Míra růstu v makroekonomii a ve finanční matematice

Václav Studený

Department of Applied Mathematics, Faculty of Economics
and Administration, Masaryk University
Lipová 24a, 602 00 Brno
studeny@econ.muni.cz

1. Axiomy: Uvažujme veličinu jejíž hodnoty y_1 a y_2 jsou známy ve dvou bodech x_1 a x_2 (tyto hodnoty mohou být například výsledek měření). Funkce $\kappa: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, která bude kvantifikovat přírůstek této veličiny by měla mít následující vlastnosti

axiom 1 invariance vůči posunutí (v čase)

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa(x_1 + t, y_1, x_2 + t, y_2) \tag{1}$$

axiom 2 invariance vůči homotetiím (například vůči volbě měny)

$$k > 0 \Longrightarrow \kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa(x_1, y_1 \cdot k, x_2, y_2 \cdot k) \tag{2}$$

Dále požadavek symetrie v růstu a poklesu:

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = -\kappa(x_1, -y_1, x_2, -y_2) \tag{3}$$

vynucuje podmínku axiomu 2 i pro $k < 0$

axiom 3 κ je rostoucí v první a čtvrté proměnné a klesající ve druhé a třetí proměnné.

axiom 4 Počáteční podmínka: $\kappa(x_1, y, x_2, y) = 0$. (Míra růstu konstantní funkce je nulová.)

Máme

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) \overset{\text{Ax1}}{=} \kappa(0, y_1, x_2 - x_1, y_2) \overset{\text{Ax2}}{=} \kappa\left(0, 1, x_2 - x_1, \frac{y_2}{y_1}\right) \tag{4}$$

tak že existuje $\lambda: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \lambda\left(x_2 - x_1, \frac{y_2}{y_1}\right) \tag{5}$$

A λ je klesající v první a rostoucí ve druhé proměnné.

2. Funkce v ustáleném stavu:

DEFINICE Řekneme, že funkce f je v ustáleném stavu vzhledem k míře růstu κ je-li $(x_1, x_2) \mapsto \kappa(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$ konstantní funkce.

Hledáme funkce f takové, že

$$\kappa(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)) = konst. \tag{6}$$

Předpokládejme, že už známe hodnotu $f(x_1)$ a $f(x_2)$ funkce f ve dvou bodech x_1 a $x_2 = x_1 + h$ Pak

$$\kappa(x_2, f(x_2), x_2 + h, f(x_2 + h)) = \lambda\left(h, \frac{f(x_2 + h)}{f(x_2)}\right) = \lambda\left(h, \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)}\right) \tag{7}$$

A protože λ je prostá v každé proměnné (Ax 3, viz pozn. za Ax. 4) je

$$\frac{f(x_1 + 2h)}{f(x_1 + h)} = \frac{f(x_2 + h)}{f(x_2)} = \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} \tag{8}$$

a dále indukcí:

$$f(x_1 + nh) = \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} \cdot f(x_1 + (n-1)h) = \left(\frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)}\right)^n \tag{9}$$

takže v dalších ekvidistantních bodech tvoří hodnoty funkce f geometrickou posloupnost. Stejně ovšem:

$$\frac{f(x_1 + h/2)}{f(x_1)} \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1) + h/2} \Longrightarrow \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} = \left(\frac{f(x_1 + h/2)}{f(x_1)}\right)^2 \tag{10}$$

Takže f má hodnoty exponenciální funkce i ve všech bodech množiny $\{\frac{ah}{2^b}, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$. A protože tato množina je hustá (dense) v $\mathbb{R}$, platí:

2.1. Lemma: Je-li nějaká spojité funkce f v ustáleném stavu vzhledem k míře růstu, která splňuje axiomy Ax1 – Ax4, pak je to exponenciální funkce $f\colon x \mapsto Ae^{Bx}$ s nějakými konstantami A a B.

Pokud chceme, aby všechny exponenciální funkce $x \mapsto Ae^{Bx}$ byly v ustáleném stavu, máme (označíme-li $h = x_2 - x_1$)

$$\forall B\colon \kappa\left(x_1, Ae^{Bx_1}, x_2, Ae^{Bx_2}\right) = \lambda\left(x_2 - x_1, \frac{Ae^{Bx_2}}{Ae^{Bx_1}}\right) = \lambda\left(h, e^{Bh}\right) = konst \tag{11}$$

a platí:

$$\lambda(h, z) = \lambda\left(h, e^{h \ln\left(z^{1/h}\right)}\right) \overset{B=\ln\left(z^{1/h}\right)}{=\!=\!=\!=} \lambda\left(1, e^{\ln\left(z^{1/h}\right)}\right) = \lambda\left(1, z^{\frac{1}{h}}\right) \tag{12}$$

a

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa\left(0, 1, 1, \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}\right) \tag{13}$$

a tedy pro každou míru růstu κ splňující axiomy Ax1 – Ax4, k níž jsou všechny exponenciální funkce $x \mapsto Ae^{Bx}$ v ustáleném stavu existuje nějaká rostoucí funkce ϕ tak, že

