Rekursivní ekonometrický model

jako zvláštní tvar obecné interdependentní soustavy regresních rovnic

Rekursívní model je zvláštní (ne však výjimečná) **forma ekonometrického modelu charakteristická tím, že :**

- **tvar matice $\mathbf{B}$ vztahů propojujících běžné endogenní proměnné odpovídá situaci, kdy vhodné seřazení modelových rovnic umožní zápis modelu ve tvaru, v němž běžná endogenní proměnná přítomná jako vysvětlující v uvažované rovnici může být vysvětlována pouze v některé z rovnic, které ji předchází**

a současně kdy

- **v matici Σ se nepřipouští korelace náhodných složek v různých rovnicích modelu** (ani v témže čase).

Formálně vyjádřeno, v (ryze) **rekursívním modelu platí restrikce:**

a) matice $\mathbf{B}$ koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným je dolní (resp. horní) **trojúhelníková, tj . platí pro ni $\beta_{jk} = 0$ pro $j < k$**

b) matice Σ kovarianční matice náhodných složek soustavy, pro niž platí $\mathrm{Cov}(u_t, u_s) = \delta_{ts}$. Σ je diagonální. Připouští se tedy "heteroskedasticita", nikoliv "korelovanost" náhodných složek (v témže čase) v různých rovnicích .

Obě podmínky *a), b)* souhrnně vyjadřuje schéma :

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \dots & \beta_{mm} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}$$

kde β_{jk} **je regresní koeficient mezi j-tou a k-tou běžnou endogenní proměnnou** (s vhodným normováním $\mathbf{b}_{jj} = 0$ nebo -1 podle zápisu strukturního tvaru) **,**

σ_{jk} **je rozptyl náhodné složky j-té rovnice.** (j, k = 1,2,..., m)

Poznámka 1 **Některé z prvků $\mathbf{b}_{jj}$ mohou být rovněž nulové** (není podmínkou, aby se v j-té rovnici nutně vyskytovaly všechny vysvětlující běžné endogenní proměnné z předchozích rovnic)

Poznámka 2 **Obě podmínky *a), b)* nemají stejnou povahu: *podmínka a)* je dána specifikací** (běžných endogenních) **proměnných v modelových rovnicích** (a skutečnost, zda je v souladu s realitou, není testovatelná na základě dat statistického vzorku), **zatímco *podmínka b)* může být konfrontací se statistickými daty prověřena vcelku snadno pomocí vhodného odhadu matice Σ** (např. na základě *2SLS*-reziduí)**.**

Vlastnost dolní triangularity matice $\mathbf{B}$, implikující tutéž vlastnost u matice $\mathbf{I} - \mathbf{B}$, znamená, že v první rovnici modelu (po seřazení) **se kromě vysvětlované běžné endogenní proměnné vyskytují již jen predeterminované proměnné. Ve druhé** (pro $\mathbf{y}_2$) **rovnici se může na pravé straně jako vysvětlující kromě kterýchkoliv predeterminovaných proměnných vyskytovat již jen běžná endogenní proměnná $\mathbf{y}_1$ vysvětlovaná v prvé rovnici, ve třetí rovnici** (pro $\mathbf{y}_3$) **mohou být jako vysvětlující z běžných endogenních zastoupeny jen proměnné $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ atd.**

Lze ukázat, že v (ryze) **rekursívním modelu** (s vlastnostmi ***a) , b)***) **jsou běžné endogenní proměnné vystupující jako vysvětlující v r-té rovnici tzn.** $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{\mathbf{r}-1}$ **z předchozích rovnic nekorelované s náhodnou složkou r-té rovnice** $\varepsilon_{\mathbf{r}}$**. Ze statistického hlediska mají pak tyto proměnné v r-té rovnici povahu v podstatě proměnných predeterminovaných.**

Ne každý ekonometrický model lze přečíslováním rovnic převést na model rekursívního typu, protože v řadě případů v ekonomické realitě se projevující zpětné vazby mezi endogenními proměnnými neumožňují vyjádřit matici B v požadované formě (nemluvě o restrikci z podmínky ***b)***) **. Častěji se lze setkat s volnějším projevem této vlastnosti, kterou je tzv. bloková rekursivita.**

