W. GREEN: strana 711, příklad 6

Máme specifikován následující model

(1) $$y_1 = \beta_1 y_2 + {}_{11}x_1 + {}_1$$

(2) $$y_2 = \beta_2 y_1 + {}_{22}x_2 + {}_{32}x_3 + {}_2.$$

Všechny proměnné jsou měřeny jako odchylky od svých průměrů. Vzorek 25 pozorování poskytl následující matici součtů čtverců a křížových součinů (proměnných) **:**

(3) $$\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ = \end{array} \begin{array}{c} (\; y_1 \quad y_2 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \;) \\ \begin{pmatrix} 20 & 6 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 10 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 10 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 8 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Úlohy k řešení :

A) Odhadněte obě rovnice metodou OLS.

B) Odhadněte parametry obou rovnic metodou 2SLS. Odhadněte také asymptotickou kovarianční matici 2SLS-odhadové funkce.

C) Získejte LIML odhady parametrů první rovnice.

D) Odhadněte obě rovnice pomocí 3SLS.

E) Odhadněte matici koeficientů redukovaného tvaru pomocí OLS a nepřímo s použitím strukturních odhadů z části B).

A1) Odhad parametrů 1. rovnice metodou OLS

(1) $$y_1 = \beta_1 y_2 + \gamma_{11} x_1 + u_1$$

Výpočetní vzorec pro odhad parametrů metodou OLS pro danou situaci:

(4) $$\begin{pmatrix} {}_{OLS}\hat{\beta}_1 \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \end{pmatrix}$$ **, kde** $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{y}_2$.

konkrétně $\mathbf{Y}_1'\mathbf{Y}_1 = \mathbf{y}_2.\mathbf{y}_2 = 10$ $\quad$ $\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1.\mathbf{y}_1 = 4$

$\mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 = \mathbf{y}_2.\mathbf{x}_1 = 3$ $\quad$ $\mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 = 3$

$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1.\mathbf{x}_1 = 5$ $\quad$ $\mathbf{Y}_1'\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2.\mathbf{y}_1 = 6$ $\quad$ $\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1.\mathbf{y}_1 = 4$

Po dosazení do výpočetního vzorce (4) dostaneme:

$$\begin{pmatrix} {}_{OLS}\hat{\beta}_1 \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30-12}{41} \\ \frac{-18+40}{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{41} \\ \frac{22}{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}439 \\ 0{,}536 \end{pmatrix}$$

A2) Odhad parametrů 2. rovnice metodou OLS

(2) $$y_2 = \beta_2 y_1 + \gamma_{22} x_2 + \gamma_{32} x_3 + u_2$$

Výpočetní vzorec pro odhad parametrů metodou OLS pro danou situaci:

(5) $$\begin{pmatrix} {}_{OLS}\hat{\beta}_2 \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_{22} \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_2'\mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_2'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_2 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_2'\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$$ **, kde** $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{X}_2 = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2$.

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_3\mathbf{y}_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_3\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_2'\mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_1.\mathbf{y}_1 \qquad \mathbf{Y}_2'\mathbf{X}_2 = (\mathbf{y}_1\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\mathbf{x}_3) \qquad \mathbf{Y}_2'\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1.\mathbf{y}_2$$

Po dosazení do výpočetního vzorce (5) dostaneme:

$$\begin{pmatrix} {}_{OLS}\hat{\beta}_2 \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_{22} \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1y_1 & y_1x_2 & y_1x_3 \\ y_1x_2 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ y_1x_3 & x_2x_3 & x_3x_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1y_2 \\ x_2y_2 \\ x_3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 8 \\ 5 & 8 & 15 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1575}\begin{pmatrix} 86 & -5 & -26 \\ -5 & 275 & -145 \\ -26 & -145 & 191 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}193 \\ 0{,}384 \\ 0{,}197 \end{pmatrix},$$

B1) Odhad parametrů 1.rovnice metodou 2SLS

(1) $$y_1 = \beta_1 y_2 + \gamma_{11} x_1 + u_1$$

Výpočetní vzorec pro odhad parametrů metodou 2SLS pro danou situaci:

(6) $$\begin{pmatrix} {}_{2SLS}\hat\beta_1 \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \end{pmatrix}$$ **, kde**

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{y}_2 \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$$

$$\mathbf{Y}_1'\mathbf{X}_1 = \mathbf{y}_2.\mathbf{x}_1 = 3 \qquad \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1.\mathbf{y}_1 = 4$$

$$\mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 = \mathbf{x}_1.\mathbf{y}_2 = 3 \qquad \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1.\mathbf{x}_1 = 5$$

Po dosazení do výpočetního vzorce (6) dostaneme:

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix}\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_3\mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}'\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix}\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_3\mathbf{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_1x_1 & x_2x_3 & x_3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$ **, takže máme**

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{376}.\begin{pmatrix} 150-64 & -(30-24) & 16-30 \\ -(30-24) & 75-9 & -(40-6) \\ 16-30 & -(40-6) & 50-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{376}.\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}$$ **, protože**

$$\det = 5.10.15 + 2.8.3 + 3.2.8 - 5.8.8 - 2.2.15 - 3.3.10 = 750 + 48 + 48 - 320 - 60 - 90 = 846 - 470 = 376$$

$$\begin{pmatrix} {}_{2SLS}\hat\beta_1 \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \;\; 6 \;\; 7)\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} (3 \;\; 6 \;\; 7)\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} {}_{2SLS}\hat\beta_1 \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \;\; 6 \;\; 7)\frac{1}{376}\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} (3 \;\; 6 \;\; 7)\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} {}_{2SLS}\hat\beta_1 \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \;\; 6 \;\; 7)\begin{pmatrix} 0{,}2287 & -0{,}016 & -0{,}0372 \\ -0{,}016 & 0{,}1755 & -0{,}0904 \\ -0{,}0372 & -0{,}0904 & 0{,}1223 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} (3 \;\; 6 \;\; 7)\begin{pmatrix} 0{,}2287 & -0{,}016 & -0{,}0372 \\ -0{,}016 & 0{,}1755 & -0{,}0904 \\ -0{,}0372 & -0{,}0904 & 0{,}1223 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}_{2SLS}\hat\beta_1 \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}6383 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 3{,}44681 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4{,}6383 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3{,}44681 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}36882 \\ 0{,}57871 \end{pmatrix}$$

B2) Odhad parametrů 2.rovnice metodou 2SLS

(2) $$y_2 = \beta_2 y_1 + \gamma_{22} x_2 + \gamma_{32} x_3 + \varepsilon_2$$

Výpočetní vzorec pro odhad parametrů metodou 2SLS pro danou situaci:

$$\begin{pmatrix} {}_{2SLS}\hat\beta_2 \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{22} \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_2'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_2'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_2 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_2'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$$, **kde**

$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_1$ $\quad \mathbf{X}_2 = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ $\quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2$ $\quad \mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$

