

Míra růstu v makroekonomii a ve finanční matematice

Václav Studený

Department of Applied Mathematics, Faculty of Economics
and Administration, Masaryk University
Lipová 24a, 602 00 Brno
studený@econ.muni.cz

Abstract: Ve finanční matematice se používá pojem úroková míra, někdy ve více různých významech pro míru růstu stavové funkce, nejčastěji na nějakém intervalu, přičemž tato míra vyjadřuje jen změnu hodnot v krajních bodech tohoto intervalu. (Například relativní přírůstek na účtu s konstantní úrokovou mírou za jednotku času) V Makroekonomii se používá pojem míra růstu pro lokálně definovanou veličinu (která závisí na hodnotách stavové funkce jen v libovolně malém okolí nějakého bodu).

Tyto pojmy jsou mírně nekonzistentní a v literatuře se často zaměňují, což může vést ke kvantitativním chybám v případných výpočtech.

Cílem této poznámky je ukázat vztah mezi těmito pojmy a najít obecnou explicitní formuli, která všechny tyto pojmy zahrnuje jako speciální případy a ukázat, jakou formuli je třeba nahradit makroekonomickou formuli pro míru růstu, aby v limitním tvaru přecházela ve formuli pro složené úročení.

Keywords: Úroková míra, míra růstu, míra inflace.

MSC 2000 Classification: 26E60 Means 43A07 Means on groups, semigroups, etc.; amenable groups

JEL Classification: E400 - Money and Interest Rates: General (includes measurement and data) E430 - Determination of Interest Rates; Term Structure of Interest Rates E470 - Money and Interest Rates: Forecasting and Simulation O400 - Economic Growth and Aggregate Productivity:

1. Axiomy: Uvažujme veličinu jejíž hodnoty y_1 a y_2 jsou známy ve dvou bodech x_1 a x_2 (tyto hodnoty mohou být například výsledek měření). Funkce $\kappa: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, která bude kvantifikovat přírůstek této veličiny by měla mít následující vlastnosti

axiom 1 invariance vůči posunutí (v čase)

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa(x_1 + t, y_1, x_2 + t, y_2) \quad (1)$$

axiom 2 invariance vůči homotetiím (například vůči volbě měny)

$$k > 0 \implies \kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa(x_1, y_1 \cdot k, x_2, y_2 \cdot k) \quad (2)$$

Dále požadavek symetrie v růstu a poklesu:

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = -\kappa(x_1, -y_1, x_2, -y_2) \quad (3)$$

vynucuje podmínku axiomu 2 i pro $k < 0$

axiom 3 κ je rostoucí v první a čtvrté proměnné a klesající ve druhé a třetí proměnné.

axiom 4 Počáteční podmínka: $\kappa(x_1, y, x_2, y) = 0$. (Míra růstu konstantní funkce je nulová.)

1.1. Poznámka: Z uvedených axiomů přímo plyne:

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) \stackrel{\text{Ax1}}{=} \kappa(0, y_1, x_2 - x_1, y_2) \stackrel{\text{Ax2}}{=} \kappa\left(0, 1, x_2 - x_1, \frac{y_2}{y_1}\right) \quad (4)$$

tak že existuje $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \lambda\left(x_2 - x_1, \frac{y_2}{y_1}\right) \quad (5)$$

A λ je klesající v první a rostoucí ve druhé proměnné podle Ax3 a funkce $\lambda(x, 0) \equiv 0$ podle Ax4.

2. Funkce v ustáleném stavu:

2.1. Definice: Řekneme, že funkce f je v *ustáleném stavu vzhledem k míře růstu* κ je-li $(x_1, x_2) \mapsto \kappa(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$ konstantní funkce. Podle Ax4 je každá konstantní funkce v ustáleném stavu.

