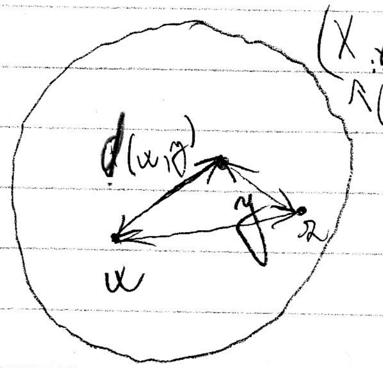
DIFERENCIÁLNÍ POČET FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Úvodní definice a pojmy

(X, d)

(množina X ; funkce metrika)



Def.: Metrický prostor

$X \neq \emptyset$, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ se nazývá metrika na X, jestliže splňuje axiomy:

(1) $d(x,y) = d(y,x)$ ... vzdálenost
(2) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
(3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(4) $d(x,y) \geq 0$

Pak dvojice (X, d) se nazývá metrický prostor.

V: Je-li $(X, \|\cdot\|)$ NL-prostor, pak norma $\|\cdot\|$ indukuje na X metriku d vztahem: $d(x,y) = \|x-y\|$ a X je (také) metrickým prostorem

pozn.: norma $\|\cdot\|$
(1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
(2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
(3) $\|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Důkaz metriky: (1) $d(x,y) = \|x-y\| = \|\underbrace{(-1)}_{\alpha}(y-x)\| = \underbrace{|-1|}_{1} \cdot \|y-x\| =$
$= d(y,x)$

(2) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le \|x-y\| + \|y-z\| =$
$= d(x,y) + d(y,z)$.

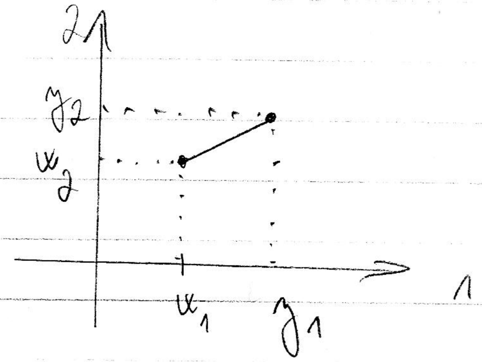
(4) $d(x,y) = \|x-y\| \ge 0$

(3) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Def.: n-rozměrný euklidovský prostor

Označme $E_n := (\mathbb{R}^n, \rho_2)$, kde ρ_2 je tzv. euklidovská metrika, což je metrika indukovaná euklid. normou $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$, kde $x = [x_1, \dots, x_n]$; tj. $\rho_2(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \dots + |x_n-y_n|^2}$

Př.: $n=2$



Pozn.: $\|\cdot\|_2$ ... l_2 norma

↓ zobecnění na celou třídu

$\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$

$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$;

$\Rightarrow p \to \infty$: $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

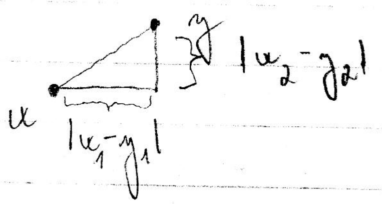
$\Rightarrow 1 \le p < \infty$: $\rho_p(x,y) = \sqrt[p]{|x_1-y_1|^p + \dots + |x_n-y_n|^p}$

• $\rho_\infty(x,y) = \max(|x_1-y_1|, \dots, |x_n-y_n|)$

$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

↓

• $\rho_1(x,y) = |x_1-y_1| + \dots + |x_n-y_n|$



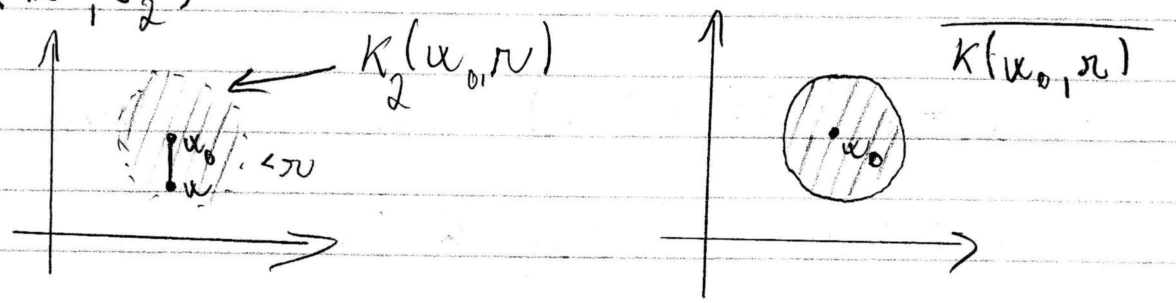
Def.: Koule

(X,d) ... metrický prostor

$K(x_0,r) := \{x \mid d(x,x_0) < r\}$; $r>0$, $r \in \mathbb{R}$ ... otevřená koule se středem x_0, poloměrem r