$\mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_2 = (\mathbf{x}_2\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3\mathbf{y}_1)'$ $\qquad \mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 = (\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3\mathbf{y}_2)'$

$\mathbf{Y}_2'\mathbf{X}_2 = (\mathbf{y}_1\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\mathbf{x}_3)$ $\qquad \mathbf{X}'\mathbf{Y}_2 = (\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3\mathbf{y}_1)'$

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}'\mathbf{y}_2 = (\mathbf{x}_1\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3\mathbf{y}_2)'$$

$\mathbf{Y}_2'\mathbf{X} = (\mathbf{y}_1\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\mathbf{x}_3)$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{376}\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{32} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} (4\ \ 3\ \ 5)\cdot(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} & (3\ \ 5) \\ \hline \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix} \end{array} \right)^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c} (4\ \ 3\ \ 5)\cdot(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\begin{pmatrix}3\\6\\7\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} \end{array} \right)$$

A po vyčíslení tedy
$$\begin{pmatrix} {}_{2SLS}\hat\beta_2 \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{22} \\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4844 \\ 0{,}3672 \\ 0{,}1094 \end{pmatrix}$$

F1) Odhad parametrů 1. rovnice metodou IV

(1) $$y_1 = \beta_1 y_2 + \gamma_{11} x_1 + \varepsilon_1$$

Za instrumenty vezmeme (vzhledem ke dvěma vysvětlujícím proměnným první rovnice) **proměnnou** x_1 **z první rovnice a (např.) proměnnou** x_3 **z druhé rovnice**

Výpočetní vzorec pro odhad parametrů metodou IV pro danou situaci je následující :

$$_{IV}\delta_1 = \left[P_1'(Y_1, X_1)\right]^{-1} \cdot \left[P_1' y_1\right]$$

$$_{IV}\delta_1 = \left[(x_1, x_3)'(y_2, x_1)\right]^{-1} \cdot \left[(x_1, x_3)' y_1\right]$$

(4) $$\begin{pmatrix} _{IV}\hat{\beta}_1 \\ _{IV}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_2 & x_1 x_1 \\ x_3 y_2 & x_3 x_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_3 y_1 \end{pmatrix}$$

přičemž $Y_1 = y_2$, $X_1 = x_1$, $y_1 = y_1$, $P_1 = (x_1, x_3)$, **takže**

$x_1 y_2 = 3$, $x_1 . x_1 = 5$, $x_3 . y_2 = 7$ $x_3 . x_1 = 3$ $x_1 y_1 = 4$ $x_3 y_1 = 5$

Po dosazení do výpočetního vzorce ((4)) **dostaneme:**

$$\begin{pmatrix} _{IV}\hat{\beta}_1 \\ _{IV}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-26}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-26}\begin{pmatrix} -13 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

F2) Odhad parametrů 2.rovnice metodou IV

(2) $$y_2 = \beta_2 y_1 + \gamma_{22} x_2 + \gamma_{32} x_3 + \varepsilon_2$$

Za instrumenty tentokrát vezmeme (rovnice má 3 vysvětlující proměnné) **všechny exogenní: proměnnou** x_1 **z první rovnice a proměnné** x_2, x_3 **z druhé rovnice**

Výpočetní vzorec pro odhad parametrů metodou IV nyní máme:

$$\delta_2 = \left[P_2'(Y_2, X_2)\right]^{-1} \cdot \left[P_2' y_2\right]$$ **, neboli rozepsáno**

(6) $$\delta_2 = \left[(x_1, x_2, x_3)'(y_1, x_2, x_3)\right]^{-1} \cdot \left[(x_1, x_2, x_3)' y_2\right],$$ **při rozepsání**

$$\begin{pmatrix} _{IV}\hat{\beta}_1 \\ _{IV}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 y_1 & x_2 x_2 & x_2 x_3 \\ x_3 y_1 & x_3 x_2 & x_3 x_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} _{IV}\hat{\beta}_1 \\ _{IV}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 8 \\ 5 & 8 & 15 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4844 \\ 0{,}3672 \\ 0{,}1094 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme tedy (ve shodě s teoretickými poznatky) **shodný výsledek s 2SLS :**

$$\begin{pmatrix} _{IV}\hat{\beta}_2 \\ _{IV}\hat{\gamma}_{22} \\ _{IV}\hat{\gamma}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4844 \\ 0{,}3672 \\ 0{,}1094 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _{2SLS}\hat{\beta}_2 \\ _{2SLS}\hat{\gamma}_{22} \\ _{2SLS}\hat{\gamma}_{32} \end{pmatrix}$$

Zobecněná metoda nejmenších čtverců GLS - parametrů 1. regresní rovnice

(1) $$y_1 = \beta_1 y_2 + \gamma_{11} x_1 + u_1$$

Příslušný GLS-estimátor má tvar

$$\begin{pmatrix} {}_{GLS}\hat{\beta}_1 \\ {}_{GLS}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1'\hat{\Sigma}^{11}Y_1 & Y_1'\hat{\Sigma}^{12}X_1 \\ X_1'\hat{\Sigma}^{12}Y_1 & X_1'\hat{\Sigma}^{22}X_1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} Y_1'\hat{\Sigma}^{11}y_1 \\ X_1'\hat{\Sigma}^{12}y_1 \end{pmatrix}$$

, v němž však musíme specifikovat tvar kovarianční matice (ze zadaných dat to přirozeně nelze). **Vezměme tedy např.**

$$S = \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$ **, odkud máme** $$S^{-1} = \hat{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{15} & \frac{3}{15} \\ \frac{3}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

V našem případě máme (shodně jako u OLS)**:** $Y_1 = y_1$ **,** $X_1 = x_1$ $Y_1 = y_2$

$$\begin{pmatrix} {}_{GLS}\hat{\beta}_1 \\ {}_{GLS}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2'S^{11}y_2 & y_2'S^{12}x_1 \\ x_1'S^{12}y_2 & x_1'S^{22}x_1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} y_2'S^{11}y_1 \\ x_1'S^{12}y_1 \end{pmatrix}$$

, po dosazení

$$\begin{pmatrix} {}_{GLS}\hat{\beta}_1 \\ {}_{GLS}\hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.\frac{6}{15} & 3\frac{3}{15} \\ 3.\frac{3}{15} & 5\frac{4}{15} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 6\frac{6}{15} \\ 4\frac{3}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/5 \\ 3/5 & 4/3 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4{,}97333} \begin{pmatrix} 4/3 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}547 \\ -0{,}075 \end{pmatrix}$$