Hledáme další funkce f takové, že

$$\kappa(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)) = konst. \quad (6)$$

Předpokládejme, že už známe hodnotu $f(x_1)$ a $f(x_2)$ funkce f ve dvou bodech x_1 a $x_2 = x_1 + h$

$$\kappa(x_2, f(x_2), x_2 + h, f(x_2 + h)) = \kappa(x_1 + h, f(x_1 + h), x_1 + 2h, f(x_1 + 2h)) \quad (7)$$

a podle (6)

$$\kappa(x_2, f(x_2), x_2 + h, f(x_2 + h)) = \kappa(x_1, f(x_1), x_1 + h, f(x_1 + h)) \quad (8)$$

a tedy

$$\lambda\left(h, \frac{f(x_1 + 2h)}{f(x_1 + h)}\right) = \lambda\left(h, \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)}\right) \quad (9)$$

A protože λ je prostá v každé proměnné (Ax 3, viz pozn. za Ax. 4) je

$$\frac{f(x_1 + 2h)}{f(x_1 + h)} = \frac{f(x_2 + h)}{f(x_2)} = \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} \quad (10)$$

a tedy

$$f(x_1 + 2h) = \frac{(f(x_1 + h))^2}{f(x_1)} \quad (11)$$

a dále indukci:

$$f(x_1 + nh) = \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} \cdot f(x_1 + (n-1)h) = \left(\frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)}\right)^n \quad (12)$$

takže v dalších ekvidistantních bodech tvoří hodnoty funkce f geometrickou posloupnost. Stejně ovšem:

$$\frac{f(x_1 + h/2)}{f(x_1)} = \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1 + h/2)} \implies \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} = \left(\frac{f(x_1 + h/2)}{f(x_1)}\right)^2 \quad (13)$$

Takže f má hodnoty exponenciální funkce i ve všech bodech množiny $\{\frac{ah}{2^b}, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$. A protože tato množina je hustá (dense) v \mathbb{R} , platí:

2.2. Lemma: Je-li nějaká spojitá funkce f v ustáleném stavu vzhledem k míře růstu, která splňuje axiomy Ax1 – Ax4, pak je to exponenciální funkce $f: x \mapsto Ae^{Bx}$ s nějakými konstantami A a B .

Pokud chceme, aby všechny exponenciální funkce $x \mapsto Ae^{Bx}$ byly v ustáleném stavu, máme (označíme-li $h = x_2 - x_1$)

$$\forall B: \kappa(x_1, Ae^{Bx_1}, x_2, Ae^{Bx_2}) = \lambda\left(x_2 - x_1, \frac{Ae^{Bx_2}}{Ae^{Bx_1}}\right) = \lambda(h, e^{Bh}) = konst \quad (14)$$

a platí:

$$\lambda(h, z) = \lambda\left(h, e^{h \ln(z^{1/h})}\right) \stackrel{B=\ln(z^{1/h})}{=} \lambda\left(1, e^{\ln(z^{1/h})}\right) = \lambda\left(1, z^{\frac{1}{h}}\right) \quad (15)$$

a

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa\left(0, 1, 1, \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}\right) \quad (16)$$

a tedy pro každou míru růstu κ splňující axiomy Ax1 – Ax4, k níž jsou všechny exponenciální funkce $x \mapsto Ae^{Bx}$ v ustáleném stavu existuje nějaká rostoucí funkce ϕ tak, že

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \phi\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}\right) \quad (17)$$

2.3. Poznámka: Ve finanční matematice se používá translace

$$\phi: x \mapsto x - 1$$

a míra růstu

$$\kappa_1: (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} - 1 \quad (18)$$

je tzv. *úroková míra složeného úročení za jednotku času*.

Ve finanční matematice se také částečně z historických důvodů, částečně z rigidity některých obchodních vztahů a zákonů používá tzv. úroková míra jednoduchého úročení:

$$f: \hat{\kappa}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{y_2}{y_1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} - 1 \quad (19)$$

Podle této míry jsou funkce v ustáleném stavu polynomy prvního stupně:

$$f: z \mapsto K(z - x_1) + f(x_1); \quad (20)$$

3. Infinitesimální verze, (Limitní tvar):

V makroekonomii často potřebujeme vyjádřit rychlost ν růstu nějaké veličiny f v bodě a ne na intervalu: Pokud budeme chtít aby míra růstu veličiny f v bodě x_0 byla limitou její míry na intervalu pro průměr intervalu jdoucí k nule, máme:

$$\nu(f)(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \kappa(x_0, f(x_0), x, f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi \left(\left(\frac{f(x)}{f(x_0)} \right)^{\left(\frac{1}{x - x_0} \right)} \right) = \phi \left(e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}} \right) \quad (21)$$