Blokově rekursívní ekonometrický model

Blokově rekursívní model je rovněž zvláštní (přitom ale nijak výjimečná) **forma ekonometrického modelu, která je charakteristická tím, že model může být přeskupením rovnic převeden do tvaru, v němž**

- **matice B vztahů propojujících běžné endogenní proměnné má strukturu, že všechny rovnice modelu lze** (po případném přeskupení) **zapsat ve tvaru, v němž žádná běžná vysvětlující běžná endogenní proměnná jednoho bloku není vysvětlována rovnicemi, která jsou obsahem následujícího bloku a**

současně kdy

- **v matici Σ se nepřipouští autokorelace náhodných složek v rovnicích různých bloků tohoto modelu** (v témže čase).

Formálně vyjádřeno, platí podmínky:

c) matice B koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným je horní resp. dolní blokově trojúhelníková

d) matice Σ kovarianční matice náhodných složek soustavy, pro niž platí $\mathbf{Cov}(\varepsilon_{\mathbf{t}}, \varepsilon_{\mathbf{s}}) = \delta_{\mathbf{ts}} \cdot \Sigma$ **je blokově diagonální, tzn. na její diagonále jsou bloky** (obecných symetrických, pozitivně definitních) **matic Σ**

Obě podmínky *c), d)* vyjadřuje schéma :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{r1} & B_{r2} & B_{r3} & \ldots & B_{rr} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Sigma_{rr} \end{pmatrix}$$

Každá z *r* čtvercových matic $\mathbf{B}_{\mathbf{kk}}$ **ležících na "diagonále" matice B je regulární matice rozměrů** $\mathbf{s}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{s}_{\mathbf{k}}$ **s příslušně normovanými diagonálními prvky. Na ostatní matice** $\mathbf{B}_{\mathbf{jk}}$ **rozměrů** $\mathbf{s}_{\mathbf{j}} \times \mathbf{s}_{\mathbf{k}}$ **nejsou kladeny žádné podmínky.**

Každá z *r* čtvercových symetrických matic $\Sigma_{\mathbf{kk}}$ **ležících na "diagonále"** (pozitivně definitní, symetrické) **kovarianční matice Σ má rozměry rovněž** $\mathbf{s}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{s}_{\mathbf{k}}$**, tyto matice však nemusí být diagonální. Členění matic B a Σ na bloky si přirozeně musí odpovídat.**

Znamená to tedy, že v rámci kteréhokoliv j-tého bloku (k = 1,2,..., r) **mohou být vztahy mezi proměnnými modelu "zcela libovolné"** (chápáno ve smyslu podmínek "interdependentního submodelu"), **zatímco vztahy modelových proměnných mezi různými bloky se řídí pravidly rekursívního modelu.**

V případě blokové rekursivity (s vlastnostmi ***c) , d)***) **se běžné endogenní proměnné r-tého bloku chovají jako běžné endogenní proměnné r-té rovnice v případě ryzí rekursivity. Dá se ukázat, že proměnné** $y_1, y_2, \ldots, y_{s_1+s_2+\ldots+s_{k-1}}$ **jsou nekorelované s náhodnými složkami** *k*-**té podsoustavy** (bloku) **rovnic. To lze interpretovat tak, že v k-té podsoustavě může být na vysvětlující běžné endogenní proměnné obsažené v předchozích k-1 blocích nahlíženo jako na proměnné ze statistického hlediska víceméně "predeterminované".**

Dopad ryzí resp. blokové rekursivity na odhadové metody

A) v případě rekursívního modelu*:* V rekursívním modelu lze konzistentní odhady parametrů pořídit prostou metodou nejmenších čtverců OLS, pokud rovnice odhadujeme v pořadí "s hierarchicky narůstajícím počtem běžných endogenních proměnných", tzn. výpočet zahájíme s rovnicí neobsahující žádnou běžnou endogenní proměnnou jako vysvětlující, poté kvantifikujeme rovnici s jednou vysvětlující běžnou endogenní proměnnou atd.
Přínos odhadových metod *2SLS*, *ILS* a *IV* se neuplatní, metody *3SLS* a *FIML* však poskytnou konzistentní a asymptoticky vydatnější odhad než *OLS*.

