry 0.02 je zanedbatelný. I durace jsou přibližně stejné, ale rozdíl konvexností je v okolí bodu 0.02 kladný, 3. projekt má konexnost větší než druhý, to znamená, že při změně rokové mírz poroste rychleji, proto dáme přednost 3. projektu.