A pro $\kappa = \kappa_1$ máme

$$\nu_1(f)(x_0) = e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}} - 1 \quad (22)$$

V makroekonomii se často používá míra, kterou dostaneme volbou $\phi = \ln$ v (21). V takovém případě jest

$$\tilde{\nu}(f)(x_0) = \frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)} \quad (23)$$

a pokud bychom tutéž funkci použili jako míru růstu v (17) míra růstu na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$ by byla:

$$\tilde{\kappa}(x_0, f(x_0), x_1, f(x_1)) = \ln \left(\left(\frac{f(x_0)}{f(x_1)} \right)^{\left(\frac{1}{x_0 - x_1} \right)} \right) = \frac{\ln(f(x_0)) - \ln(f(x_1))}{x_0 - x_1} \quad (24)$$

Což je relativní přírůstek funkce $\ln \circ f$ (nikoliv funkce f) vzhledem k přírůstku argumentu této funkce. Tuto limitu v bodě $x_2 \rightarrow x_1$ má i úroková míra jednoduchého úročení (viz. za jednotku času $\hat{\kappa}$).

3.1. Poznámka: Označme tedy

$$\hat{\nu} = \lim_{x \rightarrow x_0} \hat{\kappa}(x_0, f(x_0), x_1, f(x_1)) = \tilde{\nu}(f)(x_0) \quad (25)$$

Platí

$$\hat{\nu} \neq \nu \quad (26)$$

Volíme-li v (17)

$$\phi(x) = x^t - 1 \quad (27)$$

dostaneme, označíme-li vzniklou funkci κ_t

$$\kappa_t(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} - 1 \quad (28)$$

což je tzv. *úroková míra složeného úročení za dobu délky t* a platí známé vztahy

$$\kappa = \kappa_1 = \left(\kappa_{\frac{1}{t}} + 1 \right)^t \quad (29)$$

Podobně jako κ_t můžeme definovat i

$$\hat{\kappa}_t = f: \hat{\kappa}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{y_2}{y_1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{1}{t} - 1, \quad (30)$$

což je míra jednoduchého úročení za dobu délky t a platí známé vztahy:

$$\hat{\kappa}_{\frac{1}{t}} = \frac{\hat{\kappa}_1}{t} \quad (31)$$

Funkce $\kappa \mapsto \frac{\kappa}{t}$ je Taylorovým polynomem stupně 1 v bodě 0 funkce $\kappa \mapsto (\kappa + 1)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1$ a historicky se používala k aproximaci při výpočtu úrokových měr za krátkou dobu. K legitimizaci této nepřesnosti vedlo zavedení pojmu interval připisování úroků. Dosazením $\frac{\kappa_1}{t}$ za $\kappa_{\frac{1}{t}}$ s nezanedbatelnou chybou, která je rostoucí v $t > 0$, dostaneme

$$\kappa_1 \sim \left(1 - \frac{\kappa}{t} \right)^t - 1 = \lambda_1 \quad (32)$$

Chyba $\lambda_1 - \kappa_1$ ovšem neroste přes všechny meze, ale má konečnou limitu $e^\kappa - 1 - \kappa$ v nekonečnu a platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\kappa}{t} \right)^t - 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{\kappa}{t} \right)^{\frac{t}{\kappa}} \right)^\kappa - 1 = e^\kappa - 1$$

Působivost magického zjevení Eulerovy konstanty v tomto výpočtu dalo kdysi vzniknout pojmu *spojité úročení*. Je to obyčejné složené úročení, ale místo úrokové míry κ_1 z (18) se pod jménem úroková míra uvádí hodnota $\ln(\kappa_1 + 1)$.