Zobecněná metoda nejmenších čtverců GLS - parametrů 2. regresní rovnice

(2) $$y_2 = \beta_2 y_1 + \gamma_{22} x_2 + \gamma_{32} x_3 + \varepsilon_2 .$$

$$\begin{pmatrix} GLS\ \hat\beta_2 \\ GLS\ \hat\gamma_{22} \\ GLS\ \hat\gamma_{32} \end{pmatrix} = \left(X_2' \hat\Sigma_2^{-1} X_2 \right)^{-1} X_2' \hat\Sigma_2^{-1} y_2$$, **kde zvolíme S např. jako** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2802 & 0{,}0495 & -0{,}022 \\ 0{,}0495 & 0{,}1264 & 0{,}0549 \\ -0{,}022 & 0{,}0549 & 0{,}1978 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} GLS\ \hat\beta_2 \\ GLS\ \hat\gamma_{22} \\ GLS\ \hat\gamma_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' S^{11} y_1 & x_2' S^{12} y_1 & x_3' S^{13} y_1 \\ y_1' S^{12} x_2 & x_2' S^{22} x_2 & x_3' S^{23} x_2 \\ y_1' S^{13} x_3 & x_2' S^{23} x_3 & x_3' S^{33} x_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1' S^{11} y_2 \\ x_2' S^{12} y_2 \\ x_3' S^{13} y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} GLS\ \hat\beta_2 \\ GLS\ \hat\gamma_{22} \\ GLS\ \hat\gamma_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2802.20 & 0{,}0495.3 & -0{,}022.5 \\ 0{,}0495.3 & 0{,}1264.10 & 0{,}0549.8 \\ -0{,}022.5 & 0{,}0549.8 & 0{,}1978.15 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2802.6 \\ 0{,}0495.6 \\ -0{,}022.7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} GLS\ \hat\beta_2 \\ GLS\ \hat\gamma_{22} \\ GLS\ \hat\gamma_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}604 & 0{,}1485 & -0{,}110 \\ 0{,}1485 & 1{,}264 & 0{,}4392 \\ -0{,}110 & 0{,}4392 & 2{,}967 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}6812 \\ 0{,}297 \\ -0{,}154 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2925 \\ 0{,}2265 \\ -0{,}0746 \end{pmatrix}$$

Kovarianční matice OLS-odhadové funkce parametrů 1. regresní rovnice

$$Cov\begin{pmatrix} {}_{OLS}\hat{\beta}_1 \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_1 \end{pmatrix} = {}_{OLS}s1_e (X'X)^{-1}$$

V našem případě tedy využijeme platnost vztahu

$${}_{OLS}SSE1 = y'y - b'X'{}_{OLS}b$$ **neboli po dosazení patřičných proměnných**

$${}_{OLS}SSE1 = \Sigma y_{t1}^2 - {}_{OLS}\hat{\beta}_1.\Sigma y_{t1}y_{t2} - {}_{OLS}\hat{\gamma}_{11}.\Sigma y_{t1}x_{t1}$$ **. Vyčíslíme:**

$${}_{OLS}SSE1 = \ :0 - \ ,439 * 6 - \ ,536 * 4 = \ 5,222$$ **, z čehož** $${}_{OLS}s1^2_e = \frac{\ 5,222}{25 -} = \ ,661826$$

$${}_{OLS}Cov\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\gamma}_{11} \end{pmatrix} = 0,661826.\begin{pmatrix} 0,121951 & -0,07317 \\ -0,07317 & 0,243902 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,080710 & -0,048426 \\ -0,048426 & 0,161421 \end{pmatrix}$$

pro porovnání

$${}_{2SLS}As.Cov\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} = 0,61889.\begin{pmatrix} 0,3523245 & -0,21139 \\ -0,21139 & 0,326836 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,218049 & -0,13084 \\ -0,13084 & 0,202275 \end{pmatrix}$$

Kovarianční matice OLS-odhadové funkce parametrů 2. regresní rovnice

$$Cov\begin{pmatrix} {}_{OLS}\hat{\beta}_2 \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_{22} \\ {}_{OLS}\hat{\gamma}_{32} \end{pmatrix} = {}_{OLS}s2_e (X'X)^{-1}$$

Nyní opět využijeme platnost vztahu $${}_{OLS}SSE2 = y'y - b'X'{}_{OLS}b$$ **neboli po dosazení**

$${}_{OLS}SSE2 = \Sigma y_{t2}^2 - {}_{OLS}\hat{\beta}_2.\Sigma y_{t1}y_{t2} - {}_{OLS}\hat{\gamma}_{22}.\Sigma y_{t2}x_{t2} - {}_{OLS}\hat{\gamma}_{32}.\Sigma y_{t2}x_{t3}$$ **Vyčíslíme:**

$${}_{OLS}SSE2 = \ 0 - \ .0,193 - \ .0,384 - \ .0,197 = \ ,159$$ **, z čehož plyne**

$${}_{OLS}s2^2_e = \frac{{}_{OLS}SSE2}{T -} = \frac{5,159}{25 -} = \ ,2345$$

$${}_{OLS}Cov\begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\gamma}_{22} \\ \hat{\gamma}_{32} \end{pmatrix} = 0,2345.\begin{pmatrix} 0,054603 & -0,00317 & -0,01651 \\ -0,00317 & 0,174603 & -0,09206 \\ -0,01651 & -0,09206 & 0,12127 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,012804 & -0,00074 & -0,00387 \\ -0,00074 & 0,040944 & -0,02159 \\ -0,00387 & -0,02159 & 0,028438 \end{pmatrix}$$

pro porovnání

$${}_{2SLS}AS.Cov\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{32} \end{pmatrix} = 0,164984.\begin{pmatrix} 0,4934 & -0,0287 & -0,1492 \\ -0,0287 & 0,1761 & -0,0844 \\ -0,1492 & -0,0844 & 0,1614 \end{pmatrix}$$

B3) Asymptotická kovarianční matice 2SLS-odhadové funkce parametrů 1. regresní rovnice

má tvar $$\sqrt{T}(\hat{\delta}_{.i} - \quad _{.i}) \approx \quad [\,0, \sigma_{ii}.\text{plim}\left(\frac{Q_i'Q_i}{T}\right) \quad]$$

$$Q_i[q, m_i + \; _i] = \; R^{-}[q,q]X'[q,T]Y_i[T,m_i]; R^{-}[q,q]X'[q,T]X_i[T,q_i]) \;,$$

Výpočetní vzorec pro odhad parametrů metodou 2SLS pro danou situaci:

$$_{2SLS}Cov\begin{pmatrix}\beta_1\\ \gamma_{11}\end{pmatrix} = \; _{SLS}\, s_e^{\,2}.(Q_1'Q_1)^{-1}$$, kde

$$(Q_1'Q_1)^{-1} = \begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} (8 \quad 6 \quad 7).\begin{pmatrix} 0{,}2287 & -0{,}016 & -0{,}0372 \\ -0{,}016 & 0{,}1755 & -0{,}0904 \\ -0{,}0372 & -0{,}0904 & 0{,}1223 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\6\\7\end{pmatrix} & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4{,}6383 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{14{,}1915}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4{,}6383 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3523245 & -0{,}21139 \\ -0{,}21139 & 0{,}326836 \end{pmatrix}$$

a $$_{2SLS}s_e^{\,2} = \frac{_{2SLS}SSE}{T}$$

$$SSE = \;'e = (\; - \;b)'(\; - \;b) = \;'y - \;'Xb - \;'X'y + \;'X'Xb =$$
$$y'y - \;'X(X'X)^{-} X'y - \;'X(X'X)^{-} XX'y + \;'X(X'X)^{-} X'X(X'X)^{-} X'y =$$
$$y'y - \;'X(X'X)^{-} X'y - \;'X(X'X)^{-} XX'y + \;'X(X'X)^{-} X'y = \;'y - \;'X(X'X)^{-} X'y$$
$$y'y - \;'Xb = \;'\left[\; - (X'X)^{-} X'\right]y = \;'My$$

