4.5 Phillipsův model multiplikátoru

Zavedení časových zpoždění poskytuje realističtější obraz vztahů mezi (makro)-ekonomickými veličinami. Jedním z představitelů modelů tohoto typu je Phillipsův model multiplikátoru. Jde o model spojitého typu s lineární spotřební funkcí a obsahuje ***multiplikátor odpovídající exponenciálně rozdělenému zpoždění*** (mezi skutečnou úrovní důchodu Y a jeho potenciální hodnotou Z).

Poptávková strana modelového schématu (rozdělení důchodu na spotřebu a autonomní výdaje) neobsahuje zpoždění : předpokládá se zde, že se uskuteční plánovaná spotřeba vyjádřená lineární spotřební funkcí $\mathbf{C = c.Y}$ a že spotřebitelé mají své autonomní výdaje shrnuty v modelové proměnné $\mathbf{A}$. Celkovou poptávku lze tedy vyjádřit jako $\mathbf{z(t) = c.Y(t) + A(t)}$ neboli

(4.33) $$\mathbf{Z(t) = (1-s).Y(t) + A(t)}$$

Nabídková strana tohoto agregovaného makroekonomického modelu obsahuje multiplikátor formulovaný v podobě *(teoreticky délkou neomezeného)* exponenciálně rozloženého zpoždění :

(4.34) $$\mathbf{\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda.[Y(t) - Z(t)]}$$

kde λ je veličina udávající **rychlost reakce multiplikátoru** - rychlost přizpůsobování skutečné velikosti důchodu $\mathbf{Y}$ jeho potenciální hodnotě $\mathbf{Z}$. Sloučením (4.33) a (4.34) dostaneme

(4.35) $$\mathbf{\frac{dY(t)}{dt} + \lambda.Y(t) = \lambda.Z(t) = \lambda.(1-s).Y(t) + \lambda.A(t)}$$ neboli

(4.36) $$\mathbf{\frac{dY(t)}{dt} + \lambda.s.Y(t) = \lambda.A(t)}$$.

Výraz (4.36) představuje, jak patrno, lineární diferenciální rovnici 1. řádu, jejíž řešení nyní nalezneme.

Nejprve snadno ověříme, že řešení nalezené pro případ statiického multiplikátoru, tj. řešení $\mathbf{Y^*(t) = Y^* = \frac{\tilde{A}}{s}}$ vyhovuje této rovnici: Skutečně, zde $\mathbf{\frac{dY(t)}{dt}} = 0$ (autonomní investice se v čase nemění) a $\mathbf{\lambda.s.Y^* = \lambda.\tilde{A}}$ zcela ve shodě s pravou stranou **(4.36)**.

Řešení Phillipsova modelu multiplikátoru

Vyjádřeme nyní opět rozdíl $\mathbf{\varepsilon(t) = Y(t) - Y^*}$ tj.odchylku skutečné hodnoty $\mathbf{Y}$ od rovnovážného stavu $\mathbf{Y^*}$:

Dostaneme $\mathbf{Y(t) = Y^* + \varepsilon(t)}$, z čehož plyne $\mathbf{\frac{dY(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}}$ a dále přepisem (4.36) vztah

$$\mathbf{\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \lambda s.(Y^* + \varepsilon(t)) = \lambda.\tilde{A}}$$

Odtud (protože $\mathbf{\acute{Y}^* = \frac{\tilde{A}}{s}}$) dospějeme k homogenní lineární diferenciální rovnici

(4.37) $$\mathbf{\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \lambda.s.\varepsilon(t) = 0.}$$

jejíž řešení snadno nalezneme. Standardní úpravou (převedením na derivaci logaritmu y) obdržíme

(4.38) $$\frac{d\ln\varepsilon(t)}{dt} = -\lambda.s$$, jejímž řešením je průběh odchylky

(4.39) $$\varepsilon(t) = \varepsilon_0.\exp(-\lambda st)$$

Celkové řešení (důchodovou trajektorii $\mathbf{Y(t)}$ popsanou diferenciální rovnicí **(4.36)** dostaneme tedy ve tvaru:

(4.40) $$\mathbf{Y(t) = Y^*(t) + \left[Y(0) - Y^*(0)\right].exp(-\lambda st)}$$

Charakterizujme nyní dosažený výsledek : Trajektorie, která popisuje skutečnou úroveň důchodu Y(t) je dána součtem rovnovážné úrovně důchodu $\mathbf{Y^*(t)}$ a odchylky představované součinem $\mathbf{Y(0) - Y^*(0)}$ a záporné exponenciály $\mathbf{exp(-\lambda st)}$. Vzhledem k zápornosti argumentu v exponenciále ($\lambda > 0$, $s > 0$, $t \geq 0$) je patrné, že s rostoucím časem se odchylka $\mathbf{Y}$ od rovnovážné hodnoty $\mathbf{Y^*}$ postupně zmenšuje, přičemž rychlost konvergence skutečné úrovně k rovnovážné závisí na parametru rychlost reakce $\boldsymbol{\lambda}$ a na koeficientu mezního sklonu k úsporám $\mathbf{s}$. Odchylka v čase t je rovněž závislá (přímo úměrně) na vzdálenosti počáteční hodnoty $\mathbf{Y(0)}$ od $\mathbf{Y^*}$.

Jestliže se tedy systém na počátku nachází v počáteční úrovni $\mathbf{Y(0)}$, sleduje produkce ve spojitě uvažovaném čase průběh popsaný trajektorií **(4.40)**, dle níž produkce monotónně směřuje k rovnovážné úrovni dané konstantou $\mathbf{Y^* = \tilde{A}/s}$.

Rekapitulace

Nechť je systém na začátku („0“) v rovnováze: $Y(0) = Y^*(0)$. Nechť nastane (zvýšením autonomních výdajů) posun v poptávce o velikosti A. Nová rovnovážná úroveň je pak $Y^* = A/s$.

Průběh důchodu $Y(t)$ k nové rovnovážné úrovni je takto dán vztahem:

(4.36) $$\frac{dY(t)}{dt} + \lambda.s.Y(t) = \lambda.A(t)$$, přičemž $Y(0) = 0$.

V důsledku zvýšení poptávky o hodnotu A je průběh produkce od jedné rovnovážné hodnoty $Y^* = 0$ ke druhé $Y^* = A/s$ dán výrazem

(4.36) $$Y(t) = \frac{A}{s}.\left(1 - e^{-\lambda st}\right)$$[1]

Poznámka: Analogickou trajektorií pro diskrétní obdobu tohoto modelu by byla posloupnost

$$Y_t = \frac{A}{s}.(1-(1-s)^t),$$

která je ale – jak patrno – nezávislá na hodnotě λ .

4.6 Phillipsův model akcelerátoru a multiplikátoru

[1] Všimněme si, že při této trajektorii skutečně platí $Y(0) = 0$ a rovněž lim $t \to \infty$ $Y(t) = \frac{A}{s}$

Tento model se liší od předchozího především tím, že je do něj zaveden akcelerátor charakterizující podnět pro zvýšení investic (jako závisle proměnné) podnícený růstem produkce (v minulém období)

Označíme-li jako $\mathbf{I}$ veličinu (čistých) vyvolaných investic, bude mít akcelerátor tvar

(4.41)
$$\frac{dI(t)}{dt} = -\kappa.\left(I(t) - \nu.\frac{dY(t)}{dt}\right)$$

v němž konstanta ν představuje investiční koeficient a konstanta κ rychlost reakce. Výraz ν**.dY(t)/dt** může být považován za určitou potenciální úroveň vyvolaných investic, za níž se opožďuje skutečná veličina $\mathbf{I}$. Makrospotřební funkce je opět lineární, neobsahující časové zpoždění:

(4.42)
$$C(t) = c.Y(t) = (1-s)Y(t)$$

Nabídková stránka modelu je představována vztahem identickým s **(4.34)**

(4.43)
$$\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda.(Y(t) - Z(t))$$

Model multiplikátoru-akcelerátoru tedy **sestává ze tří rovnic** **(4.41),(4.42),(4.43)**, přičemž jeho integrujícím prvkem je opět identita rozdělení poptávky

(4.44)
$$Z(t) = C(t) + I(t) + A(t) = (1-s).Y(t) + I(t) + A(t)$$

Jak je z definičních vztahů **(4.41)** - **(4.44)** patrné, v modelu se vyskytují dvě rozložená zpoždění spojitého (exponenciálního) typu. Jedno z nich je na nabídkové straně: poptávka reaguje na rozdíl mezi skutečnou a potenciální hodnotou produkce s rychlostí λ, druhé zpoždění je na straně akcelerátoru: přírůstek investic reaguje na změny v produkci s rychlostí κ .