Číslo $\ln(\kappa_1 + 1)$ dostaneme jako míru růstu, pokud v (17) volíme $\phi = \ln$ a v limitě dostaneme míru $\tilde{\nu}$ jako v (23).

4. Inverzní problém:

Použijeme-li jako míru růtu funkce f zobrazení ν máme

$$\nu(f)(x) = e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}} - 1 \quad (33)$$

Což je explicitní vyjádření pro míru růstu ν pokud známe f a diferenciální rovnice pro stavovou funkci f , pokud známe její míru růstu ν . Tuto rovnici můžeme ekvivalentně psát ve tvarech:

$$\ln(\nu(t) + 1) = D(\ln \circ f)(t)$$

nebo

$$D(f)(t) = \ln(\nu(t) + 1) \cdot f(t)$$

Rovnici můžeme vyřešit a její řešení je:

$$f: x \mapsto e^{\left(\int_0^x \ln(\nu(s)+1) ds \right)} f(0) \quad (34)$$

kde $\nu(t)$ je úroková míra z jednotku času v okamžiku t .

Provedeme-li tentýž výpočet pro míru $\tilde{\nu}$ dostaneme rovnici (23),

$$\tilde{\nu}(f)(x_0) = \frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}$$

a její řešení je

$$f: x \mapsto e^{\int_0^x \tilde{\nu}(s) ds} f(0) \quad (35)$$

Výhodou formule (35) je, že je jednodušší, než (34), její nevýhodou ovšem je, že pokud do ní dosadíme konstantní úrokovou míru, nedostaneme obvyklou formuli pro složené úročení. Následující příklad ukazuje, použití formule (34).

4.1. Example: Předpokládejme, že známe míru míru inflace za jednotku času (například roční míru inflace, pokud jednotkou zvolíme rok) v okamžiku 0 a v okamžiku 1. Předpokládejme, že v okamžiku 0 byla míra inflace za jednotku času rovna 0.1 a v okamžiku 1 byla míra inflace 0.2.

Zajímá nás míra inflace za dobu $\langle 1, 0 \rangle$. Je zřejmé, že tato míra inflace závisí na tom, jak se míra inflace měnila uvnitř intervalu $\langle 1, 0 \rangle$. Tuto informaci můžeme získat z nějaké obecné teorie časových řad nebo aproximací. Uvažujme čtyři možnosti: že byla po celou dobu konstantní a měnila se skokem v jednom, nebo ve druhém krajním bodě intervalu, že se měnila v afinní závislosti na čase a v kvadratické závislosti na čase. V těchto čtyřech případech jsou hodnoty míry inflace za jednotku času dány jednou ze čtyř následujících funkcí:

$$\bar{t}_1(u) := \begin{cases} 0.1, & \text{if } u < 1 \\ 0.2, & \text{if } u \geq 1 \end{cases}, \quad \bar{t}_2(u) := \frac{u^2}{10} + 0.1, \quad \bar{t}_3(u) := \frac{u}{10} + 0.1, \quad \bar{t}_4(u) := \begin{cases} 0.1, & \text{if } u \leq 0 \\ 0.2, & \text{if } u > 0 \end{cases} \quad (36)$$

Přitom první poslední možnost jsou triviální případy — míra za jednotku času je konstantní a interval, za který počítáme inflaci má jednotkovou délku, tedy míra inflace za tuto dobu by měla být tatáž konstanta. Obecný vzorec tedy musí dávat stejný výsledek. Máme:

$$\iota(\langle 0, 1 \rangle) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1+\bar{t}(u)) \, du\right)} - 1 \quad (37)$$

takže postupně v našich čtyřech případech vychází:

$$\bar{t} = \bar{t}_1 = 0.1: X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.1) \, du\right)} - 1 = 0.1 \quad (38)$$

$$\bar{t} = \bar{t}_2 = u \mapsto \frac{1}{10}u^2 + 0.1: X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.1+u^2/10) \, du\right)} - 1 = 0.132945354\dots \quad (39)$$

$$\bar{t} = \bar{t}_3 = u \mapsto \frac{1}{10}u + 0.1: X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.1+u/10) \, du\right)} - 1 = 0.149637533\dots \quad (40)$$

