

Nepřímá metoda nejmenších čtverců
ILS (Indirect Least Squares method)
v soustavě simultánních regresních rovnic

Nepřímá metoda nejmenších čtverců je další z okruhu metod, které poskytují (stejně jako 2SLS nebo IV) vždy (přinejmenším) konzistentní odhady strukturních parametrů regresních rovnic v interdependentních ekonometrických modelech.

Metoda se od obou předchozích liší tím, že se k odhadu strukturních parametrů nepřistupuje přímo, ale přes parametry redukované formy modelu. V jejím algoritmu se místo transformací pozorovaných proměnných uplatňují transformace strukturních parametrů.

Smyslem těchto transformací je převedení strukturních parametrů na zpravidla početněji množinu parametrů redukovaného tvaru (ty jsou jednodušejí a vždy odhadnutelné) a následně (lze-li to ovšem provést) zpětné určení strukturních parametrů pomocí parametrů redukovaného tvaru.

Hlavní nesnázi při tomto postupu je obecná neproveditelnost zpětného převodu (tzn. z odhadnutých parametrů redukovaného tvaru nelze vždy získat parametry tvaru strukturního) – příčinou nesnáze je tzv. **identifikační problém**.

Formální popis metody pro i -tou strukturní rovnici :

V rovnici zapsané jako

$$y_i = Y_i\beta_i + X_i\gamma_i + \varepsilon_i$$

vyjádříme nejprve redukovanou formu Π (celého modelu) jako

$$Y = X\Pi + V$$

kde $\Pi = C(I - B)^{-1}$ a $V = E(I - B)^{-1}$

Všimněme si blíže vztahu mezi parametry strukturního a redukovaného tvaru :

- **počet parametrů strukturního tvaru** je dán počtem prvků v maticích B, C , kterých je dohromady $m \cdot (m - 1) + m \cdot q$ (neuvažujeme-li jiná omezení než normovací pravidlo $\beta_{ii} = 0$ v matici B). Zpravidla však je počet (nenulových parametrů) strukturního tvaru (tzn. s respektováním omezení kladených na některé z nich) výrazně menší, neboť v obou maticích B, C je přítomno mnoho nulových prvků v důsledku nepřítomnosti mnoha modelových proměnných v jednotlivých rovnicích (nerovnosti $q_i < q, m_i < m$ platí u rozsáhlejších modelů u většiny rovnic). Vkládaná omezení jsou nutná i jako "prevence" proti výskytu problémů spojených s identifikací rovnic.

- **počet parametrů redukovaného tvaru** je dán rozměry (obecné) matice Π , tedy $q \cdot m$. Na rozdíl od strukturního tvaru je počet parametrů omezeného redukovaného tvaru (kdy bereme v úvahu omezení kladená na strukturní parametry) zpravidla jen o málo menší než $q \cdot m$.

Parametry redukovaného tvaru obsažené v matici Π jsou vždy odhadnutelné (obyčejnou metodou nejmenších čtverců OLS). Odhadnutá matice Π je zřejmě

$$1) \quad \hat{\Pi}_{[q,m]} = (X'X)^{-1}_{[q,q]} \cdot X'Y_{[q,m]}$$

Důležitější otázkou je, zda a za jakých podmínek lze zpětně z odhadu Π odvodit původní parametry (obsažené v maticích B, C), tzn. parametry námi uvažované i -té rovnice β_i, γ_i .

Pro detailní analýzu uvažujme např. vztahy mezi parametry 1. regresní rovnice (uvažování 1. rovnice není újmou na obecnosti, pouze přispěje k přehlednému zápisu).

Zapišme nyní ze vztahu $\Pi \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \mathbf{C}$ jen ty prvky, které se bezprostředně vztahují ke strukturálním parametrům první rovnice. Dostaneme :

$$2) \quad \Pi_{[q,m]} \cdot \begin{pmatrix} 1_{[1,1]} \\ -\beta_{.1[m_1,1]} \\ 0_{[m-m_1-1,1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{.1[q_1,1]} \\ 0_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix}$$

(U vektorů a matic jsou uvedeny pro větší názornost dimenze.)