Poznámka: Výrazy **(4.41)** pro akcelerátor a **(4.43)** pro multiplikátor jsou odvozeny na základě teorie modelů rozložených zpoždění (konkrétně ***modelu s (nekonečným) exponenciálním zpožděním***). Zde je levostranná proměnná – tzn. v **(4.41)** změna vyvolaných investic, v **(4.42)** změna důchodu – popsána funkcí zahrnující vždy skutečnou a potenciální úroveň této proměnné. Výraz ν**.dY(t)/dt** v **(4.41)** představuje takovouto potenciální úroveň investic, zatímco v **(4.43)** je potenciální úroveň důchodu ztotožněna s celkovou poptávkou **Z(t). Konstanta** κ se nazývá ***rychlost reakce akcelerátoru***, **konstanta** λ **rychlost reakce multiplikátoru.** Obě to jsou kladná čísla, nulová hodnota by znamenala, že k žádnému přizpůsobení (skutečné hodnoty hodnotě potenciální) nedochází.

Další krok v analýze tohoto modelu spočívá v nalezení jeho řešení, které - jak je z povahy vztahů patrné - bude představováno diferenciální rovnicí vyššího než prvního řádu. Abychom tuto rovnici zformulovali a příslušné řešení nalezli, dosadíme nejprve vztah **(4.43)** do **(4.42)**. Dostaneme

(4.45)
$$\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda.Y(t) + \lambda.\left[(1-s).Y(t) + I(t) + A(t)\right],$$
což po úpravě vede k

(4.46)
$$I(t) = \frac{1}{\lambda}.\frac{dY(t)}{dt} + s.Y(t) - A(t)$$
resp. k

(4.47)
$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{\lambda}.\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + s.\frac{dY(t)}{dt},$$

neboť i zde přijímáme předpoklad, že veličina $A(t)$ je v modelu uvažována jako konstantní $A(t) = \tilde{A}$.

Výrazy pro $I(t)$ a $dI(t)/d(t)$ nyní dosadíme do **(4.41)**:

$$\frac{1}{\lambda}.\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+s.\frac{dY(t)}{dt}=-\kappa.\left[\frac{1}{\lambda}.\frac{dY(t)}{dt}+s.Y(t)-\tilde{A}\right]+\kappa.\nu.\frac{dY(t)}{dt}\ .$$

Přeskupením jednotlivých členů do pořadí s klesajícím stupněm diferenciálních členů dostaneme

(4.48)
$$\frac{1}{\lambda}.\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+\left(s+\frac{\kappa}{\lambda}-\kappa.\nu\right).\frac{dY(t)}{dt}+\kappa.s.Y(t)=\kappa.\tilde{A}$$

kterýžto výraz představuje lineární diferenciální rovnici 2. řádu obecného tvaru

(4.49)
$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+a.\frac{dY(t)}{dt}+b.Y(t)=c$$

v níž jednotlivé konstanty mají konkretizaci $a=\lambda.s+\kappa-\kappa.\lambda.\nu$, $b=\lambda.\kappa.s$, $c=\lambda.\kappa.\tilde{A}$.

Poznámka: Jedním z řešení rovnice **(4.48)** je opět trajektorie $Y(t)$ odpovídající rovnovážnému stavu $Y(t)=Y^*=\frac{\tilde{A}}{s}$, o čemž se lze snadno přesvědčit přímým dosazením: zde platí $\frac{dY(t)}{dt}=0$ a tedy i $\frac{d^2Y(t)}{dt^2}=0$, takže levá strana **(4.48)** je rovna $\kappa.s.\frac{\tilde{A}}{s}$, tedy pravé straně. □ .

Zaměříme-li se dále na vývoj odchylek od rovnováhy tzn. $\varepsilon(t)=Y(t)-Y^*$, ukáže se opět jako v řadě předchozích případů , že i zde lze dospět k lineární diferenciální rovnici 2. řádu tvaru pro tyto odchylky.:

(4.50)
$$\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2}+a.\frac{d\varepsilon(t)}{dt}+b.\varepsilon(t)=0$$

4.7 Řešení Phillipsova modelu akcelerátoru-multiplikátoru

Řešení této rovnice má - na rozdíl od předchozích případů - nemonotónní, oscilační charakter. Ten dále může jak tlumený (se zmenšující se amplitudou). tak explozivní (amplituda v čase roste), přičemž tyto oscilace kmitají kolem rovnovážného bodu $Y^*=\tilde{A}/s$.