B) v případě blokově rekursívního modelu*:* V modelu tohoto typu nelze sice prostou metodou nejmenších čtverců OLS získat konzistentní odhady parametrů, avšak v případě nasazení metod vhodných pro odhad simultánních soustav regresních rovnic (2SLS, IV, 3SLS, LIML apod.) **není třeba *současně* odhadovat parametry všech rovnic, nýbrž s každým blokem lze zacházet jako s "parciálním" menším interdependentním modelem, v rámci něhož lze kvantifikaci kteroukoliv z těchto metod provést samostatně. Může se zde navíc projevit příznivý dopad této modelové struktury v tom, že** (zvláště u modelů s několika desítkami rovnic) **lze odhad provést "kvalitněji" s ohledem na menší pravděpodobnost výskytu multikolinearity, nižší míry autokorelace, uchování podstatně většího počtu stupňů volnosti** (a tedy spolehlivějších výsledků testovacích postupů) **ve srovnání s kvantifikací celého modelu, která by byla např. pro případ** $\mathbf{T < q}$ **klasickými postupy nerealizovatelná.**

Identifikace v rekursívním ekonometrickém modelu

A) V obecném interdependentním modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů (uvažujeme situaci, do které nevkládáme restrikce vyplývající z omezení položených na strukturní parametry) :

- počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků (obecné) matice $\mathbf{B}$ **(s normovanou diagonálou) tj.** $\mathbf{m.(m-1)}$

- počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (obecné) **matice** $\mathbf{C = m.q}$

- počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek strukturního tvaru = počet prvků (symetrické) **pozitivně definitní matice** $\sum = \mathbf{(m+1) * m / 2}$.

Neomezený strukturní tvar $\mathbf{m.[m + q + (m+1)/2]}$ neznámých parametrů.

B) **Naproti tomu redukovaný tvar modelu obsahuje tyto počty parametrů :**

- počet parametrů redukovaného tvaru = počet prvků (obecné) matice Π tj. $m.q$

- počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (symetrické) **pozitivně definitní matice** $\Omega = (m+1)*m/2$

Neomezený redukovaný tvar $m.[q+(m+1)/2]$ neznámých parametrů.

Informace obsažené v parametrech neomezeného redukovaného tvaru je tedy méně (o $(m-1)$ parametrů) **než v parametrech neomezeného strukturního tvaru** (vždy platí, že $m>1$ u vícerovnicového modelu).

Poznámka **Odtud je mj. vidět, že omezení vkládaná na parametry strukturního tvaru mohou tuto disproporci snížit, popř. ji úplně odstranit. Tím dosáhneme identifikovanosti modelu nebo** (aspoň) **identifikovanosti některé strukturní rovnice.**

C) V rekursívním ekonometrickém modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů :

- počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků matice B (s nulovými prvky v horním/dolním trojúhelníku a s normovanou diagonálou) **tj.** $m.(m-1)/2$

- počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (obecné) matice $C = m.q$

- počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní diagonální matice $\sum = m$.

Dohromady má tedy strukturní tvar rekursívního modelu tvar $m.[q+(m+1)/2]$ neznámých parametrů, **tedy tolik, kolik je parametrů redukovaného tvaru.**
Počet parametrů redukovaného tvaru (i při respektování restrikcí přenesených z omezení na parametry strukturního tvaru) **je nezměněný, tj. je roven počtu**

$$m.[q+(m+1)/2]$$

Poznámka **Počet parametrů** (neomezeného) **redukovaného tvaru je tedy u modelu rekursívního typu roven počtu parametrů** (neomezeného) **strukturního tvaru.**

Celkem tedy je předmětem odhadu $m.(m-1)+mq+m = m(m/2+q+1/2)$ **strukturních parametrů rekursívního modelu. Tento počet je přesně shodný s počtem parametrů redukovaného tvaru modelu. Nejsou-li tedy mezi parametry modelu zavedena další omezení, lze zpětně každý parametr strukturního tvaru určit jednoznačně z** (odhadnutých) **parametrů redukovaného tvaru.**