REDUKOVANÝ TVAR EKONOMETRICKÉHO MODELU

REDUKOVANÝ TVAR ***modelu*** **je taková forma ekonometrického modelu, v níž každá rovnice popisuje závislost jediné běžné endogenní proměnné toliko na predeterminovaných proměnných a na náhodných složkách modelu. Koeficienty, které tento tvar obsahuje, vyjadřují přímo kvantitativní závislosti** vysvětlovaných **běžných endogenních proměnných na** vysvětlujících **predeterminovaných proměnných.**

Matematický zápis redukovaného tvaru závisí na tom, zda výchozí strukturní tvar zapíšeme v „symbolickém tvaru" nebo v zápise „s pozorováními" a rovněž na tom, který ze zápisů strukturního tvaru užijeme.

1. Redukovaný tvar odvozený ze strukturního zapsaného „symbolicky"

Vezmeme-li strukturní tvar v podobě

(1) $$y = B.y + C.x + \varepsilon$$ **, potom**

dospějeme k redukovanému tvaru převedením matice běžných endogenních proměnných nalevo a násobením vzniklého vztahu zleva maticí $\left(I - B \right)^{-1}$**, o níž jsme dříve předpokládali, že je regulární: Dostaneme**

(2) $$y = (I - B)^{-1} Cx + (I - B)^{-1} \varepsilon$$ **, v němž**

jednotlivé výrazy jsou sloupcovými vektory, jak je patrné z dimenzí jednotlivých výrazů

$$y_{[m,1]} = (I - B)^{-1}{}_{[m,m]} C_{[m,q]} x_{[q,1]} + (I - B)^{-1}{}_{[m,m]} \varepsilon_{[m,1]}$$

Redukovaný tvar zapsaný „symbolicky" lze zapsat typičtěji jako

(3) $$y = \Pi x + v$$ **, v němž**

(4A) $\Pi = (I - B)^{-1} C$ **je matice parametrů redukovaného tvaru rozměrů [m;q] .**

(4B) $v = (I - B)^{-1} \varepsilon$ **je vektor náhodných složek reduk. tvaru rozměrů [m;1].**

Poznámka

2. Redukovaný tvar odvozený ze strukturního zapsaného „v pozorováních"

Vyjdeme-li ze strukturního tvaru modelu zapsaného „v pozorováních" jako :

(11) $$Y = Y.B' + X.C' + E$$ **, kde**

$Y_{[T;m]}$ **je matice *T* pozorování *m* b.endogenních proměnných soustavy**

$X_{[T;q]}$ **je matice *T* pozorování *q* predeterminovaných proměnných soustavy**

$B_{[m;m]}$ **je matice koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným**

$C_{[m;q]}$ **je matice koeficientů příslušných predeterminovaným proměnným**

$E_{[T;m]}$ **je matice „pozorování" *m* náhodných složek (*poruch)* soustavy ,**

pak získáme redukovaný tvar převedením běžných endogenních proměnných nalevo a násobením vzniklého vztahu zprava regulární maticí $\left((I-B')^{-1}\right)$:

(12) $$Y_{[T;m]}(I-B')_{[m;m]} = X_{[T;q]}.C'_{[q;m]} + E_{[T;m]}$$

(13) $$Y = X.C'(I-B')^{-1} + E.(I-B')^{-1}$$

Ve světle předchozího značení je matice $C.(I-B')^{-1}$ maticí transponovanou k Π. O významu prvků této matice často **nazývaných multiplikátory** byla řeč již dříve.

****

Redukovaný tvar zápise „s pozorováními" (13) zapíšeme ve vyjádření

(13a) $$Y = X.\Pi' + V'$$

$\Pi' = C'(I-B')^{-1}$ **je matice parametrů redukovaného tvaru rozměrů [q;m] .**

$V' = E'(I-B')^{-1}$ **je matice náhodných složek redukovaného tvaru rozměrů [T;m].**

Přirozenou otázkou, máme-li redukovaný tvar zapsán v pozorováních, je, jak je možno z pozorovaných hodnot obsažených v maticích X,Y pořídit nějaký odhad matice Π ?[1]

Odhad matice koeficientů redukovaného tvaru získáme nejsnáze pomocí

prosté/**obyčejné metody nejmenších čtverců OLS jako**

$$\hat{\Pi}_{[q;m]} = (X'X)^{-1}X'Y$$

[1] Obecně řečeno, je statistický odhad matice Π vždy jednodušší, než odhad strukturních parametrů matic B,C. Intuitivně i proto, že je jich počtem zřetelně méně a dostupná informace obsažená v maticích X,Y je pro oba případy shodná: .