Pokud bychom toto řešení zkoumali podrobněji, zaznamenáme, že je nutno uvažovat **dvě počáteční podmínky:**

Prvá z nich charakterizuje stav ve výchozím bodě **„0"**, tj. pro $t=0$, kde zřejmě **Y(0) = 0**, druhá pak popisuje v témže časovém okamžiku **„0"** situaci před započetím působení akcelerátoru. Tato druhá podmínka, která je dána multiplikátorem, má tvar

(4.51)
$$\frac{dY(t)}{dt}=\lambda.A \quad \text{pro } t=0$$

Průběh důchodu od jedné rovnovážné úrovně ke druhé je tedy popsán rovnicí **(4.48)** s počátečními podmínkami $Y(0)=0$ a **(4.51)** .

Řešení lineární diferenciální rovnice 2.řádu **(4.50)** nyní ve stručné formě popíšeme:

V souladu s konvenčními postupy *řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu* nejdříve zkonstruujeme tzv. *charakteristickou rovnici*, což je pro daný případ kvadratická rovnice tvaru

(4.52) $$p^2 + a.p + b = 0,$$

v níž jednotlivé konstanty mají konkretizaci $a = \lambda.s + \kappa - \kappa.\lambda.v$, $b = \lambda.\kappa.s$, $c = \lambda.\kappa.\widetilde{A}$, takže

(4.53) $$p^2 + \left(\lambda.s + \kappa - \kappa.\lambda.v \right) p + \lambda \kappa s = 0$$

Tato rovnice obsahuje celkem 4 parametry (tzv.strukturní konstanty) , které jsou omezeny těmito teoretickými omezeními $s \in (0,1)\ ;\ v \geq 0\ ;\ \lambda > 0\ ;\ \kappa > 0$,

avšak ve skutečnosti jsou hodnoty těchto parametry zpravidla soustředěny do výrazně užších oblastí:

$s \in (0.05;\ 0.025)\ ; v \in (0.6;\ 4); \lambda \in (0.5;\ 3)\ ; \kappa \in (1 - \Delta;\ 1 + \Delta)$, kde Δ je relativně malá (řádově v setinách) kladná hodnota.

Vzhledem k tomu, že rozbor všech možných verzí situací při plné této čtveřici parametrů by znamenalo až příliš pestré spektrum variant, přijímáme alespoň částečné zjednodušení, a to specifikací nejméně variabilní konstanty κ na hodnotu $\kappa = 1$. Dostaneme tím **(4.53)** z zjednodušení

(4.54) $$p^2 + \left(1 - (v - s) \right) p + \lambda s = 0 \ .$$

Dalším rozborem vyšetříme jednak podmínky, za kterých jsou *kořeny rovnice* **(4.54)** *reálné* či *komplexně sdružené*, jednak podmínky, za kterých jsou tyto *kořeny* (resp. *jejich reálná část v případě komplexních) kladné či záporné*.[2] Okolnost, **zda jsou *kořeny reálné či komplexně sdružené,* má zásadní vliv na to, zda trajektorie popsaná rovnicí (4.54) je monotónní** ($\approx$ kladné kořeny) **nebo zda je oscilující** ($\approx$ záporné kořeny)**.** Okolnost, **zda jsou *kořeny kladné nebo záporné* má přímou souvislost s tím, zda je příslušná *trajektorie explozivní*** (tj. stále více se odchylující se od konstantní úrovně)**, nebo *tlumená*** (s plynutím času směřující ke konstantní úrovni)**.**

Řešení diferenciální rovnice (4.50) má obecný tvar

(4.55) $$Y(t) = \frac{A}{s} + B_1.e^{p_1.t} + B_2.e^{p_2.t}$$, kde

p_1, p_2 **jsou kořeny charakteristické rovnice (4.54) a** B_1, B_2 **jsou libovolné konstanty, jejichž konkrétní hodnoty lze stanovit z počátečních podmínek** $Y(0) = c_0$ **a** $Y'(0) = c_1$ **pro čas** $t = 0$.