V našem případě tedy využijeme platnost vztahu

$$SSE1 = \;'y - \;'Xb \quad \text{neboli} \quad SSE1 = \;\sum y_t^{\,2} - \hat{a}.\sum y_t - \hat{b}.\sum y_t x_t$$

$$_{2SLS}SSE1 = \;\sum y_{t1}^{\,2} - {}_{2SLS}\,\hat{\beta}_1.\sum y_{t1}y_{t2} - {}_{2SLS}\,\hat{\gamma}_{11}.\sum y_{t1}x_{t1}$$

$$_{2SLS}SSE1 = \;0 - \;{,}36882*6 - \;{,}57871*4 = \;5{,}47224$$

$$_{2SLS}s1^2_e = \;\frac{5{,}47224}{25} = \;{,}61889$$

$$_{2SLS}Cov\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\gamma}_{11}\end{pmatrix} = 0{,}61889.\begin{pmatrix} 0{,}3523245 & -0{,}21139 \\ -0{,}21139 & 0{,}326836 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}218049 & -0{,}13084 \\ -0{,}13084 & 0{,}202275 \end{pmatrix}$$

B4) Asymptotická kovarianční matice 2SLS-odhadové funkce parametrů 2. regresní rovnice

$$ {}_{2SLS}\mathrm{Cov}\begin{pmatrix}\hat\beta_2\\ \hat\gamma_{22}\\ \hat\gamma_{32}\end{pmatrix} = {}_{2SLS}\, s_e^{2}.\left(Q_2'Q_2\right)^{-1} $$, kde

$$ \left(Q_2'Q_2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & Y_2'X_2 \\ X_2'Y_2 & X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1} = $$

$$ = \begin{pmatrix} \left(4\ \ 3\ \ 5\right)\left(X'X\right)^{-1}\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} & \left(3\ \ 5\right) \\ \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(4\ \ 3\ \ 5\right)\begin{pmatrix} 0{,}2287 & -0{,}0160 & -0{,}0372\\ -0{,}016 & 0{,}1755 & -0{,}0904\\ -0{,}0372 & -0{,}0904 & 0{,}1223\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix} & \left(3\ \ 5\right) \\ \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} $$

$$ = \begin{pmatrix} 3{,}71277 & 3 & 5\\ 3 & 10 & 8\\ 5 & 8 & 15\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} 150-64 & -(45-40) & 24-50\\ -(45-40) & 3.71277*15-25 & -(3{,}71277*8-15)\\ 24-50 & -(3{,}71277*8-15) & 37{,}1277-9\end{pmatrix} = \ldots = $$

$$ \begin{pmatrix} 0{,}4934 & -0{,}0287 & -0{,}1492\\ -0{,}0287 & 0{,}1761 & -0{,}0844\\ -0{,}1492 & -0{,}0844 & 0{,}1614\end{pmatrix} $$

$$ {}_{2SLS}SSE2 = \sum y_{t2}^{2} - {}_{2SLS}\hat\beta_2\cdot\sum y_{t1}y_{t2} - {}_{2SLS}\hat\gamma_{22}\cdot\sum y_{t2}x_{t2} - {}_{2SLS}\hat\gamma_{32}\cdot\sum y_{t2}x_{t3} $$

$$ {}_{2SLS}SSE\,2 = [illegible]0 - [illegible].0{,}4844 - [illegible].0{,}3672 - [illegible].0{,}1094 = 4{,}1246 $$

$$ {}_{2SLS}s2^{2}_{e} = \frac{4{,}1246}{25} = 0{,}164984 $$

$$ {}_{2SLS}\mathrm{Cov}\begin{pmatrix}\hat\beta_2\\ \hat\gamma_{22}\\ \hat\gamma_{32}\end{pmatrix} = 0{,}164984.\begin{pmatrix} 0{,}4934 & -0{,}0287 & -0{,}1492\\ -0{,}0287 & 0{,}1761 & -0{,}0844\\ -0{,}1492 & -0{,}0844 & 0{,}1614\end{pmatrix} $$

E) Odhad matice parametrů redukovaného tvaru

Odhad (OLS) matice parametrů redukovaného tvaru: $\Pi = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 6 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 10 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 10 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X'X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_1\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X'Y} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vypočteme inverzi k $\mathbf{X'X}$:

$$(\mathbf{X'X})^{-1} = \frac{1}{376}.\begin{pmatrix} 150-64 & 30-24 & 16-30 \\ 30-24 & 75-9 & 40-6 \\ 16-30 & 40-6 & 50-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{376}.\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Pi} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y} = \frac{1}{376}.\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}68085 & 0{,}32979 \\ 0{,}01064 & 0{,}37234 \\ 0{,}19149 & 0{,}20213 \end{pmatrix}$$

D) Simultánní odhad parametrů 1. a 2. rovnice metodou 3SLS

Příslušný estimátor má tvar ${}_{3SLS}\delta = (Q'\Phi^{-} Q)^{-} (Q'\Phi^{-} w)$,resp.rozvedeno do detailní podoby

$$\begin{pmatrix} \hat\sigma^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat\sigma^{11}Y_1'X_1 & \hat\sigma^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat\sigma^{12}Y_1'X_2 \\ \hat\sigma^{11}X_1'Y_1 & \hat\sigma^{11}X_1'X_1 & \hat\sigma^{12}X_1'Y_2 & \hat\sigma^{12}X_1'X_2 \\ \hat\sigma^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat\sigma^{21}Y_2'X_1 & \hat\sigma^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat\sigma^{22}Y_2'X_2 \\ \hat\sigma^{21}X_2'Y_1 & \hat\sigma^{21}X_2'X_1 & \hat\sigma^{22}X_2'Y_2 & \hat\sigma^{22}X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat\sigma^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.1} + \hat\sigma^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.2} \\ \hat\sigma^{11}X_1'y_{.1} + \hat\sigma^{12}X_1'y_{.2} \\ \hat\sigma^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_1 + \hat\sigma^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_2 \\ \hat\sigma^{21}X_2'y_1 + \hat\sigma^{22}X_2'y_2 \end{pmatrix}$$