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \phi\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}\right) \tag{14}$$

2.2. Poznámka: Ve finanční matematice se používá translace

$$\phi\colon x \mapsto x - 1$$

a míra růstu

$$\kappa_1\colon (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} - 1 \tag{15}$$

je tzv. *úroková míra složeného úročení za jednotku času.*

Ve finanční matematice se také částečně z historických důvodů, částečně z rigidity některých obchodních vztahů a zákonů používá tzv. úroková míra jednoduchého úročení:

$$f\colon \hat{\kappa}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} - 1 \tag{16}$$

Podle této míry jsou funkce v ustáleném stavu polynomy prvního stupně:

$$f\colon z \longmapsto K(z - x_1) + f(x_1); \tag{17}$$

3. Infinitezimální verze, (Limitní tvar):

V makroekonomii často potřebujeme vyjádřit rychlost ν růstu nějaké veličiny f v bodě a ne na intervalu: Pokud budeme chtít aby míra růstu veličiny f v bodě x_0 byla limitou její míry na intervalu pro průměr intervalu jdoucí k nule, máme:

$$\nu(f)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \kappa(x_0, f(x(0)), x, f(x)) = \lim_{x \to x_0} \phi\left(\left(\frac{f(x)}{f(x_0)}\right)^{\left(\frac{1}{x - x_0}\right)}\right) = \phi\left(e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}}\right) \tag{18}$$

A pro $\kappa = \kappa_1$ máme

$$\nu_1(f)(x_0) = e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}} - 1 \tag{19}$$

V makroekonomii se často používá míra, kterou dostaneme volbou $\phi = \ln$ v (18). V takovém případě jest

$$\tilde{\nu}(f)(x_0) = \frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)} \tag{20}$$

a pokud bychom tutéž funkci použili jako míru růstu v (14) míra růstu na intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$ by byla:

$$\tilde{\kappa}\left(x_0, f\left(x_0\right), x_1, f\left(x_1\right)\right) = \ln\left(\left(\frac{f\left(x_0\right)}{f\left(x_1\right)}\right)^{\left(\frac{1}{x_0-x_1}\right)}\right) = \frac{\ln\left(f\left(x_0\right)\right) - \ln\left(f\left(x_1\right)\right)}{x_0 - x_1} \tag{21}$$

Což je relativní přírůstek funkce $\ln\circ f$ (nikoliv funkce f) vzhledem k přírůstku argumentu této funkce. Tuto limitu v bodě $x_2 \to x_1$ má i úroková míra jednoduchého úroení za jednotku času $\hat{\kappa}$.

3.1. Poznámka: Označme tedy

$$\hat{\nu} = \lim_{x\to x_0} \hat{\kappa}\left(x_0, f\left(x_0\right), x_1, f\left(x_1\right)\right) = \tilde{\nu}\left(f\right)\left(x_0\right) \tag{22}$$

Platí

$$\hat{\nu} \neq \nu \tag{23}$$

Volíme-li v (14)

$$\phi\left(x\right) = x^t - 1 \tag{24}$$

dostaneme, označíme-li vzniklou funkci κ_t

$$\kappa_t\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right) = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} - 1 \tag{25}$$

což je tzv. *úroková míra složeného úročení za dobu délky t* a platí známé vztahy

$$\kappa = \kappa_1 = \left(\kappa_{\frac{1}{t}} + 1\right)^t \tag{26}$$

Podobně jako κ_t můžeme definovat i

$$\hat{\kappa}_t = f\colon \hat{\kappa}\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right) = \left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right)\cdot\frac{1}{x_2 - x_1}\frac{1}{t} - 1, \tag{27}$$

což je míra jednoduchého úročení za dobu délky t a platí známé vztahy:

$$\hat{\kappa}_{\frac{1}{t}} = \frac{\hat{\kappa}_1}{t} \tag{28}$$

Funkce $\kappa \mapsto \frac{\kappa}{t}$ je Taylorovým polynomem stupně 1 v bodě 0 funkce $\kappa \mapsto (\kappa+1)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1$ a historicky se používala k aproximaci při výpočtu úrokových měr za krátkou dobu. K legitimizaci této nepřesnosti vedlo zavedení pojmu interval připisování úroků. Dosazením $\frac{\kappa_1}{t}$ za $\kappa_{\frac{1}{t}}$ s nezanedbatelnou chybou, která je rostoucí v $t > 0$, dostaneme

$$\kappa_1 \sim \left(1 - \frac{\kappa}{t}\right)^t - 1 = \lambda_1 \tag{29}$$

Chyba $\lambda_1 - \kappa_1$ ovšem neroste přes všechny meze, ale má konečnou limitu $e^\kappa - 1 - \kappa$ v nekonečnu a platí