Dále vyšetříme, jakou povahu tyto kořeny mají:

Přepisem **(4.54)** do tradičnější formy – záměnou *rychlosti reakce multiplikátoru* λ za (její převrácenou hodnotu) *časovou konstantu zpoždění* $T = 1/\lambda$ - dostaneme :

(4.54A) $$p^2 + \frac{1}{T}\left(T - v + s\right).p + \frac{s}{T} = 0 \ .$$

Odtud je zřejmé, že oba ***kořeny budou komplexně sdružené právě tehdy, když***

$$D = b^2 - 4ac < 0$$, tj. když $$\frac{1}{T^2}(T - v + s)^2 - \frac{4s}{T} < 0.$$

To nastane tehdy (násobíme T^2), jestliže $(T - v - s)^2 - 4sT < 0$. Rozepsání dostaneme

(4.56A) $$T^2 - 2T(v - s) + (v - s)^2 - 4sT < 0$$, což je totéž jako podmínka

(4.56B) $$T^2 - 2T(v + s) + (v - s)^2 < 0 \ .$$

[2] Mezní případy vyšetříme a zinterpretujeme samostatně.

Přitom zjišťujeme, že tento *kvadratický trojčlen v* T *nabývá záporných hodnot pro všechna* T *ležící v intervalu* $T_1 < T < T_2$, kde

(4.57) $$T_1, T_2 = (v+s) \mp \sqrt{(v+s)^2 - (v-s)^2} = (v+s) \mp 2\sqrt{vs} = \left(\sqrt{v} \pm \sqrt{s}\right)^2 .$$

To bude splněno a **kořeny budou komplexně sdružené** (a *řešení bude tedy oscilační*), pokud bude platit

(4.58) $$\left(\sqrt{v} - \sqrt{s}\right)^2 < T < \left(\sqrt{v} + \sqrt{s}\right)^2 .$$

Vně tohoto intervalu budou oba kořeny T_1, T_2 **reálné: ,** tj. pro

(4.59) $$T < \left(\sqrt{v} - \sqrt{s}\right)^2 \text{, resp. } \left(\sqrt{v} + \sqrt{s}\right)^2 < T ,$$

přičemž **v krajních bodech tohoto intervalu bude kořen nulový:**

ověření: zřejmě dostaneme pro levý krajní bod: $T = \left(\sqrt{v} - \sqrt{s}\right)^2$

$$\left[\left(\sqrt{v} - \sqrt{s}\right)^2\right]^2 - 2\left[\left(\sqrt{v} - \sqrt{s}\right)^2\right](v+s) + (v-s)^2 = 0 \text{, protože}$$

$$\left[v+s-2\sqrt{vs}\right]^2 - 2\left[v+s-2\sqrt{vs}\right](v+s) + v^2 + s^2 - 2vs =$$
$$\left[(v+s)^2 + 4vs - 4(v+s)\sqrt{vs}\right] - 2\left[(v+s)^2 - 2\sqrt{vs}(v+s)\right] + \left[v^2 + s^2 - 2vs\right]$$

Vzájemně se zruší třetí a pátý člen a odečtou se první a čtvrtý člen:

$$-(v+s)^2 + 4vs + v^2 + s^2 - 2vs = -(v+s)^2 + (v+s)^2 = 0$$

Podobně dostaneme pro pravý krajní bod: $T = \left(\sqrt{v} + \sqrt{s}\right)^2$

$$\left[\left(\sqrt{v} + \sqrt{s}\right)^2\right]^2 - 2\left[\left(\sqrt{v} + \sqrt{s}\right)^2\right](v+s) + (v-s)^2 = 0 \text{, protože}$$

$$\left[v+s+2\sqrt{vs}\right]^2 - 2\left[v+s+2\sqrt{vs}\right](v+s) + v^2 + s^2 - 2vs =$$
$$\left[(v+s)^2 + 4vs + 4(v+s)\sqrt{vs}\right] - 2\left[(v+s)^2 + 2\sqrt{vs}(v+s)\right] + \left[v^2 + s^2 - 2vs\right]$$

Opět se vzájemně se zruší třetí a pátý člen a odečtou se první a čtvrtý člen a obdržíme totéž, do dřív:

$$-(v+s)^2 + 4vs + v^2 + s^2 - 2vs = -(v+s)^2 + (v+s)^2 = 0 . \qquad \square .$$

Tím je určen úsek (ve vztahu k parametrům v, s, T), v němž budou kořena reálné, resp. komplexní.