, kde

$$X'X = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_1x_1 & x_2x_3 & x_3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{376} \cdot \begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2287 & -0{,}016 & -0{,}0372 \\ -0{,}016 & 0{,}1755 & -0{,}0904 \\ -0{,}0372 & -0{,}0904 & 0{,}1223 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat\sigma^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat\sigma^{11}Y_1'X_1 & \hat\sigma^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat\sigma^{12}Y_1'X_2 \\ \hat\sigma^{11}X_1'Y_1 & \hat\sigma^{11}X_1'X_1 & \hat\sigma^{12}X_1'Y_2 & \hat\sigma^{12}X_1'X_2 \\ \hat\sigma^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat\sigma^{21}Y_2'X_1 & \hat\sigma^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat\sigma^{22}Y_2'X_2 \\ \hat\sigma^{21}X_2'Y_1 & \hat\sigma^{21}X_2'X_1 & \hat\sigma^{22}X_2'Y_2 & \hat\sigma^{22}X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat\sigma^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.1} + \hat\sigma^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.2} \\ \hat\sigma^{11}X_1'y_{.1} + \hat\sigma^{12}X_1'y_{.2} \\ \hat\sigma^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_1 + \hat\sigma^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_2 \\ \hat\sigma^{21}X_2'y_1 + \hat\sigma^{22}X_2'y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma_{11} \\ \beta_2 \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11} y_2' X(X'X)^{-1}X'y_2 & \hat{\sigma}^{11} y_2 x_1 & \hat{\sigma}^{12} y_2 X(X'X)^{-1}X'y_1 & \hat{\sigma}^{12} (y_2 x_2 \quad y_2 x_3) \\ \hat{\sigma}^{11} x_1 y_2 & \hat{\sigma}^{11} x_1 x_1 & \hat{\sigma}^{12} x_1 y_1 & \hat{\sigma}^{12} (x_1 x_2 \quad x_1 x_3) \\ \hat{\sigma}^{21} y_1 X(X'X)^{-1}X'y_2 & \hat{\sigma}^{21} y_1 x_1 & \hat{\sigma}^{22} y_1 X(X'X)^{-1}X'y_1 & \hat{\sigma}^{22} (y_1 x_2 \quad y_1 x_3) \\ \hat{\sigma}^{21}\begin{pmatrix} x_2 y_2 \\ x_3 y_2 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}^{21}\begin{pmatrix} x_2 x_1 \\ x_3 x_1 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}^{22}\begin{pmatrix} x_2 y_1 \\ x_3 y_1 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}^{22}\begin{pmatrix} x_2 x_2 & x_2 x_3 \\ x_2 x_3 & x_3 x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11} y_2 X(X'X)^{-1}X'y_{.1} + \hat{\sigma}^{12} y_2 X(X'X)^{-1}X'y_{.2} \\ \hat{\sigma}^{11} x_1 y_{.1} + \hat{\sigma}^{12} x_1 y_{.2} \\ \hat{\sigma}^{21} y_1 X(X'X)^{-1}X'y_1 + \hat{\sigma}^{22} y_1 X(X'X)^{-1}X'y_2 \\ \hat{\sigma}^{21}\begin{pmatrix} x_2 y_1 \\ x_3 y_1 \end{pmatrix} - \hat{\sigma}^{22}\begin{pmatrix} x_2 y_2 \\ x_3 y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Začneme-li postupně naplňovat tento výraz číselnými hodnotami, dostaneme:

Po dosazení za jednotlivé jednoduché momenty:

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11} y_2' X(X'X)^{-1}X'y_2 & \hat{\sigma}^{11} 3 & \hat{\sigma}^{12} y_2 X(X'X)^{-1}X'y_1 & \hat{\sigma}^{12} (\quad 7) \\ \hat{\sigma}^{11} 3 & \hat{\sigma}^{11} 5 & \hat{\sigma}^{12} 4 & \hat{\sigma}^{12} (\quad 3) \\ \hat{\sigma}^{21} y_1 X(X'X)^{-1}X'y_2 & \hat{\sigma}^{21} y_1 x_1 & \hat{\sigma}^{22} y_1 X(X'X)^{-1}X'y_1 & \hat{\sigma}^{22} (\quad 5) \\ \hat{\sigma}^{21}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}^{21}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}^{22}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}^{22}\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11} y_2 X(X'X)^{-1}X'y_{.1} + \hat{\sigma}^{12} y_2 X(X'X)^{-1}X'y_{.2} \\ \hat{\sigma}^{11} 4 + \hat{\sigma}^{12} 3 \\ \hat{\sigma}^{21} y_1 X(X'X)^{-1}X'y_1 + \hat{\sigma}^{22} y_1 X(X'X)^{-1}X'y_2 \\ \hat{\sigma}^{21}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \hat{\sigma}^{22}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Po dosazení hodnot inverze momentové matice X'X

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2287 & -0{,}016 & -0{,}0372 \\ -0{,}016 & 0{,}1755 & -0{,}0904 \\ -0{,}0372 & -0{,}0904 & 0{,}1223 \end{pmatrix}$$ **, budou výrazy**

$$y_2 X(X'X)^{-1}X'y_2 = (x_1 y_2 \quad x_2 y_2 \quad x_3 y_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_2 x_2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_3 x_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 y_2 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\quad 6 \quad 7) \begin{pmatrix} 0{,}2287 & -\;016 & -\;0372 \\ -\;016 & 0{,}1755 & -\;0904 \\ -\;0372 & -\;0904 & 0{,}1223 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \,,6383$$

$$y_2 X(X'X)^{-1} X' y_1 = \begin{pmatrix} x_1y_2 & x_2y_2 & x_3y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3x_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_1 \\ x_3y_1 \end{pmatrix}$$

$$y_2' X(X'X)^{-1} X' y_1 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2287 & -0,016 & -0,0372 \\ -0,016 & 0,1755 & -0,0904 \\ -0,0372 & -0,0904 & 0,1223 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3,4468$$

$$y_1' X(X'X)^{-1} X' y_2 = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & x_3y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3x_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1y_2 \\ x_2y_2 \\ x_3y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1' X(X'X)^{-1} X' y_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2287 & -0,016 & -0,0372 \\ -0,016 & 0,1755 & -0,0904 \\ -0,0372 & -0,0904 & 0,1223 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 3,4468$$

$$y_1' X(X'X)^{-1} X' y_1 = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & x_3y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3x_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_1 \\ x_3y_1 \end{pmatrix}$$

$$y_1' X(X'X)^{-1} X' y_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2287 & -0,016 & -0,0372 \\ -0,016 & 0,1755 & -0,0904 \\ -0,0372 & -0,0904 & 0,1223 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3,7128$$