$\overline{K(x_0,r)} := \{x \mid d(x,x_0) \leq r\}$ ... uzavřená koule

Př.: $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$



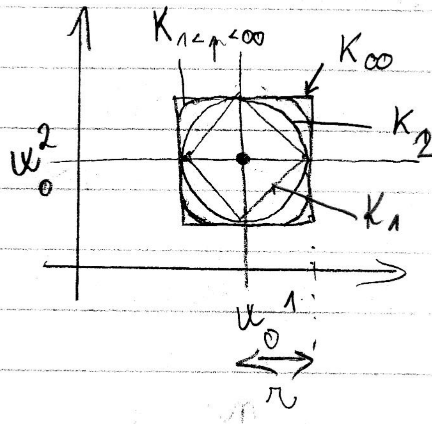
Př.: $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$

$\rho_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

$K_1(x_0,r)$.

$|x_1 - x_0^1| + |x_2 - x_0^2| \underset{(=)}{<} r$

$x = [x_1, x_2]$

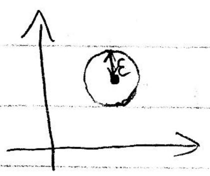


Def.: Okolí bodu

(X,d) ... metrický prostor

$K(x_0,\varepsilon)$ ... otevřené ε-okolí bodu x_0

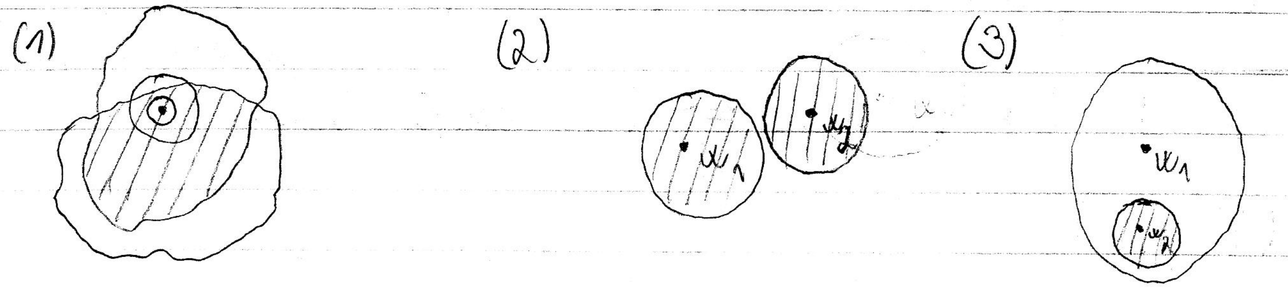
$\overline{K(x_0,\varepsilon)}$ ... uzavřené ε-okolí bodu x_0



(v širším smyslu lze za okolí považovat každou množinu $O(x_0)$: $x_0 \in O(x_0)$ a $\exists\, \varepsilon>0$: $K(x_0,\varepsilon) \subseteq O(x_0)$)

$O^*(x_0) := O(x_0) - \{x_0\}$ ... ryzí okolí pozn.: Takto zavedené okolí mají násl. vlastnosti (axiomy okolí):

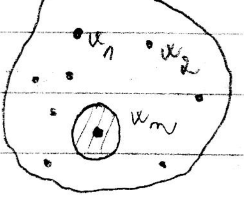
(1) Jsou-li O_1, O_2 (kulová) okolí téhož bodu x_0, pak $O_1 \cap O_2$ je okolí x_0



(2) Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $\exists\, O(x_1)$ a $O(x_2)$ tak, že $O_1(x_1) \cap O_2(x_2) = \emptyset$

(3) Je-li $x_2 \in O(x_1)$ vnitřní bod $\Rightarrow \exists\, O(x_2) \subseteq O(x_1)$

Def.: <u>Konvergence</u>



(X, d) ... metrický prostor

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; $x_n \in X$ ... posl. bodů v X.

Řekneme, že x_n konverguje k $\underline{x}$ (v metrice d), jestliže $d(x_n, x) \to 0$ pro $n \to \infty$, tj. pro $\forall\, O_\varepsilon(x)\ \exists\, N \in \mathbb{N}$: $x_n \in O_\varepsilon(x)$ pro $n \geq N$; píšeme $x_n \xrightarrow{d} x$.

Jestliže d_1, d_2 jsou dvě metriky na X s vlastností $x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x$ pro každou posl. $\{x_n\} \subseteq X$ a $\forall\, x \in X$ pak d_1 a d_2 se nazývají <u>ekvivalentní metriky</u>.

V: Všechny metriky ρ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ v $\mathbb{R}^n$ jsou navzájem ekvivalentní

Def.: <u>Úsečka v R^n</u>

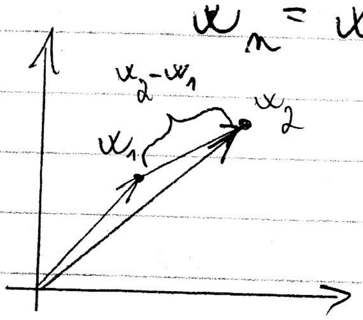
nechť $X_1 = [x_1^1, \dots, x_n^1]$, $X_2 = [x_1^2, \dots, x_n^2]$, $X_1 \neq X_2$.