Dále určíme kritérium, které stanoví, zda budou kořeny (resp. jejich reálná část) kladné nebo záporné:

Hodnoty kořenů **(4.54)** $$p^2 + \frac{1}{T}(T - v + s).p + \frac{s}{T} = 0$$

jsou $$p_{1,2} = \frac{\frac{1}{T}(v-s-T) \pm \sqrt{\frac{1}{T^2}(T-v+s)^2 - 4.\frac{s}{T}}}{2} = \frac{(v-s-T) \pm \sqrt{(T-v+s)^2 - 4sT}}{2T}$$

$$p_{1,2} = \frac{(v-s-T) \pm \sqrt{v^2 + s^2 + T^2 + 2sT - 2vs - 2vT - 4sT}}{2T}$$

(4.59) $$p_{1,2} = \frac{(v-s-T) \pm \sqrt{v^2+s^2+T^2-2sT-2vs-2vT}}{2T}$$

Porovnáním absolutních hodnot obou členů v čitateli **(4.59)** umocněním dostaneme:

$$v^2+s^2+T^2-2vs-2vT+2sT \text{ , resp. } v^2+s^2+T^2-2vs-2vT-2sT$$

Jejich rozdíl představuje kladnou velikost $4sT$, o kterou je (v absolutní hodnotě) první člen[3] větší.

Kořeny p_1, p_2 (resp. jejich reálné části) **budou kladné, pokud bude platit nerovnost** $v-s>T$ **. a záporné, pokud bude platit** $v-s<T$ **. Znamená to tedy, že**

V případě $v-s>T$ (a kladných kořenů) **bude trajektorie *explozivní***

V případě $v-s<T$ (a záporných kořenů) **bude trajektorie *tlumená*.**

V případě dvojnásobných kořenů $T = \left(\sqrt{v}-\sqrt{s}\right)^2$ resp. $T = \left(\sqrt{v}+\sqrt{s}\right)^2$ budou kořeny rovnice **(4.54)** následující:

(4.60A) $$p_{1=2} = \frac{(v-s-T)}{2T} = \frac{v-s-(\sqrt{v}-\sqrt{s})^2}{2(\sqrt{v}-\sqrt{s})^2} = \frac{v-s-(v+s-2\sqrt{vs})}{2(v+s-2\sqrt{vs})} = \frac{-s+\sqrt{vs}}{v+s-2\sqrt{vs}},$$

resp.

(4.60B) $$p^*{}_{1=2} = \frac{(v-s-T)}{2T} = \frac{v-s-(\sqrt{v}+\sqrt{s})^2}{2(\sqrt{v}+\sqrt{s})^2} = \frac{v-s-(v+s+2\sqrt{vs})}{2(v+s+2\sqrt{vs})} = \frac{-s-\sqrt{vs}}{v+s+2\sqrt{vs}}.$$

Je zřejmé, že – při kladných v,s **- *bude*** *dvojnásobný* ***kořen*** $p^*{}_{1=2}$ ***záporný*, a tedy řešení bude tlumené; na druhé straně -** za téže podmínky – nelze obecně totéž přímo říci o dvojnásobném **kořenu** $p_{1=2}$**, u něhož znaménko čitatele není jednoznačné, avšak s o ohledem na to, že v ekonomické realitě je** $v>s$ **a následně bude čitatel kladný a *kořen*** $p_{1=2}$ ***bude také kladný*. V tomto případě lze tedy počítat s explozivním charakterem řešení.**

Řešení diferenciální rovnice (4.50) bude mít v případě dvojnásobných kořenů obecný tvar

(4.61A) $$Y(t) = \frac{A}{s} + B_1.e^{p_{1,2}.t} + B_2.te^{p_{1,2}.t}$$, resp.

(4.61B) $$Y(t) = \frac{A}{s} + B_1.e^{p^*{}_{1,2}.t} + B_2.te^{p^*{}_{1,2}.t}$$, resp.

Podle vyšetřování vztahů mezi mezním sklonem ke spoření a investičním koeficientem platí

(4.62) $$1-\sqrt{s} < \sqrt{v} < 1+\sqrt{s}$$

Odtud vyplývá, že

dolní hranice tohoto **intervalu** $\left(\sqrt{v}-\sqrt{s}\right)^2$ **menší než 1,** zatímco

horní hranice tohoto **intervalu** $\left(\sqrt{v}+\sqrt{s}\right)^2$ **je větší než 1**

Poznámka

[3] Poté, co oba členy povýšíme do 2. mocnin.