Po dosazení jednotlivých momentů do matice ( ). Dostaneme [1]**:**

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \hat\sigma^{11}4,6383 & \hat\sigma^{11}.3 & \hat\sigma^{12}3,4468 & \hat\sigma^{12}(8 \;\; 7) \\ \hat\sigma^{11}3 & \hat\sigma^{11}5 & \hat\sigma^{12}4 & \hat\sigma^{12}(4 \;\; 3) \\ \hat\sigma^{21}3,4468 & \hat\sigma^{21}4 & \hat\sigma^{22}3,7128 & \hat\sigma^{22}(8 \;\; 5) \\ \hat\sigma^{21}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} & \hat\sigma^{21}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} & \hat\sigma^{22}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} & \hat\sigma^{22}\begin{pmatrix}10 & 8\\8 & 15\end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat\sigma^{11}3,4468 + \hat\sigma^{12}4,6383 \\ \hat\sigma^{11}4 + \hat\sigma^{12}3 \\ \hat\sigma^{21}3,7128 + \hat\sigma^{22}3,4468 \\ \hat\sigma^{21}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + \hat\sigma^{22}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Závěrečným krokem pak bude dosazení prvků 2SLS- kovarianční matice reziduí do (*) a následné vyčíslení této matice :

[1] Tato matice je rozměrů [5x5] , dimenze odpovídá počtu všech odhadovaných parametrů modelu.

$$_{2SLS}\mathrm{Cov}\begin{pmatrix} \hat\beta_2 \\ \hat\gamma_{22} \\ \hat\gamma_{32} \end{pmatrix} = 0,164984 . \begin{pmatrix} 0,4934 & -0,0287 & -0,1492 \\ -0,0287 & 0,1761 & -0,0844 \\ -0,1492 & -0,0844 & 0,1614 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,081403 & -0,00474 & -0,02462 \\ -0,00474 & 0,02905 & -0,01392 \\ -0,02462 & -0,01392 & 0,02663 \end{pmatrix}$$

$${}_{2SLS}Cov\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat\sigma_{11} & \hat\sigma_{12}\\ \hat\sigma_{12} & \hat\sigma_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{12} & s_{22}\end{pmatrix}$$ .kde $$s_{ij} = \frac{{}_{2SLS}e_i \cdot {}_{2SLS}e_j}{T}$$

$${}_{2SLS}s2^2_e = \frac{4,1246}{25} = 0,164984 \qquad {}_{2SLS}s1^2_e = \frac{15,47224}{25} = 0,61889$$

$${}_{2SLS}Cov\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat\sigma_{11} & \hat\sigma_{12}\\ \hat\sigma_{12} & \hat\sigma_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,61889 & s_{12}\\ s_{12} & 0,164984\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
\hat\sigma^{11}.4,6383 & \hat\sigma^{11}.3 & \hat\sigma^{12}\,3,4468 & \hat\sigma^{12}(\ 7\ )\\
\hat\sigma^{11}3 & \hat\sigma^{11}5 & \hat\sigma^{12}4 & \hat\sigma^{12}(\ 3\ )\\
\hat\sigma^{21}3,4468 & \hat\sigma^{21}4 & \hat\sigma^{22}3,7128 & \hat\sigma^{22}(\ 5\ )\\
\hat\sigma^{21}\begin{pmatrix}6\\ 7\end{pmatrix} & \hat\sigma^{21}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} & \hat\sigma^{22}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix} & \hat\sigma^{22}\begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix}
\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}
\hat\sigma^{11}3,4468 + \hat\sigma^{12}4,6383\\
\hat\sigma^{11}4 + \hat\sigma^{12}3\\
\hat\sigma^{21}3,7128 + \hat\sigma^{22}3,4468\\
\hat\sigma^{21}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix} + \hat\sigma^{22}\begin{pmatrix}6\\ 7\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\hat\sigma^{11} & \hat\sigma^{12}\\ \hat\sigma^{12} & \hat\sigma^{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat\sigma_{11} & \hat\sigma_{12}\\ \hat\sigma_{12} & \hat\sigma_{22}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0,61889 & s_{12}\\ s_{12} & 0,164984\end{pmatrix}^{-1} =$$

$$SSE12 = {}_{2SLS}e_1'\,{}_{2SLS}e_2 = (y_1 - X_{1\,2SLS}b_1)'(y_2 - X_{2\,2SLS}b_2) = y_1'y_2 - y_1'X_2b_2 - b_1'X_1'y_2 + b_1'X_1'X$$

$$y_1'y_2 - y_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y_2 - y_1'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y_2 + y_1'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y_2 =$$

$$y_1'y_2 - (y_1x_2, y_1x_3)\begin{pmatrix}x_2x_2 & x_2x_3\\ x_2x_3 & x_3x_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_2y_2\\ x_3y_2\end{pmatrix} - (y_1x_1)(x_1x_1)^{-1}(x_1y_2)$$

$$+ (y_1x_1)(x_1x_1)^{-1}(x_1x_2, x_1x_3)\begin{pmatrix}x_2x_2 & x_2x_3\\ x_2x_3 & x_3x_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_2y_2\\ x_3y_2\end{pmatrix} =$$

$$SSE12 = {}_{2SLS}e_1'\,{}_{2SLS}e_2 = (y_1 - X_{1\,2SLS}b_1)'(y_2 - X_{2\,2SLS}b_2) =$$

$$y_1'y_2 - y_1'X_2b_2 - b_1'X_1'y_2 + b_1'X_1'X_2b_2 =$$

$$y_1'y_2 - y_1'(y_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}\beta_{22}\\ \gamma_{22}\\ \gamma_{32}\end{pmatrix} - (\beta_{11}\quad \gamma_{11})\begin{pmatrix}y_2\\ x_1\end{pmatrix}y_2 + (\beta_{11}\quad \gamma_{11})\begin{pmatrix}y_2\\ x_1\end{pmatrix}(y_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}\beta_{22}\\ \gamma_{22}\\ \gamma_{32}\end{pmatrix}$$

$$= y_1y_2 - (y_1y_1\quad y_1x_2\quad y_1x_3)\begin{pmatrix}\beta_{22}\\ \gamma_{22}\\ \gamma_{32}\end{pmatrix} - (\beta_{11}\quad \gamma_{11})\begin{pmatrix}y_2y_2\\ x_1y_2\end{pmatrix} - (\beta_{11}\quad \gamma_{11})\begin{pmatrix}y_2y_1 & y_2x_2 & y_2x_3\\ x_1y_1 & x_1x_2 & x_1x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{22}\\ \gamma_{22}\\ \gamma_{32}\end{pmatrix} =$$

$$= 6 - (20\quad 3\quad 5)\begin{pmatrix}{}_{2SLS}\beta_{22}\\ {}_{2SLS}\gamma_{22}\\ {}_{2SLS}\gamma_{32}\end{pmatrix} - ({}_{2SLS}\beta_{11}\quad {}_{2SLS}\gamma_{11})\begin{pmatrix}10\\ 3\end{pmatrix} - ({}_{2SLS}\beta_{11}\quad {}_{2SLS}\gamma_{11})\begin{pmatrix}6 & 6 & 7\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}_{2SLS}\beta_{22}\\ {}_{2SLS}\gamma_{22}\\ {}_{2SLS}\gamma_{32}\end{pmatrix} =$$