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_1 = \lim_{t\to\infty}\left(1 = \frac{\kappa}{t}\right)^t - 1 = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1 = \frac{\kappa}{t}\right)^{\frac{t}{\kappa}}\right)^\kappa - 1 = e^\kappa - 1$$

Působivost magického zjevení Eulerovy konstanty v tomto výpočtu dalo kdysi vzniknout pojmu *spojité úročení*. Je to obyčejné složené úročení, ale místo úrokové míry κ_1 z (15) se pod jménem úroková míra uvádí hodnota $\ln\left(\kappa_1 + 1\right)$.

Číslo $\ln\left(\kappa_1 + 1\right)$ dostaneme jako míru růstu, pokud v (14) volíme $\phi = \ln$ a v limitě dostaneme míru $\tilde{\nu}$ jako v (20).

4. Inverzní problém:

Použijeme-li jako míru růtu funkce f zobrazení ν máme

$$\nu(f)(x) = e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}} - 1 \tag{30}$$

Což je explicitnín vyjádření pro míru růstu ν pokud známe f a differenciální rovnice pro stavovou funkci f, pokud známe její míru růstu ν. Tuto rovnici můžeme ekvivalentě psát ve tvarech:

$$\ln(\nu(t)+1) = \mathrm{D}(\ln\circ f)(t)$$

nebo

$$\mathrm{D}(f)(t) = \ln(\nu(t)+1)\cdot f(t)$$

Rovnici můžeme vyřešit a její řešení je:

$$f\colon x \mapsto e^{\left(\int_0^x \ln(\nu(s)+1)\mathrm{d}s\right)} f(0) \tag{31}$$

kde $\nu(t)$ je úroková míra z jednotku času v okamžiku t.

Provedeme-li tentýž výpočet pro míru $\tilde{\nu}$ dostaneme rovnici (20),

$$\tilde{\nu}(f)(x_0) = \frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}$$

a její řešení je

$$f\colon x \mapsto e^{\int_0^x \nu(s)\mathrm{d}s} f(0) \tag{32}$$

Výhodou formule (32) je, že je jednodužší, než (31), její nevýhodou ovšem je, že pokud do ní dosadíme konstantní úrokovou míru, nedostaneme obvyklou formuli pro složené úročení. Následující příklad ukazuje, použití formule (31).

4.1. Example: Předpokládejme, že známe míru míru inflace za jednotku času (například roční míru inflace, pokud jednotkou zvolíme rok) v okamžiku 0 a v okamžiku 1. Předpokládejme, že v okamžimu 0 byla míra inflace za jednotku času rovna 0.1 a oamžiku 1 byla míra inflce 0.2.

Zajímá nás míra inflace za dobu $\langle 1,0\rangle$. Je zřejmé, že tato míra inflace závisí na tom, jak se míra inflce měnila uvnitř intervalu $\langle 1,0\rangle$. Tuto informaci můžeme získatž z nějaké obecné teorie časových řad nebo aproximací. Uvažujme čtyři možnosti: že byla po celou dobu konstatní a měnila se skokem v jednom, nebo ve druhém krajním bodě intervalu, že se měnila v afinní závislosti na čase a v kvadratické závislosti na čase. V těchto čtyřech případech jsou hodnotz míry inlace za jednotku času dány jednou ze čtyř následujících funkcí:

$$\bar{\iota}_1(u) := \begin{cases} 0.1, & \text{if } u < 1 \\ 0.2, & \text{if } u \geq 1 \end{cases}, \quad \bar{\iota}_2(u) := \frac{u^2}{10} + 0.1, \quad \bar{\iota}_3(u) := \frac{u}{10} + 0.1, \quad \bar{\iota}_4(u) := \begin{cases} 0.1, & \text{if } u \leq 0 \\ 0.2, & \text{if } u > 0 \end{cases} \tag{33}$$