tzn. pomocí OLS-regrese všech *m* běžných endogenních proměnných na všech *q* predeterminovaných proměnných. (Matice X,Y mají shodný význam jako dříve)

Kovarianční matici náhodných složek v redukovaného tvaru označíme Ω. Má tvar

$$\Omega = (I - B)^{-1} \Sigma (I - B)^{-1'}$$, protože platí

$$\Omega = Cov(v) = E(v.v') = (I - B)^{-1}.E(\varepsilon, \varepsilon').(I - B)'^{-1} = (I - B)^{-1} \Sigma (I - B)'^{-1}$$

Jiný možný zápis redukovaného tvaru vychází ze zápisu strukturního tvaru

(zápis přes všech m rovnic pro pevné pozorování t) :

$$(I - B) y_t = C x_t + \varepsilon_t$$ neboli po úpravě

$$y_t = (I - B)^{-1}.C x_t + (I - B)^{-1} \varepsilon_t$$

$$y_t = \Pi x_t + v_t$$, **kde** nyní zapíšeme

$$\Pi_{[m;q]} = (I - B)^{-1}{}_{[m;q]}.C_{[m;q]} \quad v_{t[T;1]} = (I - B)^{-1}{}_{[m;m]} \varepsilon_{t[T;1]}$$

Vektor v_t náhodných složek redukovaného tvaru definovaný (pro pevné *t*) jako

$v_t = (I - B)^{-1}.\varepsilon_t$ **má tyto vlastnosti :**

a) $E(v_t) = 0$, protože $E(v_t) = E[(I - B)^{-1} \varepsilon_t] = (I - B)^{-1} E\varepsilon_t = 0.$

b) $Cov(v_t) = (I - B)^{-1}.\Sigma.(I - B)^{-1'}$ protože

$E[v_t.v_t'] = (I - B)^{-1}.E(\varepsilon_t.\varepsilon_t').(I - B)^{-1'} = (I - B)^{-1} \Sigma (I - B)^{-1'} = \Omega$

c) $E(v_t, v_s) = 0$, protože $E[v_t.v_s'] = E[(I - B)^{-1} \varepsilon_t.\varepsilon_s'(I - B)^{-1'}]$

pro $t \neq s$ $= [(I - B)^{-1} E(\varepsilon_t.\varepsilon_s')(I - B)^{-1'}] = 0$

Parametry matice redukovaného tvaru, kterých je dohromady m.q (včetně případných nulových hodnot parametrů) označíme π_{ij} . Lze je vyjádřit jako

$$\pi_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik}.\beta^{kj}$$, **kde**

β^{kj} **je prvek k-tého řádku a j-tého sloupce matice** $(I - B)^{-1}$

Poznámka 1 Vztah mezi parametry strukturního tvaru (matice ***B,C***) a parametry redukovaného tvaru (matice **Π**) není rovnocenný : Z prvků matic B,C lze jednoznačně určit prvky matice **Π**, protože matice (I-B) je nesingulární. Naproti tomu z prvků matice Π není možné jednoznačně určit prvky *obou* matic ***B,C****) :*

Porovnání počet parametrů strukturního tvaru je celkem **m.(m-1) + m.q**
počet parametrů redukovaného tvaru celkem jen **m.q .**

Ve schématickém vyjádření :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{1m} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{3m} \\ \ldots. & \ldots\ldots & \ldots.. & 0 & \ldots.. \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{2q} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{3q} \\ \ldots. & \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & c_{m4} & c_{mq} \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} & \pi_{31} & \ldots\ldots. & \pi_{5q} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \ldots.. & \pi_{2q} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{32} & \ldots\ldots. & \pi_{3q} \\ \ldots\ldots\ldots. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \pi_{m1} & \pi_{m2} & \pi_{m3} & \ldots\ldots & \pi_{mq} \end{pmatrix}$$

Matice parametrů redukovaného tvaru Π je obecná matice. Zatímco matice B a C budou mít zpravidla větší počet nulových prvků, počet nulových prvků matice Π bude relativně malý.