K získání explicitnějších vztahů mezi uvažovanými parametry je třeba navíc rozdělit matici parametrů redukovaného tvaru Π tak, aby bylo patrné, které její submatice se vztahují k veličinám vystupujícím v 1. regresní rovnici ¹:

$$\Pi_{[q,m]} = \begin{pmatrix} \pi_{[q_1,1]} & \Pi_{[q_1,m_1]} & \Pi_{[q_1,m-m_1-1]} \\ \pi_{[q-q_1,1]} & \Pi_{[q-q_1,m_1]} & \Pi_{[q-q_1,m-m_1-1]} \end{pmatrix}$$

pro subvektory jsme použili značení $\pi_{[.,1]}$, pro submatice $\Pi_{[.,.]}$. Vztahy, které se přímo vztahují k parametrům první regresní rovnice, lze zapsat takto :

$$3A) \quad \Pi_{[q_1,m_1]} \cdot \beta_{.1[m_1,1]} + \gamma_{.1[q_1,1]} = \pi_{[q_1,1]}$$

$$3B) \quad \Pi_{[q-q_1,m_1]} \cdot \beta_{.1[m_1,1]} = \pi_{[q-q_1,1]}$$

První "řádek" 3A) představuje soustavu m_1 rovnic o $m_1 + q_1$ neznámých $\beta_{.1}, \gamma_{.1}$, druhý "řádek" 3B) vyjadřuje soustavu $q - q_1$ rovnic o m_1 neznámých $\beta_{.1}$ ². Celá soustava q rovnic je jednoznačně řešitelná právě tehdy, jestliže existuje jednoznačné řešení části 3B) pro strukturální parametry $\beta_{.1}$. (Část 3A) má charakter rekursivní podsoustavy, která je vždy řešitelná).

Existence řešení podsoustavy 3B) – které nemusí být nutně jediné - je klíčově závislé na tom, v jakém poměru jsou rozměry matice $\Pi_{[q-q_1,m_1]}$ (nejsou-li jinak řádky nebo sloupce této matice lineárně závislé). V úvahu přicházejí **tři možnosti**:

(A) bude-li platit $q - q_1 < m_1$
bude mít podsoustava 3B) sice nekonečně mnoho algebraických řešení, ale nebude možno vyvodit žádné řešení statistického problému odhadu parametrů $\beta_{.1}$ (a následně ani $\gamma_{.1}$), protože nebude možné vyjádřit zbývající odhadované parametry jen pomocí známých veličin (prvků $\Pi_{[q-q_1,m_1]}, \pi_{[q-q_1,1]}$). Zůstane totiž neurčených "přebytečných" m_1 parametrů $\delta_{q_1+1} \dots \delta_{q_1+m_1}$.

Odhady parametrů (první) strukturální rovnice není možné tedy statistickým způsobem nijak získat. Jde o **případ podidentifikovanosti (první) regresní rovnice**.

¹ Jak je patrné, dvě submatice, jmenovitě $\Pi_{[q_1,m-m_1-1]}$ a $\Pi_{[q-q_1,m-m_1-1]}$ se nijak nepodílejí na vztazích mezi parametry 1. strukturální rovnice. (Mají však přirozeně vliv na vztahy mezi strukturálními parametry ostatních rovnic).

² v předchozím i v dalším textu znamená vždy :

q_1 počet vysvětlujících predeterminovaných proměnných i-té rovnice (včetně vektoru "1")
 m_1 počet vysvětlujících běž. endogenních proměnných i-té rovnice (pokud je v jiné literatuře uváděn pod m_1 počet všech běžných endogenních proměnných i-té rovnice, je nutno podmínky identifikace formulovat jako $q + 1 = m_1 + q_1$).