$$\bar{t} = \bar{t}_4 = 0.2: X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.2) \, du\right)} - 1 = 0.2 \quad (41)$$

s kvantitativní shodou výsledku v prvním a posledním případě s výsledkem, který jsme očekávali. Této shody bychom, bohužel, nedosáhli, kdybychom použili formuli (35). Dostaneme:

$$e^{\int_0^1 0.1 \, du} - 1 = 0.105170918 \quad (42)$$

$$e^{\int_0^1 1/10 u^2 + 0.1 \, du} - 1 = 0.142630812 \quad (43)$$

$$e^{\int_0^1 1/10 u + 0.1 \, du} - 1 = 0.161834243 \quad (44)$$

$$e^{\int_0^1 0.2 \, du} - 1 = 0.221402758 \quad (45)$$

a první a poslední výsledek jsou zřejmě bezpochyby špatné. Můžeme říci že inflace se nechová jako takzvané spojitě úročení.

Obvyklá formule pro budoucí hodnotu složeného úročení v případě, že úroková míra je konstantní je

$$x(t) = x(0) \cdot (1 + \xi)^t, \quad (46)$$

a v případě, že je po částech konstantní, tedy I_i jsou roční úrokové míry konstantní na intervalech $I_i = (t_i, t_{i+1})$; $i = 0 \dots n$ pak úroková míra za $\cup_{i=0}^n I_i$ je

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + I_i)^{(t_{i+1} - t_i)} \quad (47)$$

4.2. Theorem: Formule (46) je speciální případ formule (47) pro konstantní úrokovou míru a formule (47) je speciální případ formule (34) po částech konstantní úrokovou míru.

Proof: Předpokládejme že $\iota(t) = I$ je konstantní:

$$e^{\left(\int_0^t \ln(1+I) \, du\right)} = e^{(t \cdot \ln(1+I))} = e^{(\ln(1+I)^t)} = (1 + I)^t \quad (48)$$

Nyní předpokládejme, že ι je po částech konstantní a má hodnoty I_i v každém bodě intervalu $I_i = (t_i, t_{i+1})$; $i = 0 \dots n$. Buď χ_A charakteristická funkce množiny A , pak $\iota(t) = \sum \chi_{(t_i, t_{i+1})} \cdot I_i$

$$\begin{aligned} &= e^{\left(\int_0^t \ln(1 + \chi_{(t_i, t_{i+1})}) \cdot I_i \, ds\right)} = e^{\left(\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} \ln(1+I_i) - t_i \ln(1+I_i))\right)} = \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} e^{(t_{i+1}-t_i) \cdot \ln(1+I_i)} = \prod_{i=0}^{n-1} e^{\ln(1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)}} = \prod_{i=0}^{n-1} (1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} \quad (49) \end{aligned}$$

q. e. d.

Funkcionál

$$\iota \mapsto e^{\int_0^t \ln(1+\iota(s)) \, ds}$$

je spojitý v topologii stejnoměrné konvergence.

Význam věty 4.2 plyne z následujícího lemma:

4.3. Lemma: Pro každou spojitou funkci ι definovanou na uzavřeném intervalu existuje posloupnost po částech konstantních funkcí ξ_i taková, že $\xi_i \rightarrow \iota$

Proof: Předpokládejme, že f je spojitá. vzhledem k předpokladu je $\text{Dom}(f)$ kompaktní. Zvolme ϵ reálné kladné. Pro každé $x \in \text{Dom}(f)$ najdeme okolí $O(x)$ takové že $F(O(x)) \subset O_{\epsilon/2}(f(x))$. $O(x)$ tvoří pokrytí $\text{Dom}(f)$. Vybereme konečné podpokrytí Ω . Definujeme $\delta = \min_{U \in \Omega} (\text{Diam}(U))$, kde $\text{Diam}(U)$ je průměr množiny U . Rozdělíme $\text{Dom}(f)$ na n disjunktních podintervalů $(J_i^\epsilon)_{i=1}^n$ délky δ . Z každého intervalu J_i^ϵ vybereme bod x_i , a označíme $y_i = f(x_i)$. Definujme: $x \in J_i^\epsilon \implies \zeta_\epsilon(x) = y_i$. Pak $\forall x \in \text{Dom}(f) : |f(x) - \zeta_\epsilon(x)| \leq \epsilon$. A pro $\xi_n = \zeta_{\frac{1}{2^n}}$ je splněn předpoklad lemmatu.