Příklad: *ilustrující postup výpočtu je maximálně zjednodušen*[2]

Uvažujme jednoduchý třírovnicový makroekonomický model se dvěma rovnicemi chování a jednou identitou ve tvaru

$C_t = c_1 + b_1 Y_t + u_t$ - **lineární spotřební funkce (1)**

$I_t = c_3 + b_2 Y_t + c_2 Y_{t-1} + w_t$ - **lineární investiční funkce (2)**

$Y_t = C_t + I_t + G_t$ - **bilanční identita důchodu (3)**

Význam jednotlivých proměnných :

C_t **.... spotřeba domácností v čase *t***

I_t **.... investice do soukromého sektoru v čase *t***

Y_t **.... národní důchod v čase *t***

jsou 3 *běžné endogenní proměnné (m* = 3)*[3]

$"1"$ **..... jedničkový vektor**

Y_{t-1} **... národní důchod v (předcházejícím) čase *t-1***

G_t **..... veřejné (vládní) výdaje v čase *t***

jsou 3 *predeterminované proměnné (q = 3)*

u_t **...... náhodná složka 1. rovnice**

w_t **...... náhodná složka 2. rovnice**

***jsou 2 náhodné složky* dvou stochastických rovnic**

***Lineární spotřební funkce* (1) vyjadřuje závislost aktuální spotřeby na aktuální úrovni důchodu *(už ne na zpožděných hodnotách důchodu a spotřeby)*.**

Lineární investiční funkce* (2) vyjadřuje závislost aktuálních investic na současné a o jedno období zpožděné hodnotě důchodu. *Zanedbán je možný vliv důchodu zpožděného o více období.

***Bilanční identita důchodu*(3) *propojuje důchod s investicemi, spotřebou a objemem veřejných výdajů* při zanedbání salda zahraničních vztahů(export-import) (obchodních, peněžních) a bilance mimořádných výnosů/ztrát.**

---

[2] Ve spotřební funkci např. chybí zpožděná hodnota spotřeby C_{t-1}, v investiční funkci nevystupuje úroková míra, identita důchodu je „ochuzena„ o čistý export, přírůstek zásob, saldo ztrát atd.

[3] Větší význam pro operace s modelem (při kvantifikaci parametrů) má však nikoliv *celkový počet rovnic* (zde označený *m**), ale *počet stochastických rovnic m* (získaných po vyloučení identity).

Redukovaná forma modelu je takové vyjádření, ve kterém jsou běžné endogenní proměnné popsány jen pomocí predeterminovaných proměnných $"1"$ **,** Y_{t-1} **,** G_t **a náhodných složek** u_t, w_t **. V důsledku přítomnosti identity půjde vždy pouze o 2 běžné endogenní proměnné.**

Postup výpočtu redukované formy modelu

V úvahu přichází výpočet buď prostým dosazováním (postupnou eliminací) nebo maticovými operacemi. Přitom musíme nejprve zvolit, které 2 ze 3 přítomných běžných endogenních proměnných necháme v redukované formě :
3. běžná endogenní proměnná se vyloučí při eliminaci identity.

Zvolme postup s eliminací proměnné I_t It: **substituujeme**

(2) $$I_t = c_3 + b_2.Y_t + c_2 Y_{t-1} + w_t$$

a dosadíme rovnice do (3).

První modelová rovnice zůstane ve tvaru

(1a) $$C_t = c_1 + b_1 Y_t + u_t$$

Druhá modelová rovnice tak přejde na tvar

(2-3) $$-C_t + (1 - b_2).Y_t = c_3 + c_2 Y_{t-1} + G_t + w_t$$

Nyní obě rovnice (1a) a (2-3) přepíšeme do maticového tvaru :

(4) $$(I - B).Y = C.X + I.\varepsilon$$

(4a) $$\begin{bmatrix} 1 & -b_1 \\ -1 & 1-b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

Nyní musíme osamostatnit výraz pro každou z obou zbývajících běžných endogenních proměnných, tj. pro C_t **a** Y_t**: Učiníme to invertováním matice** $(I_m - B)^{-1}$ **a vynásobením matic** C **a** I **na pravé straně maticí** $(I - B)^{-1}$**:**

Protože determinant matice $I_m - B$ **je roven** $|I - B| = 1 - b_1 - b_2$
a inverzní matice k $I_m - B$ **má tvar**

$$(I - B)^{-1} = \frac{1}{|I - B|} \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dostaneme:

$$\begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b_1-b_2}\begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \frac{1}{1-b_1-b_2}\begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

a dále roznásobením

$$\begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b_1-b_2}\left\{\begin{bmatrix} c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3 & b_1 c_2 & b_1 \\ c_1 + c_3 & c_2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}\right\}$$

Odtud vyvodíme následující tvar pro obě rovnice redukovaného tvaru :

(5a)

$$C_t = \frac{1}{1-b_1-b_2}.\{ c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3 + b_1 c_2 Y_{t-1} + b_1 G_t + (1-b_2) u_t + b_1 w_t \}$$

(5b) $$Y_t = \frac{1}{1-b_1-b_2}.\{ c_1 + c_3 + c_2 Y_{t-1} + G_t + u_t + w_t \}$$