(B) bude-li platit $q - q_1 = m_1$

je vidět, že soustava **3B)** bude mít právě jediné řešení za předpokladu, že submatice odhadů koeficientů redukovaného tvaru $\Pi_{[q-q_1, m_1]}$ je regulární, což nastane tehdy, bude-li navíc splněna hodnostní podmínka

$$4) \quad h(\Pi_{[q-q_1, m_1]}) = m_1$$

Pokud hodnostní podmínka splněna nabude, nastane obdobný problém jako v situaci **(A)**. Pokud tedy současně s **(B)** nastane **4)**, lze odhady parametrů získat jednoznačně jako

$$5) \quad \hat{\beta}_{\cdot 1[m_1, 1]} = (\hat{\Pi}_{[q-q_1, m_1]})^{-1} \cdot \hat{\mathcal{X}}_{[q-q_1, 1]} \\ \hat{\gamma}_{\cdot 1[q_1, 1]} = \hat{\mathcal{X}}_{[q_1, 1]} - \hat{\Pi}_{[q_1, m_1]} (\hat{\Pi}_{[q-q_1, m_1]})^{-1} \cdot \hat{\mathcal{X}}_{[q-q_1, 1]}$$

Tato situace odpovídá **případu přesné identifikovanosti (první) regresní rovnice**.

(C) bude-li platit $q - q_1 > m_1$

submatice $\Pi_{[q-q_1, m_1]}$ je nyní singulární. K tomu, aby existovalo nějaké řešení statistického problému odhadu, je nutné, aby zůstala v platnosti podmínka **3)**. Jinak by nastal stejný problém jako v situaci **(B)**: při hodnotě $m_1 - 1$ by existovala regulární submatice $\Pi_{[q-q_1, m_1]}$ řádu i hodnotě $m_1 - 1$, z které bychom mohli odvodit nanejvýš $m_1 - 1$ parametrů (avšak v závislosti na 1 neurčitelném (přebytečném) parametru). Statisticky bychom tedy (všechny) parametry odvodit nemohli.

Pokud zůstane v platnosti podmínka **(C)**, je však patrné, že odhadované strukturní parametry $\beta_{\cdot 1}$ nebudou vyhovovat všem rovnicím soustavy **3B)** – rovnic je jen $q - q_1$. Zatímco v algebraickém smyslu nebude soustava řešitelná (počet neznámých parametrů $\beta_{\cdot 1}$ je menší než počet rovnic), lze se při řešení statistického problému omezit pouze na (libovolných) m_1 těchto

rovnic (jsou-li lineárně nezávislé). Dostaneme tak až $\begin{pmatrix} q - q_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ různých statistických řešení,

tedy různých odhadů, které se uplatní ve druhém kroku - řešení podsoustavy **3A)**.

Tento poslední **případ odpovídá přeidentifikovanosti (první) regresní rovnice**, kdy lze odhady strukturních parametrů nalézt, ale ty nejsou určeny jednoznačně.

Formální odvození ILS-odhadové funkce

Abychom získali tvar *ILS-odhadové funkce*, musíme vyjít z (úplné) odhadnuté matice parametrů redukováného tvaru 1)

$$\hat{\Pi}_{[q,m]} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}_{[q,q]} \cdot \mathbf{X}'\mathbf{Y}_{[q,m]}$$

Podotkněme, že pouze prvních $m_1 + 1$ sloupců matice $\hat{\Pi}$ vyjadřuje vztahy mezi parametry první strukturní rovnice. Je to nejlépe vidět z rozpisu (odhadnutých) prvků této matice, které získáme jako³

$$6) \quad \hat{\Pi}_{[q,m]} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \mathbf{y}_{1[q_1,1]} & \mathbf{X}_1' \mathbf{Y}_{1[q_1,m_1]} & \mathbf{X}_1' \mathbf{Y}^{(1)}_{1[q_1,m-m_1-1]} \\ \mathbf{X}^{(1)'} \mathbf{y}_{1[q-q_1,1]} & \mathbf{X}^{(1)'} \mathbf{Y}_{1[q-q_1,m_1]} & \mathbf{X}^{(1)'} \mathbf{Y}^{(1)}_{1[q-q_1,m-m_1-1]} \end{pmatrix}$$

neboli - sloučíme-li v zápisu 6) horních q_1 a dolních $q - q_1$ řádků jedním vyjádřením⁴ -

$$\hat{\Pi}_{[q,m]} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{y}_{1[q,1]} \quad \mathbf{X}' \mathbf{Y}_{1[q,m_1]} \quad \mathbf{X}' \mathbf{Y}^{(1)}_{1[q,m-m_1-1]})$$