<u>Úsečka</u> spojující body X_1 a X_2 je množina bodů $x = [x_1, \dots, x_m]$ definována takto:

$$\{x \mid x_1 = x_1^1 + (x_1^2 - x_1^1)\cdot t$$

$$\vdots$$

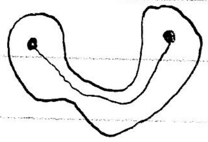
$$x_n = x_n^1 + (x_n^2 - x_n^1)\cdot t;\ t \in [0,1]$$



$$x_1 + x_2 - x_1 = x_2$$

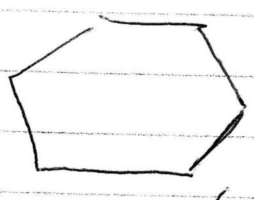
Def.: <u>Souvislá množina</u>

$M \subseteq E_n$, $M \neq \emptyset$ se nazývá <u>souvislá</u>, jestliže každé její 2 různé body X, Y lze spojit lomenou čarou, která leží v M, tj. $\exists\, x_1, \dots, x_n \in M$ tak, že $x_1 = x$, $x_n = y$ a pro $i = 1, 2, \dots, n-1$ úsečka $X_i X_{i+1}$ leží celá v M.

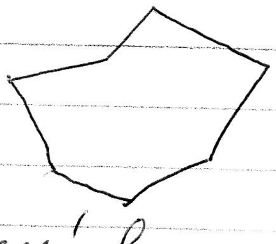


Def. <u>konvexní množina</u>

$M \subseteq E_n$, $M \neq \emptyset$ se nazývá <u>konvexní</u>, jestliže každé její 2 body lze spojit úsečkou, která celá leží v M

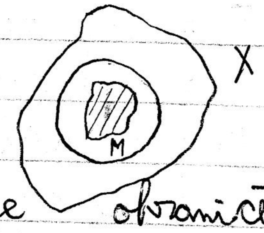


je konvexní množina



není konvexní

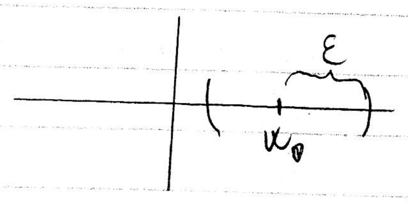
Def.: <u>Ohraničená množina</u>
(X,d) ... metrický prostor
$M \subseteq X$ se nazývá <u>ohraničená</u>, jestliže $\exists r>0$ tak, že $M \subseteq K(x_0, r)$ pro vhodné $x_0 \in X$.



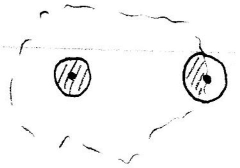
pozn.: $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$
lze vždy zvolit $x_0 = 0$, tj. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená, když $\exists r>0 : \rho_p(0,x) < r \ \forall x \in M$

Př.: $n=1$

$$\rho_p(x,y) = \sqrt[p]{|x-y|^p} = |x-y|$$



Def.: <u>Hromadný bod množiny</u>
(X,d) ... metrický prostor, $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$.
Bod $x \in X$ se nazývá <u>hromadný bod množiny</u> M, jestliže každé okolí bodu x obsahuje alespoň jeden bod množiny M různý od x.



Def.: <u>Otevřená množina</u>
(X,d) ... metrický prostor
$M \subseteq X$ ... se nazývá <u>otevřená</u>, jestliže každý její bod má nějaké <u>okolí celé</u> obsažené v M.

Def.: <u>Uzavřená množina</u>
(X,d) ... metrický prostor
Množina $M \subseteq X$ je uzavřená, jestliže $\underbrace{X-M}_{\text{komplement}}$ je otevřená

V: (X,d) ... metrický prostor
$M \subseteq X$ je uzavřená $\Longleftrightarrow$ každá konvergentní posl. bodů z M má limitu rovněž v M.

Def.: <u>Uzávěr, vnitřek</u>

(X,d) ... metrický prostor, $M \subseteq X$

$\overline{M}$ = nejmenší uzavřená množina obsahující M
(= průnik všech uzavřených množin obsahujících M.)

$\underline{M}$ = největší otevřená množina obsažená v M.
(= sjednocení všech otevřených množin obsažených v M.
(= množina všech bodů v M, které leží v M i s nějakým svým okolím)

Def.: <u>Kompaktní množina</u>

(X,d) ... metrický prostor
$M \subseteq X$ se nazývá <u>kompaktní</u>, je-li uzavřená a ohraničená

Def.: <u>Hranice</u>

$\overline{M} \cap (\overline{X-M}) =: h(M)$ ... <u>hranice</u> M
(= množina všech bodů, jejichž $\forall$ okolí má neprázdný průnik s M i s $X-M$.)