4.4. Corollary: (4.2) říká, že formule (46) je speciální případ formule (34). Pro funkci, která má jen konečně mnoho bodů nespojitosti můžeme provést aproximaci na každém intervalu na němž je funkce spojitá jako v lemmatu (4.3). To znamená, že formule (34) je limitním případem formule (46).

5. Hraniční úroková míra: Je-li úroková míra konstantní a kladná je stavová funkce rostoucí a konvexní. Je-li úroková míra kladná, ale velice rychle klesá, je stavová funkce rostoucí, ale konkávní. Otázka je, jaká musí být úroková míra, aby byla stavová funkce afinní (tj. polynom stupně 1 tj. stavová funkce jednoduchého úročení s konstantní úrokovou mírou)?

Stavová funkce je

$$t \mapsto x(0) e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s)) \, ds} \quad (50)$$

Její derivace je

$$t \mapsto x(0) \ln(1+\xi(t)) e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s)) \, ds} \quad (51)$$

a druhá derivace je

$$t \mapsto \frac{x(0) e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s)) \, ds} \left(\frac{d}{dt} \xi(t) + (\ln(1+\xi(t)))^2 + (\ln(1+\xi(t)))^2 \xi(t) \right)}{1+\xi(t)} \quad (52)$$

Hledáme úrokovou míru, při které je druhá derivace rovna nule: Je-li $x(0) \neq 0$ a $\xi > 0$, je druhá derivace rovna nule pro taková ξ , která jsou řešením diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dt} \xi(t) + (\ln(1+\xi(t)))^2 + (\ln(1+\xi(t)))^2 \xi(t) = 0 \quad (53)$$

t. j. řešíme diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = -(\ln(1+\xi(t)))^2 (1+\xi(t)). \quad (54)$$

Řešení je každá funkce

$$t \mapsto \xi(t) = e^{\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)} - 1 \quad (55)$$

pro každou volbu konstanty C . Vyjádříme C vyživše počáteční podmínku (tj. hodnotu ξ v 0)

$$C = -\frac{1}{\ln(1+\xi(0))}$$

a dostáváme

$$\xi(t) = e^{\left(\frac{1}{t + \frac{1}{\ln(1+\xi(0))}}\right)} - 1 = (1 + \xi(0))^{\left(\frac{1}{t \ln(1+\xi(0))+1}\right)} - 1 \quad (56)$$

Pokud dosadíme tuto úrokovou míru do vzorce pro úročení (34) dostaneme

$$x(t) = x(0) e^{\left(\int_0^t \ln\left((1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{s \ln(1+\xi(0))+1}\right)}\right) ds\right)} = x(0) (t \ln(1 + \xi(0)) + 1) \quad (57)$$

což vskutku je afinní funkce. Tedy můžeme říci: Pokud úroková míra v čase 0 má hodnotu $\xi(0)$ a pokud v závislosti na čase roste rychleji (klesá pomaleji) než funkce

$$t \mapsto (1 + \xi(0))^{\left(\frac{1}{t \ln(1+\xi(0))+1}\right)} - 1 \quad (58)$$

je stavová funkce konvexní. Pokud klesá rychleji, je konkávní.

Citace:

- [1] Aczél, J.: Lectures on functional Equations and Their Applications, New York, Academic Press 1966
- [2] Dieudonné, J.: Treatise on analysis, Vol. III, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-III, Academic Press. New York – London, 1972
- [3] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: Stochastic Modeling in economics and Finance, Kluwert Academic Publishers, 2002, ISBN 1-4020-0840-6.
- [4] Studený V.: Functional Equation of the Rate of Inflation, e-print archive of Coronell University, 2003, www.arxiv.org