Soustavy 3A), 3B) lze zapsat (při takovém vyjádření, kde parametry redukováného tvaru, resp. jejich odhady považujeme za známé) **ve tvaru**

$$7) \quad \begin{pmatrix} \hat{\Pi}_{[q_1,m_1]} & I_{[q_1,q_1]} \\ \hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1[m_1,1]} \\ \hat{\gamma}_{1[q_1,1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix}$$

Přítom matici levé strany 7) lze zapsat (v pozorovaných v proměnných) jako⁵

$$\begin{pmatrix} \hat{\Pi}_{[q_1,m_1]} & I_{[q_1,q_1]} \\ \hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} = \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}_1; \begin{pmatrix} I_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} [\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1; \mathbf{X}'\mathbf{X}_1]$$

Všimněme si zde, že skutečně platí

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{X}_1 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} I_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix}$$

pokud je q_1 predeterminovaných proměnných tvořících (po sloupcích) matici \mathbf{X}_1 posazeno právě v prvních q_1 sloupcích matice \mathbf{X} .

Vektor na pravé straně 7) lze podobně zapsat (v pozorovaných proměnných) jako

$$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}_1$$

Pokud obě strany 7) zapíšeme s vyjádřením vektoru parametrů $\delta_{.1}$, dostaneme

$$8) \quad (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} [\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1, \mathbf{X}'\mathbf{X}_1] \delta_{.1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}_1$$

³ Veličiny $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{Y}^{(1)}$ vyjadřují pozorování těch proměnných, které nejsou obsaženy v první regresní rovnici (u $\mathbf{X}^{(1)}$ jde o predeterminované proměnné nepřítomné v \mathbf{X}_1 , u $\mathbf{Y}^{(1)}$ jde o běžné endogenní proměnné nepřítomné v \mathbf{Y}_1).

⁴ Uváděné dimenze se zde vztahují vždy k součinům matic v závorce.

S ohledem na to, že momentová matice $X'X$ je regulární, lze vztah 8) zjednodušit na

$$9) \quad [X'Y_1, X'X_1]\delta_1 = X'y_1$$

Odtud je zřejmé, že odhad parametrů nepřímou metodou nejmenších čtverců bude založen na řešení rovnice tvaru

$$10) \quad [X'W_1]\hat{\delta}_1 = X'y_1 \quad \text{čili} \quad [X'(Y_1, X_1)]\hat{\delta}_1 = X'y_1$$

kde $W_1 = (Y_1, X_1)$. (zapsáno v dimenzích: $[X'_{[q,T]} W_{1[T,m_1+q_1]}\hat{\delta}_{1[m_1+q_1,1]} = X'_{[q,T]} y_{1[T,1]}$)

Je ale také zřejmé, že s ohledem na výše řečené není zajištěno, že matice $X'W_1$ bude čtvercová, regulární a že tedy bude existovat matice k ní inverzní. Pokud tomu tak bude (k čemuž je nutné, aby platilo $m_1 + q_1 = q$), pak lze odhad psát jako

$$11) \quad {}_{ILS}\hat{\delta}_1 = [X'(Y_1; X_1)]^{-1} \cdot X'y_1$$

Pokud bude platit $m_1 + q_1 < q$, pak bude vyjádření odhadnutých parametry neurčitější

$$12) \quad {}_{ILS}\hat{\delta}_1 = [X'(Y_1; X_1)]^{-} \cdot X'y_1$$

kde symbol „-“ znamená **označení pseudoinverzní matice**. Jak známo, pseudoinverzní matice není určena jednoznačně a tedy také odhad parametrů nebude jednoznačný.