Přitom první poslední možnost jsou triviální případy — míra za jednotku času je konstantní a interval, za který počítáme inflaci má jednotkovou délku, tedy míra inflace za tuto dobu by měla být tatáž konstanta. Obecný vzorec tedy musí dávat stejný výsledek. Máme:

$$\iota(\langle 0,1\rangle) = \mathrm{e}^{\left(\int_0^1 (\ln(1+\bar{\iota}(u)\,\mathrm{d}\,u))\right)} - 1 \tag{34}$$

takže postupně v našich čtyřech příkladech vzchází:

$$\bar{\iota} = \bar{\iota}_1 = 0.1\colon X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.1)\ \mathrm{d}\,u\right)} - 1 = 0.1 \tag{35}$$

$$\bar{\iota} = \bar{\iota}_2 = u \mapsto \frac{1}{10}u^2 + 0.1\colon X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln\left(1.1+u^2/10\right)\ \mathrm{d}\,u\right)} - 1 = 0.132945354\ldots \tag{36}$$

$$\bar{\iota} = \bar{\iota}_3 = u \mapsto \frac{1}{10}u + 0.1\colon X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.1+u/10)\ \mathrm{d}\,u\right)} - 1 = 0.149637533\ldots \tag{37}$$

$$\bar{\iota} = \bar{\iota}_4 = 0.2\colon X(1) = e^{\left(\int_0^1 \ln(1.2)\ \mathrm{d}\,u\right)} - 1 = 0.2 \tag{38}$$

s kvantitativní shodou výsledku v prvním a posledním případě s výsledkem, který jsme očekávali. Této shody bychom, bohužel, nedosáhli, kdybychom použili formuli (32). Dostaneme:

$$e^{\int_0^1 0.1du} - 1 = 0.105170918 \tag{39}$$

$$e^{\int_0^1 1/10\,u^2+0.1du} - 1 = 0.142630812 \tag{40}$$

$$e^{\int_0^1 1/10\,u+0.1du} - 1 = 0.161834243 \tag{41}$$

$$e^{\int_0^1 0.2du} - 1 = 0.221402758 \tag{42}$$

a první a poslední výsledek jsou zřejmě bezpochyby špatné. Můžeme říci že inflace se nechová jako takzvané spojité úročení.

Obvyklá formule pro budoucí hodnotu složeného úročení v případě, že úroková míra je konstantní je

$$x(t) = x(0) \cdot (1+\xi)^t, \tag{43}$$

a v případě, že je po částech konstantní, tedy If I_i jou roční úrokové míry konstntní na intervalech $I_i = (t_i, t_{i+1})$; $i = 0 \dots n$ pak úroková míra za $\cup_{i=0}^n I_i$ je

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} \tag{44}$$

4.2. Theorem: Formule (43) je speciální případ formule (44) pro konstantní úrokovou míru a formule (44) je speciální případ formule (31) po po částech konstantní úrokovou míru.

Proof: Předpokládejme že $\iota(t) = I$ je konstantní:

$$e^{\left(\int_0^t \ln(1+I)\ \mathrm{d}\,u\right)} = e^{(t\cdot\ln(1+I))} = e^{\left(\ln(1+I)^t\right)} = (1+I)^t \tag{45}$$

Nyní předpokládejme, že ι je po částech konstantní a má hodnoty I_i v každém bodě intervalu $I_i = (t_i, t_{i+1})$; $i = 0 \dots n$. Buď χ_A charakteristická funkce množiny A, pak $\iota(t) = \sum \chi_{(t_i,t_{i+1})} \cdot I_i$

$$= e^{\left(\int_0^t \ln\left(1+\chi_{(t_i,t_{i+1})}\right)\cdot I_i\ \mathrm{d}\,u\right)} = e^{\left(\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}\ln(1+I_i) - t_i \ln(1+I_i))\right)} =$$
$$= \prod_{i=0}^{n-1} e^{(t_{i+1}-t_i)\cdot\ln(1+I_i)} = \prod_{i=0}^{n-1} e^{\ln}\,(1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} \tag{46}$$

q. e. d.

Funkcionál

$$\iota \mapsto e^{\int_0^t \ln(1+\iota(s))\mathrm{d}s}$$

je spojitý v topologii stejnoměrné konvergence.