$$SSE12 = {}_{2SLS}e_1'\,{}_{2SLS}e_2 = (y_1 - X_{1\,2SLS}b_1)'(y_2 - X_{2\,2SLS}b_2) =$$

$$= 6 - (20 \quad 3 \quad 5)\begin{pmatrix}0{,}4844\\0{,}3672\\0{,}1094\end{pmatrix} - (0{,}36882 \quad 0{,}57871)\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix} + (0{,}36882 \quad 0{,}57871)\begin{pmatrix}6&6&7\\4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}4844\\0{,}3672\\0{,}1094\end{pmatrix} =$$

neboť $\begin{pmatrix}{}_{2SLS}\hat\beta_2\\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{21}\\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}4844\\0{,}3672\\0{,}1094\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}{}_{2SLS}\hat\beta_1\\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}36882\\0{,}57871\end{pmatrix}$

$$SSE12 = {}_{2SLS}e_1'\,{}_{2SLS}e_2 = (y_1 - X_{1\,2SLS}b_1)'(y_2 - X_{2\,2SLS}b_2) =$$

$$= - 1{,}3366 - {,}4243 + {,}9032 = - {,}8555$$

$${}_{2SLS}s12_e = \frac{-{,}8555}{25} = -{,}27422$$

$$\begin{pmatrix}\hat\sigma^{11} & \hat\sigma^{12}\\ \hat\sigma^{12} & \hat\sigma^{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat\sigma_{11} & \hat\sigma_{12}\\ \hat\sigma_{12} & \hat\sigma_{22}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0{,}61889 & -0{,}27422\\ -0{,}27422 & 0{,}164984\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}6{,}1309 & 10{,}1901\\ 10{,}1901 & 22{,}9982\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
6{,}1309.4{,}6383 & 6{,}1309.3 & 10{,}1901.3{,}4468 & 10{,}1901.(\ \ 7)\\
6{,}1309.3 & 6{,}1309.5 & 10{,}1901.4 & 10{,}1901(\ \ 3)\\
10{,}1901.3{,}4468 & 10{,}1901.4 & 22{,}9982.3{,}7128 & 22{,}9982.(\ \ 5)\\
10{,}1901\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} & 10{,}1901.\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} & 22{,}9982\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} & 22{,}9982.\begin{pmatrix}10&8\\8&15\end{pmatrix}
\end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix}
6{,}1309.3{,}4468 + 10{,}1901.4{,}6383\\
6{,}1309.4 + 10{,}1901.3\\
10{,}1901.3{,}7128 + 22{,}9982.3{,}4468\\
10{,}1901\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} + 22{,}9982\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}{}_{3SLS}\hat\beta_1\\ {}_{3SLS}\hat\gamma_{11}\\ {}_{3SLS}\hat\beta_2\\ {}_{3SLS}\gamma_{22}\\ {}_{3SLS}\hat\gamma_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
10{,}43695 & 18{,}3927 & 35{,}12324 & 61{,}1406 & 71{,}3307\\
18{,}3927 & 30{,}6545 & 40{,}7604 & 20{,}3802 & 30{,}5703\\
35{,}12324 & 40{,}7604 & 85{,}38772 & 68{,}9946 & 114{,}991\\
61{,}1406 & 20{,}3802 & 68{,}9946 & 229{,}982 & 344{,}973\\
71{,}3307 & 30{,}5703 & 114{,}991 & 344{,}973 & 211{,}9379
\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}68{,}39673\\55{,}0939\\117{,}104\\168{,}5595\\211{,}9379\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}3688\\0{,}5787\\0{,}4717\\0{,}3112\\0{,}1636\end{pmatrix}$$

Takže výsledný 3SLS-odhad parametrů celé pětice parametrů je (bez záruky) :

$$\begin{pmatrix}{}_{3SLS}\hat\beta_1\\ {}_{3SLS}\hat\gamma_{11}\\ {}_{3SLS}\hat\beta_2\\ {}_{3SLS}\gamma_{22}\\ {}_{3SLS}\hat\gamma_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}3688\\0{,}5787\\0{,}4717\\0{,}3112\\0{,}1636\end{pmatrix},\ \text{zatímco}\ \begin{pmatrix}{}_{2SLS}\hat\beta_1\\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}36882\\0{,}57871\end{pmatrix}\ \text{a}\ \begin{pmatrix}{}_{2SLS}\hat\beta_2\\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{21}\\ {}_{2SLS}\hat\gamma_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}4844\\0{,}3672\\0{,}1094\end{pmatrix}$$

E) Odhad parametrů 1. rovnice metodou LIML

Nejprve sestavíme obě matice W_{11}, W_{11}^* z výchozí momentové matice:

$$W_{11} = \frac{Y_1'Y_1}{T} - \frac{Y_1'X}{T} \cdot \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \cdot \frac{X'Y_1}{T}$$

$$\frac{Y_1'Y_1}{T} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad \frac{Y_1'X}{T} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \frac{X'Y_1}{T} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\frac{X'X}{T} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} = \frac{25}{376} \cdot \begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}$$

Takže máme $\frac{Y_1'Y_1}{T} = \begin{pmatrix} \frac{20}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{10}{25} \end{pmatrix}$ **a**

$$= \frac{1}{25.376} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{25.376} \cdot \begin{pmatrix} 1396 & 1296 \\ 1296 & 1744 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1485 & 0{,}1379 \\ 0{,}1379 & 0{,}1855 \end{pmatrix}$$

$$W_{11} = \frac{Y_1'Y_1}{T} - \frac{Y_1'X}{T} \cdot \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \cdot \frac{X'Y_1}{T} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}24 \\ 0{,}24 & 0{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1485 & 0{,}1379 \\ 0{,}1379 & 0{,}1855 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6515 & 0{,}1021 \\ 0{,}1021 & 0{,}2145 \end{pmatrix}$$

Druhá matice W_{11}^* má tvar

$$W_{11}^* = \frac{Y_1'Y_1}{T} - \frac{Y_1'X_1}{T} \cdot \left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1} \cdot \frac{X_1'Y_1}{T}$$

$$\frac{Y_1'Y_1}{T} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad \frac{Y_1'X_1}{T} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{X_1'Y_1}{T} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{X_1'X_1}{T} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \left(\frac{X_1'X_1}{T}\right)^{-1} = 5$$

$$W_{11}^* = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 5 \cdot \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W_{11}^* = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}24 \\ 0{,}24 & 0{,}4 \end{pmatrix} - \frac{1}{125} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}24 \\ 0{,}24 & 0{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}128 & 0{,}096 \\ 0{,}096 & 0{,}072 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}672 & 0{,}144 \\ 0{,}144 & 0{,}328 \end{pmatrix}$$