Vlastnosti ILS-odhadové funkce

Lze ukázat, že ILS-estimátor strukturních parametrů modelu má tyto vlastnosti (v obecném zápise pro i-tou rovnici soustavy)

A) Odhady parametrů β_i, γ_i jsou konzistentní, neboť platí

$$\begin{aligned} \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{\delta}_i - \delta_i &= \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} [(\mathbf{X}'\mathbf{W}_i)^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{W}_i\delta_i + \varepsilon_i)] - \delta_i = \\ &= \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{X}'\mathbf{W}_i)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}_i\delta_i + \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} (\mathbf{X}'\mathbf{W}_i)^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon_i - \delta_i = \\ &= \delta_i + \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{X}'(\mathbf{Y}_i; \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{X}'\varepsilon_i - \delta_i = \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{X}'(\mathbf{Y}_i; \mathbf{X}_i)^{-1} \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{X}'\varepsilon_i = 0 \end{aligned}$$

B) Odhady parametrů β_i, γ_i nejsou nestranné, protože

$$\mathbf{E}_{ILS} \hat{\delta}_i = \mathbf{E}[(\mathbf{X}'(\mathbf{Y}_i; \mathbf{X}_i))^{-1} \cdot \mathbf{X}' \mathbf{y}_i] \neq \mathbf{E}[(\mathbf{X}'(\mathbf{Y}_i; \mathbf{X}_i))^{-1} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{X}' \mathbf{y}_i)] = \delta_i$$

vzhledem k možné korelovanosti proměnných v \mathbf{Y}_i a \mathbf{y}_i (přes ε_i).

C) Odhady parametrů β_i, γ_i nejsou vydatné

(a to ani v rámci metod s omezenou informací).

D) Odhady parametrů β_i, γ_i jsou (za stejných předpokladů (e), (f), (g), (h) jako u 2SLS) asymptoticky normální, tedy platí

$$\sqrt{T} \cdot ({}_{ILS} \hat{\delta}_i - \delta_i) \approx \mathbf{N}(0, \sigma_{ii} \cdot \mathbf{plim}_{T \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\mathbf{X}'_i \mathbf{W}_i}{T} \right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{X}'_i \mathbf{X}_i}{T} \right) \left(\frac{\mathbf{W}'_i \mathbf{X}_i}{T} \right)^{-1} \right])$$

Konzistentní odhad kovariancí ${}_{ILS} \sigma_{ij}$ pro jednotlivé rovnice získáme standardně:

$${}_{ILS} \hat{\sigma}_{ij} = \frac{{}_{ILS} \mathbf{e}_i' {}_{ILS} \mathbf{e}_j}{T} = \frac{\sum_{t=1}^T \mathbf{e}_{ti} \mathbf{e}_{tj}}{T}$$

kde za rezidua $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ vezmeme odhady náhodných složek $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ získané metodou ILS.

Ukážeme dále, že odhadová funkce ILS je speciálním případem IV-odhadové funkce pro volbu matice instrumentálních proměnných $\mathbf{P} = \mathbf{X}$ (neboli jinak $\mathbf{A} = \mathbf{I}$)

Ověření (v zápise pro první strukturní rovnici)

Již víme, že soustavy 3A), 3B) lze zapsat jako:

$$7) \quad \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Pi}}_{[q_1, m_1]} & \mathbf{I}_{[q_1, q_1]} \\ \hat{\mathbf{\Pi}}_{[q-q_1, m_1]} & \mathbf{0}_{[q-q_1, q_1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\beta}}_{[m_1, 1]} \\ \hat{\mathbf{\gamma}}_{[q_1, 1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1, 1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1, 1]} \end{pmatrix}$$