V případě oscilujícího řešení (tj.jsou-li kořeny rovnice **(4.54)** komplexně sdružené), bude mít oscilující komplexní člen v $Y(t)$, který získáme sloučením obou exponenciálních členů v (4) tvar

(4.63) $r.e^{\alpha t}.cos(\omega t+\varepsilon)$, kde $p=\alpha \pm i.\omega$ jsou právě kořeny rovnice **(4.54)**

Abychom odlišili ***oscilace explozivní*** $(\alpha > 0)$ od ***oscilací tlumených*** $(\alpha < 0)$, zjistíme velikost α

(4.64) $$\alpha = -\frac{1}{2T}.(T-v+s)$$

Je tedy patrné , že **oscilace budou explozivní, pokud** $T < v-s$ a **tlumené, pokud** $T > v-s$.[4]

A) pro případ $\frac{1}{\lambda} < \left[\sqrt{v}-\sqrt{s}\right]^2$ bude výsledná trajektorie **neoscilující explozivní**

B) pro $\left[\sqrt{v}-\sqrt{s}\right]^2 < \frac{1}{\lambda} < v-s$ bude výsledná trajektorie **oscilující explozivní**

C) pro $v-s < \frac{1}{\lambda} < \left[\sqrt{v}+\sqrt{s}\right]^2$ bude výsledná trajektorie **oscilující tlumená**

D) pro případ $\left[\sqrt{v}+\sqrt{s}\right]^2 < \frac{1}{\lambda}$ bude výsledná trajektorie **neoscilující tlumená**

Ve výše uvedené tabulce jsou uvedeny **hodnoty časové konstanty** $T=\lambda^{-1}$ **zpoždění v nabídce pro různé možnosti průběhu řešení** $Y(t)$. Nesmíme ale zapomenout, že v této interpretaci je jednotkou času časová konstanta zpoždění akcelerátoru $\kappa = 1$. Situace $T < 1$ tedy znamená, že zpoždění nabídky T je kratší (*tj.reakce je rychlejší*) než zpoždění akcelerátoru κ. Při $T > 1$ je tomu opačně.
Příslušné tři kritické hodnoty pro T jsou

$$\left(\sqrt{v}-\sqrt{s}\right)^2 \;;\; v-s; \quad \left(\sqrt{v}+\sqrt{s}\right)^2 \quad .$$

První a třetí z nich jsou – jak bylo řečeno – menší, resp.větší než 1, prostřední hodnota může být menší než 1.

Uveďme čtyři příklady s možnými a celkem realistickými hodnotami **s,v :**

zvolíme-li	$s=0{,}04\;;\;v=1$,	**potom kritické hodnoty jsou**	**0,64**	**0,96**	**1,44**
zvolíme-li	$s=0{,}25\;;\;v=0{,}6$,	**potom kritické hodnoty jsou**	**0,08**	**0,35**	**1,62**
zvolíme-li	$s=0{,}16;\;v=0{,}4$,	**potom kritické hodnoty jsou**	**0,04**	**0,20**	**1,00**
zvolíme-li	$s=0{,}25;\;v=1{,}44$,	**potom kritické hodnoty jsou**	**0,49**	**0,70**	**2,89**

Z toho plyne, že **oscilační průběh řešení** Y_t **lze očekávat tehdy, když zpoždění nabídky** (T) **není o mnoho kratší** (nebo delší) **než zpoždění akcelerátoru (** κ **). Průběh řešení bude pravděpodobně explozivní, jestliže zpoždění nabídky** T **bude kratší a tlumený vývoj lze očekávat tehdy, jestliže bude zpoždění nabídky** T **aspoň tak dlouhé** (tzn. reakce je aspoň tak pomalá) **jako u akcelerátoru** κ **.**
Z toho plyne, že **explozivní a oscilační průběh řešení** Y_t **je** (pro reálný vývoj ekonomiky bohužel) **nejpravděpodobnějším výsledkem tohoto modelu multiplikátoru-akcelerátoru.**

[4] Pokud bude platit $T=v-s$, budou oscilace neměnné, tzn. amplituda kmitání bude stále konstantní.

Ve vyložené podobě ***Phillipsova modelu*** je jedno omezení, jmenovitě to, že model obsahuje pouze ***jedno exponenciální zpoždění*** na straně nabídky a ***jedno exponenciální zpoždění*** v akcelerátoru. Uvolníme-li tuto podmínku, nebude těžké zavést při formulaci do modelu ***vícenásobné exponenciální zpoždění*** realističtějšího druhu. Rovnice analogické **(4.49)**. budou pak diferenciálními rovnicemi vyšších řádů a jejich řešení bude přirozeně složitější. **Oscilační průběh řešení** $Y(t)$ **bude** nesporně **pravděpodobnější** (ten roste s množstvím komplexních kořenů), **budou –li zpoždění vícenásobná**.