Dále určíme vlastní vektor k nejmenšímu vlastnímu číslu matice W_{11}^* v metrice matice W_{11}:

$$W_{11}^* . \tilde{\beta}^0_{.1} = \lambda^* . W_{11} . \tilde{\beta}^0_{.1}$$ **, neboli číselně**

$$\begin{pmatrix} 0{,}672 & 0{,}144 \\ 0{,}144 & 0{,}328 \end{pmatrix} \tilde{\beta}^{0}_{.1} = \lambda^{*} \begin{pmatrix} 0{,}6515 & 0{,}1021 \\ 0{,}1021 & 0{,}2145 \end{pmatrix} \tilde{\beta}^{0}_{.1}$$

Užijeme k tomu matlabovskou proceduru *eig*.

$$[V, D] = eig(A,B)\ ,$$

v níž za A dosadíme matici W_{11}^{*} a za B dosadíme matici W_{11} a pomocí které dostaneme

$$V = \begin{pmatrix} -1{,}2852 & -0{,}0832 \\ 0{,}4723 & 2{,}1943 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1{,}0083 & 0 \\ 0 & 1{,}5313 \end{pmatrix}$$

Hledaný vektor vlastních čísel bude obsažen v 1. sloupci matice V, k němu příslušné vlastní číslo je to nejmenší. Jednoznačnosti vlastního vektoru lze dosáhnout normováním $\beta^{0}_{11} =$. Po tomto normování dostaneme hledaný vektor $\tilde{\beta}_{.1}$ jako

$$\tilde{\beta}_{.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\tilde{\beta}^{0}_{.1}}{\tilde{\beta}^{0}_{11}} \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad \tilde{\beta}_{.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{0{,}4723}{-1{,}2852} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}3675 \end{pmatrix}$$

Následně určíme vektor parametrů $\tilde{\gamma}_{.1}$ příslušných predeterminovaným proměnným:.

$$\tilde{\gamma}_{.1} = \left(\frac{X_1' X_1}{T}\right)^{-1} . \left(\frac{X_1' Y_1}{T}\right) \tilde{\beta}_{.1}$$

$$\tilde{\gamma}_{.1} = \left(\frac{5}{25}\right)^{-1} . \frac{1}{25}\,(4 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}3675 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\,(4 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}3675 \end{pmatrix} = 1{,}0205$$

E) Odhad parametrů 2. rovnice metodou LI ML

Nejprve určíme obě matice W_2, W_2^* z výchozí momentové matice:

$$W_{22} = \frac{Y_2'Y_2}{T} - \frac{Y_2'X}{T}.\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}.\frac{X'Y_2}{T}$$

$$\frac{Y_2'Y_2}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}, \quad \frac{Y_2'X}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{X'Y_2}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\frac{X'X}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}, \text{ **tedy** } \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} = \frac{25}{376}.\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}$$

Takže máme $\frac{Y_2'Y_2}{T} = \begin{pmatrix} \frac{10}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{20}{25} \end{pmatrix}$

a $\frac{Y_2'X}{T}.\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}.\frac{X'Y_2}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.\frac{25}{376}.\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}.\frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{25.376}.\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 86 & -6 & -14 \\ -6 & 66 & -34 \\ -14 & -34 & 46 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25.376}.\begin{pmatrix} 1744 & 1296 \\ 1296 & 1396 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1855 & 0{,}1379 \\ 0{,}1379 & 0{,}1485 \end{pmatrix}$$

$$W_{22} = \frac{Y_2'Y_2}{T} - \frac{Y_2'X}{T}.\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}.\frac{X'.Y_2}{T} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}24 \\ 0{,}24 & 0{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1855 & 0{,}1379 \\ 0{,}1379 & 0{,}1485 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2145 & 0{,}1021 \\ 0{,}1021 & 0{,}6515 \end{pmatrix}$$

Druhá matice W_{22}^* má tvar

$$W_{22}^* = \frac{Y_2'Y_2}{T} - \frac{Y_2'X_2}{T}.\left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1}.\frac{X_2'Y_2}{T}$$

$$\frac{Y_2'Y_2}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}, \quad \frac{Y_2'X_2}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \frac{X_2'Y_2}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\frac{X_2'X_2}{T} = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}, \text{ **tedy** } \left(\frac{X_2'X_2}{T}\right)^{-1} = 25.\frac{1}{86}.\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$W_{22}^* = \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 20 \end{pmatrix} - \frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.\frac{25}{86}.\begin{pmatrix} 15 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}.\frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$W_{22}^* = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}24 \\ 0{,}24 & 0{,}8 \end{pmatrix} - \frac{1}{25.86}\begin{pmatrix} 145 & 212 \\ 212 & 358 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}24 \\ 0{,}24 & 0{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}0674 & 0{,}0986 \\ 0{,}0986 & 0{,}1665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3323 & 0{,}1414 \\ 0{,}1414 & 0{,}6335 \end{pmatrix}$$

Dále určíme vlastní vektor k nejmenšímu vlastnímu číslu matice W_{22}^{*} v metrice matice W_{22}:

$$W_{22}^{*}.\tilde{\beta}^{0}{}_{.2} = \lambda^{*}.W_{22}.\tilde{\beta}^{0}{}_{.2}$$ **, neboli číselně**

$$\begin{pmatrix} 0,3323 & 0,1414 \\ 0,1414 & 0,6335 \end{pmatrix} \tilde{\beta}^{0}{}_{.2} = \lambda^{*}.\begin{pmatrix} 0,2145 & 0,1021 \\ 0,1021 & 0,6515 \end{pmatrix} \tilde{\beta}^{0}{}_{.2}$$

Opět k tomu užijeme matlabovskou proceduru *eig*.

[V, D] = eig(A,B) ,

do níž za A dosadíme matici W_{11}^{*} a za B dosadíme matici W_{11} a pomocí které dostaneme

$$V = \begin{pmatrix} 0,4440 & -2,2002 \\ -1,2840 & 0,0997 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0,9487 & 0 \\ 0 & 1,5528 \end{pmatrix}$$

Hledaný vektor vlastních čísel je obsažen v 1. sloupci matice V, k němu příslušné vlastní číslo $0,9487$ je to nejmenší. Jednoznačnosti vlastního vektoru dosáhneme normováním $\beta^{0}{}_{22} =$. Po tomto normování dostaneme hledaný vektor $\tilde{\beta}_{.1}$ jako

$$\tilde{\beta}_{.2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\tilde{\beta}^{0}{}_{.2}}{\tilde{\beta}^{0}{}_{22}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad \tilde{\beta}_{2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{0,444}{-1,284} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3458 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Následně určíme LIML-odhad vektor parametrů $\tilde{\gamma}_{.2}$ příslušných predeterminovaným proměnným:.

$$\tilde{\gamma}_{.2} = \left(\frac{X_2' X_2}{T} \right)^{-1} . \left(\frac{X_2' Y_2}{T} \right) \tilde{\beta}_{.2}$$

$$\tilde{\gamma}_{.2} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{22} \\ \tilde{\gamma}_{32} \end{pmatrix} = 25.\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}^{-1} . \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,3458 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{86} \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,3458 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4155 \\ 0,3604 \end{pmatrix}$$