Při vyjádření levé strany 7) jako

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{\Pi}}_{[q_1, m_1]} & \mathbf{I}_{[q_1, q_1]} \\ \hat{\mathbf{\Pi}}_{[q-q_1, m_1]} & \mathbf{0}_{[q-q_1, q_1]} \end{pmatrix} = \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}_1; \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{[q_1, q_1]} \\ \mathbf{0}_{[q-q_1, q_1]} \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} [\mathbf{X}'\mathbf{Y}_1; \mathbf{X}'\mathbf{X}_1]$$

a pravé strany 7) pomocí výrazu
$$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_i,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_i,1]} \end{pmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_{.1}$$

je ILS- odhadová funkce dána vztahy

$$11) \quad {}_{ILS}\hat{\delta}_{.1} = [\mathbf{X}'(\mathbf{Y}_1; \mathbf{X}_1)]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_{.1}$$

pokud je první rovnice přesně identifikovaná, resp.

$$12) \quad {}_{ILS}\hat{\delta}_{.1} = [\mathbf{X}'(\mathbf{Y}_1; \mathbf{X}_1)]^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y}_{.1},$$

pokud je první rovnice přeidentifikovaná.

IV- odhadová funkce (téže rovnice) je naproti tomu určena jako

$$13) \quad {}_{IV}\hat{\delta}_{.1} = (\mathbf{P}'\mathbf{W}_1)^{-1}\mathbf{P}'\mathbf{y}_{.1}$$

kde $\mathbf{P} = \mathbf{X}'\mathbf{A}$

Odtud je patrné, že volbou $\mathbf{P} = \mathbf{X}$ (rovnocenně definováním matice instrumentů $\mathbf{A} = \mathbf{I}_q$) dostaneme

${}_{IV}\hat{\delta}_{.1} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}_1)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_{.1}$, čili výraz 11), pokud $m_1 + q_1 = q$ případně ${}_{IV}\hat{\delta}_{.1} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}_1)^{-}\mathbf{X}'\mathbf{y}_{.1}$ čili výraz 12), pokud $m_1 + q_1 < q$.

V těchto případech tedy můžeme psát ${}_{IV}\hat{\delta}_{.1} = (\mathbf{P}'\mathbf{W}_1)^{-1}\mathbf{P}'\mathbf{y}_{.1} = {}_{ILS}\hat{\delta}_{.1}$

Znamená to tedy, že:

1) ILS-odhadová funkce je speciálním případem IV-odhadové funkce při volbě matice instrumentů jako $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

2) ILS-odhadová funkce není na rozdíl od jiných estimátorů určena jednoznačně a její existence resp. počet získaných řešení závisí na řešitelnosti soustavy 3B).

Poznámka Jestliže je i -tá rovnice přesně identifikovaná, tzn. platí-li $q - q_i = m_i$, potom je matice \mathbf{A}_i definující v 13) instrumentální proměnné jako prostý výběr z predeterminovaných proměnných jednotková řádu $q = m_i + q_i$, tj. $\mathbf{A}_i = \mathbf{I}_q$.

K odhadu uplatníme tedy všech q predeterminovaných proměnných.>

Jestliže je i -tá rovnice přeidentifikovaná, tzn. platí-li $q - q_i > m_i$, potom je matice \mathbf{A}_i definující v 13) instrumentální proměnné jako prostý výběr z predeterminovaných proměnných tvaru

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{[m_i+q_i]} \\ \mathbf{0}_{[q, m_i+q_i]} \end{pmatrix} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{J}$$

Uplatníme tedy jen $m_i + q_i$ predeterminovaných proměnných ze všech q , ostatní ignorujeme. Volba není jednoznačná, někdy máme vodítka, které tyto proměnné vezít.

Vztah mezi nepřímou metodou nejmenších čtverců (jako užší třídou) a metodou instrumentálních proměnných (jako obecnější třídou) lze charakterizovat asi tak, že v ILS se omezujeme jen na instrumentální proměnné představované prostým výběrem z predeterminovaných proměnných. Výběr těchto proměnných musí být dostatečný (počtem aspoň $m_i + q_i$), přičemž pokud je příslušná rovnice přeidentifikovaná, musíme se rozhodnout pro vzetí určitých $m_i + q_i$ predeterminovaných proměnných ze všech q disponibilních.