Pomocí *modelu multiplikátoru* [4.5] nebo *modelu multiplikátoru-akcelerátoru* [4.6] můžeme též **zkoumat, jak se bude produkce přizpůsobovat náhlé změně poptávky o hodnotu** A**, jež nastane v čase** $t=0$**.** Předpokládejme, že systém je až do okamžiku $t=0$ v rovnováze. Zvolme $A=0$ a $Y=0$ jako výchozí rovnovážnou úroveň při $t<0$. V okamžiku $t=0$ se náhle zvýší poptávka o konstantní hodnotu A, tj. autonomní výdaje vzrostou. V modelu **[4.5] je další průběh produkce** $Y(t)$

průběh produkce Y dán vztahem **(4.40)** za podmínky, že $Y(0)=0$ v čase $t=0$.

Průběh důchodu je podle **(4.36)** roven $Y(t)=\frac{A}{s}(1-e^{-\lambda st})$,

což znamená, že Y **směřuje monotónně k nové rovnovážné úrovni** $Y=\frac{A}{s}$.

V ***modelu multiplikátoru-akcelerátoru*** je průběh řešení Y pro $T>0$ dán rovnicí při $A=konst.$ K řešení rovnice **(4.49)** je třeba dvou počátečních hodnot. Jedna z nich je $Y(0)=0$. Druhou, (4.51), lze odvodit z toho, že v čase $t=0$, kdy dochází k posunu poptávky, se systém přizpůsobuje jen podle multiplikátoru, protože akcelerátor ještě nezačal působit. Řešením tohoto modelu budou tedy nejspíše explozivní oscilace kolem hodnoty $Y=\frac{A}{s}$, což je úroveň daná statickým multiplikátorem po změně poptávky.

Mezní situace pro případy

E) pro případ $\frac{1}{\lambda}=\left[\sqrt{v}-\sqrt{s}\right]^2$ bude výsledná trajektorie tvaru **(4.61A).**

F) pro případ $v-s=\frac{1}{\lambda}$ bude výsledná trajektorie oscilující s konstantní amplitudou

G) pro případ $\left[\sqrt{v}+\sqrt{s}\right]^2=\frac{1}{\lambda}$ bude výsledná trajektorie tvaru **(4.61B)**.

Shrnutí výsledku možných trajektorií modelu v závislosti na parametrech λ, s, v

Připomeňme si, že ve Phillipsově modelu akcelerátoru-multiplikátoru vystupují 4 parametry, jmenovitě s, v, λ, κ, které mohou ovlivnit (a také silně ovlivňují) **základní podobu výstupní důchodové trajektorie.**

Výsledkem analýzy , při které (aspoň pro částečné zjednodušení pokládáme $\kappa = 1$) **je následující**[5]

A) pro případ $\frac{1}{\lambda} < \left[\sqrt{v} - \sqrt{s}\right]^2$ bude výsledná trajektorie **neoscilující explozivní**

B) pro $\left[\sqrt{v} - \sqrt{s}\right]^2 < \frac{1}{\lambda} < v - s$ bude výsledná trajektorie **oscilující explozivní**

C) pro $v - s < \frac{1}{\lambda} < \left[\sqrt{v} + \sqrt{s}\right]^2$ bude výsledná trajektorie **oscilující tlumená**

D) pro případ $\left[\sqrt{v} + \sqrt{s}\right]^2 < \frac{1}{\lambda}$ bude výsledná trajektorie **neoscilující tlumená**

S ohledem na velikost parametrů v realitě , kde platí $s << v$, budou všechny meze kladná čísla.

Vysvětlivky:

Oscilujícím průběhem rozumíme nemonotónní periodicky se opakující růst střídaný klesáním (jako u funkcí $\sin$ či $\cos$) . Opačný průběh trajektorie (monotónní) nazveme **neoscilující.**

Explozívním průběhem rozumíme takový průběh, kdy se odchylky od konstantního rovnovážného stavu postupně zvětšují. Pokud se tyto odchylky postupně zmenšují (a trajektorie se přibližuje konstantní úrovni) , pak mluvíme o **tlumeném průběhu**. Není-li průběh ani explozivní, ani tlumený, pak jde o setrvání na konstantní odchylce od rovnovážného stavu.

[5] Podrobné odvození lze nalézt např. v učebnici **R.G.D. Allen: Matematická Ekonomie str. 250-255**.