Matice parametrů redukovaného tvaru modelu , která má obecný tvar

(6a)
$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{pmatrix}$$

s tímto vyjádřením vztahů mezi parametry strukturního a redukovaného tvaru

(6b)
$$\Pi = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3}{1-b_1-b_2} & \dfrac{b_1 c_2}{1-b_1-b_2} & \dfrac{b_1}{1-b_1-b_2} \\ \dfrac{c_1 + c_3}{1-b_1-b_2} & \dfrac{c_2}{1-b_1-b_2} & \dfrac{1}{1-b_1-b_2} \end{pmatrix}$$

Zde máme celkem 5 parametrů *(omezeného)* **strukturního tvaru** b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 **a celkem 6 nenulových parametrů** *(omezeného)* **redukovaného tvaru** $\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{21}, \pi_{22}, \pi_{23}$.

Všimněme si ještě rozdílu mezi počty parametrů strukturního a redukovaného tvaru, jestliže bereme v úvahu omezení položená na parametry modelu :

Neomezený strukturní tvar **modelu (1), (2-3) má celkem 2.1+2.3 = 8 parametrů**
Neomezený redukovaný tvar **modelu má celkem** jen **2.3 = 6 parametrů**

Omezený strukturní tvar **modelu má celkem** jen **5 parametrů** zatímco
Omezený redukovaný tvar **modelu má celkem 6 parametrů**

Poznámka 2 Zaznamenejme, že inverzi v ($I_m - B$) lze provést jen tehdy, jestliže platí

$$b_1 + b_2 \neq 1$$

Parametr b_1 přitom pochází z rovnice spotřeby, zatímco parametr b_2 z na ní nezávislé rovnice investic. Zmíněné omezení tedy nemá ekonomickou příčinu.

Poznámka 3 Zatímco každé omezení položené na parametry *strukturního tvaru* znamená snížení počtu odhadovaných *parametrů strukturního tvaru* o 1, neplatí zdaleka obdobná relace pro parametry redukovaného tvaru: protože jsou parametry určeny vztahem (6b), jen zřídkakdy nabude parametr *omezeného redukovaného tvaru* hodnotu 0.

V předchozím případě jsme postupovali tak, že jsme se zaměřili na vyloučení běžné endogenní proměnné *investice.* Mohli jsme však také postupovat tak, že bychom pomocí identity vyloučili např. proměnnou *spotřeba* (nebo *důchod).*

Ukážeme, že při odvození redukované formy nezáleží na tom, kterou z běžných endogenních veličin na počátku vylučujeme, jinými slovy, že ta část (ten řádek) redukované formy, která je společná oběma postupům (zde tvar rovnice pro důchod) zůstane beze změn.

$$\Pi = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3}{1 - b_1 - b_2} & \dfrac{b_1 c_2}{1 - b_1 - b_2} & \dfrac{b_1}{1 - b_1 - b_2} \\ \dfrac{c_1 + c_3}{1 - b_1 - b_2} & \dfrac{c_2}{1 - b_1 - b_2} & \dfrac{1}{1 - b_1 - b_2} \end{pmatrix} \tag{6b}$$

Poznámka 4 Poněkud předběhneme, uvedeme-li, že klíčovou záležitostí pro možnost odhadu parametrů modelu je kladná odpověď na otázku, zda lze ze znalosti matice Π získat jednoznačně všechny strukturní parametry. V našem případě to možné je, protože např.

zřejmě $\quad b_1 = \dfrac{\pi_{13}}{\pi_{23}} \qquad c_2 = \dfrac{\pi_{12}}{\pi_{13}} = \dfrac{\pi_{22}}{\pi_{23}}$

dále: z $\; 1 - b_1 - b_2 = \dfrac{b_1}{\pi_{13}} \quad b_2 = 1 - b_1 - \dfrac{b_1}{\pi_{13}} = 1 - \dfrac{\pi_{13}}{\pi_{23}} - \dfrac{\pi_{13}}{\pi_{13}.\pi_{23}} = \dfrac{\pi_{23} - \pi_{13} - 1}{\pi_{23}}$

Protože $1 - b_1 - b_2 = \pi_{23}$, máme dále $c_1 + c_3 = \pi_{23}.\pi_{13}$

$$c_1(1 - b_2) + b_1 c_3 = \pi_{11}.\pi_{23}$$

$$c_1\left(1 - \frac{\pi_{23} - \pi_{13} - 1}{\pi_{23}}\right) + \frac{\pi_{13}}{\pi_{23}}.c_3 = \pi_{11}.\pi_{23} \qquad c_1\left(\frac{\pi_{13} + 1}{\pi_{23}}\right) + \frac{\pi_{13}}{\pi_{23}}.c_3 = \pi_{11}.\pi_{23}$$