Význam věty (44) plyne z následujícího lemma:

4.3. Lemma: Pro každou spojitou funkci ι definovanou na uzavřeném intervalu existuje posloupnost po částech konstantních funkcí ξ_i taková, že $\xi_i \to \iota$

Proof: Předpokládejme, že f je spojitá. vzhkledem k předpokladu je $\mathrm{Dom}(f)$ kompaktní. Zvolme ϵ reálné kladné. Pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f)$ najdeme okolí $O(x)$ takové že $F(O(x)) \subset O_{\epsilon/2}(f(x))$. $O(x)$ toří pokrytí $\mathrm{Dom}(f)$. Vybrereme konečné podpokrytí Ω. Definujeme $\delta = \min_{U\in\Omega}(\mathrm{Diam}(U))$, kde $\mathrm{Diam}(U)$ je průměr množiny U. Rozdělíme $\mathrm{Dom}(f)$ na n disjunktních podintervalů $(J_i^\epsilon)_{i=1}^n$ délky δ. Z každého intervalu J_i^ϵ vybereme bod x_i, a označíme $y_i = f(x_i)$. Definujme: $x \in J_i^\epsilon \implies \zeta_\epsilon(x) = y_i$. Pak $\forall x \in \mathrm{Dom}(f) : |f(x) - \zeta_\epsilon(x)| \le \epsilon$. A pro $\xi_n = \zeta_{\frac{1}{2^n}}$ je splněn předpoklad lemmatu.

4.4. Corollary: (44) říká, že formule (43) je speciápní případ formule (31). Pro funkci, která má jen konečně mnoho bodů nespojitosti můžeme provést aproximaci na každém intervalu na němž je funkce spojitá jako v lemmatu (46). To znamená, že formule (31) je limitním případem formule (15).

5. Hraniční úroková míra: Je-li úroková míra konstantní a kladná je stavová funkce rostoucí a konkávní. Je-li úroková míra kladná, ale velice rychle klesá, je stavová funkce rostoucí, ale konkávní.

Otázka je, jaká mus být úroková míra, aby byla stavová funkce afinní (tj. polynom stupně +. tj stavová funkce jednoduchého úročení s konstantní úrokovou mírou)?

Stavová funkce je

$$t \mapsto x(0)\, e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds} \tag{47}$$

Její derivace je

$$t \mapsto x(0) \ln(1+\xi(t))\, e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds} \tag{48}$$

a druhá derivace je

$$t \mapsto \frac{x(0)\, e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds} \left(\frac{d}{dt}\xi(t) + (\ln(1+\xi(t)))^2 + (\ln(1+\xi(t)))^2 \xi(t)\right)}{1+\xi(t)} \tag{49}$$

Hledáme úrokovou míru, při které je druhá derivace rovna nule: Je-li $x(0) \neq 0$ a $\xi > 0$, je druhá derivace rovna nule pro taková ξ, která jsou řešením diferenciálání rovnice

$$\frac{d}{dt}\xi(t) + (\ln(1+\xi(t)))^2 + (\ln(1+\xi(t)))^2 \xi(t) = 0 \tag{50}$$

t. j. řešíme diferencíální rovnici

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -(\ln(1+\xi(t)))^2 (1+\xi(t)). \tag{51}$$

Řešení je každá funkce

$$t \mapsto \xi(t) = e^{\left(\frac{1}{t-C}\right)} - 1 \tag{52}$$

pro každou volbu konstanty C. Vyjáříme C vyžívše počáteční podmínku

$$C = -\frac{1}{\ln(1+\xi(0))}$$

a dostáváme

$$\xi(t) = e^{\left(\frac{1}{t+\frac{1}{\ln(1+\xi(0))}}\right)} - 1 = (1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{t\ln(1+\xi(0))+1}\right)} - 1 \tag{53}$$

Pokud dosadíme tuto úrokovou míru do vzorce pro úročení(31) dostaneme

$$x(t) = x(0)\; e^{\left(\int_0^t \ln\left((1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{s\ln(1+\xi(0))+1}\right)}\right) ds\right)} = x(0)\; (t\ln(1+\xi(0))+1) \tag{54}$$

což vskutku je afinní funkce. Tedy můžeme říci: Pokud úroková míra v čase 0 má hodnotu $\xi(0)$ a pokud pokud v závislosti na čase roste rychleji (klesá pomalejin) než funkce

$$t \mapsto (1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln(1+\xi(0))+1}\right)} - 1 \tag{55}$$

je stavová funkce konveksní. Pokud klesá rychleji, je konkávní.

Citace:

[1] Aczél, J.: Lectures on functional Equations and Their Applications, New York, Academic Press 1966

[2] Dieudonné, J.: Treatise on analysis, Vol. III, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-III, Academic Press. New York – London, 1972

[3] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: Stochastic Modeling in economics and Finance, Kluwert Academic Publishers, 2002, ISBN 1-4020-0840-6.

[4] Studený V.: Functional Equation of the Rate of Inflation, e-print archive of Coronell University, 2003, www.arxiv.org