Postup 2

Eliminujeme nyní *spotřebu* z identity (3), kde dostaneme $C_t = Y_t - I_t - G_t$

a dosadíme do první rovnice

$Y_t - I_t + G_t = c_1 + b_1 Y_t + u_t$ **, načež ji upravíme do tvaru**

$(1 - b_1) Y_t - I_t = c_1 - G_t + u_t$

Současně ve druhé rovnici převedeme běžné endogenní Y_t, I_t **proměnné nalevo**

$$I_t - b_2 . Y_t = c_3 + c_2 . Y_{t-1} + w_t$$

a vytvoříme maticovou podobu strukturního tvaru s těmito dvěma běžnými endogenními proměnnými:

(7)
$$\begin{bmatrix} 1 & -b_2 \\ -1 & 1-b_1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} I_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} w_t \\ u_t \end{pmatrix}$$

(Nejprve jsme zapsali rovnici pro investice, potom rovnici pro důchod). Dále již postupujeme obvyklým způsobem:

Invertujeme matici $(I_2 - B)$ **a dostaneme (**determinant je opět roven $1 - b_1 - b_2$**)**

$$(I_2 - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-b_1}{1-b_1-b_2} & \dfrac{b_2}{1-b_1-b_2} \\ \dfrac{1}{1-b_1-b_2} & \dfrac{1}{1-b_1-b_2} \end{pmatrix}$$

a po vynásobením matic C **a** I **na pravé straně maticí** $(I - B)^{-1}$ **máme (8)**

$$\begin{pmatrix} I_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_1 & b_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_3 & c_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_1 & b_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

Odtud vyvodíme následující tvar pro obě rovnice redukovaného tvaru :

$$I_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} . \{ c_3 - b_1 c_3 + c_1 b_2 + (c_2 - c_2 b_1) Y_{t-1} + b_2 G_t + (1 - b_1) u_t + b_2 w_t \}$$

$$Y_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} . \{ c_1 + c_3 + c_2 Y_{t-1} + G_t + u_t + w_t \} \qquad \textbf{(9a-b)}$$

Konečně ukážeme, že i třetí postup (s vyloučením důchodu Y_t) vede k získání rovnic redukovaného tvaru pro investice I_t a spotřebu C_t:

Postup 3

Do obou rovnic (1), (2) dosadíme za důchod Y_t z identity (3). Máme soustavu

$$C_t = c_1 + b_1(C_t + I_t + G_t) + u_t \qquad (1^*)$$

$$I_t = c_3 + b_2(C_t + I_t + G_t) + c_2 Y_{t-1} + w_t \qquad (2^*) \quad ,$$

kterou opět přepíšeme do maticové podoby

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} 1-b_1 & -b_1 \\ -b_2 & 1-b_2 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & b_1 \\ c_3 & c_2 & b_2 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

Opět invertujeme matici $(I_2 - B)$ a dostaneme (determinant je i zde roven hodnotě $1-b_1-b_2$)

$$(I_2 - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-b_2}{1-b_1-b_2} & \dfrac{b_1}{1-b_1-b_2} \\ \dfrac{b_2}{1-b_1-b_2} & \dfrac{1-b_1}{1-b_1-b_2} \end{pmatrix}$$, takže dostaneme

$$\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ b_2 & 1-b_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1 & 0 & b_1 \\ c_3 & c_2 & b_2 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \frac{1}{1-b_1-b_2} \begin{bmatrix} 1-b_2 & b_1 \\ b_2 & 1-b_1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \end{pmatrix}$$

Odtud již snadno vyvodíme následující tvar pro obě rovnice redukovaného tvaru :

$$C_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} . \{ c_1 - c_1 b_2 + b_1 c_3 + b_1 c_2 Y_{t-1} + b_1 . G_t + (1-b_2) u_t + b_1 . w_t \}$$

(11a-b)

$$I_t = \frac{1}{1-b_1-b_2} . \{ c_1 b_2 + c_3 - b_1 c_3 + (c_2 - b_1 c_2) Y_{t-1} + b_2 G_t + (1-b_1) u_t + b_2 w_t \}$$

I v tomto případě jsme se tedy dopracovali k tvarům shodným s předchozími výsledky. Srovnej (11a) s (5a) , resp. (11b) s (9a).

Poznámka 4 Povšimněme-si, že omezení na parametry modelu $b_1 + b_2 \neq 1$, podmiňující vyvození redukovaného tvaru modelu, je nezávisle na tom, který ze tří postup jsme pro odvození redukovaného tvaru přijali.