Pojem funkce více proměnných

E_n ... Eukl. prostory

$\underline{x}$ ... $[x_1, \ldots, x_n] \in E_n$

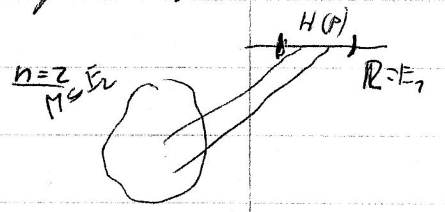
Definice:

Buď $M \subseteq E_1$, $M \neq \emptyset$; $f: M \to E_1$ se nazývá fce n proměnných,

píšeme $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ nebo $y = f(\underline{x})$

$M =: D(f)$ .. definiční obor

$f(M) =: H(f)$ .. obor hodnot fce f



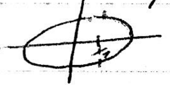
Pozn.: výše uvedená definice představuje zadání fce v explicitním tvaru

Funkci, respektive obecnější předpis lze také zadat v tzv. implicitním tvaru.

Je dána F $(n+1)$-proměnných tak, že vybíráme jen ty body $[x_1, \ldots x_n, y]$ které splňují rovnici $F(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{}, y) = 0$

$=: F(\underline{x}, y) = 0$

Příklad (1) $n=1$ $\underbrace{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}_{F(x_1, y)} = 0$ ... rovnice elipsy v impl. tvaru



$n=2$ $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

⋮

pro $n=?$ dá se pokračovat dál

Příklad (2) $n=1$

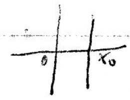
(*) přímka $y = y_0 + k(x - x_0)$ ... explicitní tvar

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ .. impl. tvar

Pro $a=1, b=0$:

$x - x_0 = 0$ tj $x = x_0$

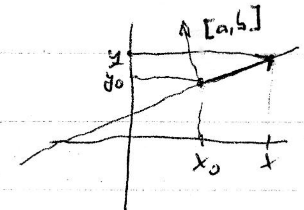
$y \in \mathbb{R}$ lib.



což je případ nepokrytý explicitním tvarem

(*) lze přepsat po ocí skal. součinu $\langle [a, b], [x - x_0, y - y_0] \rangle = 0$

$\Leftrightarrow [a, b] \perp [x - x_0, y - y_0]$



$\underline{n=2}$ $a_1(x_1-x_1^0)+a_2(x_2-x_2^0)+b(y-y_0)=0$ impl. zadání rovnice roviny v E_3

zadanou svou normálou (kolmicí), tj. $[a_1, a_2, b] \perp$ rovině

$\underline{n>2}$: $a_1(x_1-x_1^0)+a_2(x_2-x_2^0)+\dots+a_n(x_n-x_n^0)+b(y-y_0)=0$

... nadrovina v E_{n+1} zadaná kolmicí $[a_1, \dots, a_n, b] \perp$ nadrov.

Limita funkce n proměnných

$\underline{\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}}$

$\underline{\text{Def}}$: Řekneme, že fce $y=f(\underline{x})$ má v bodě $\underline{x}^0 =: [x_1^0, \dots x_n^0]$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L ex. ryzí okolí $O^*(\underline{x}^0)$ takové, že pro $x \in O^*(x^0) \cap D(f)$ platí $f(\underline{x}) \in O(L)$.

Pozn. (1) $\underline{x}^0$ musí být hromadným bodem $D(f)$: toto budeme nadále autom. předpokládat

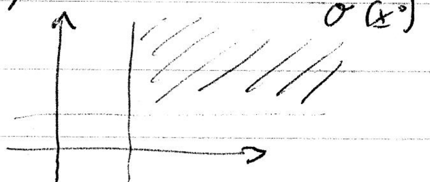
(2) je-li $L \in \{+\infty, -\infty\}$, nevlastní limita ve vlastním bodě

(3) Pojem limity lze rozšířit do bodů, které jsou nevlastní, tj. alespoň jedno $x_i^0 \in \{+\infty, -\infty\}$. Musíme však zavést pojem okolí takových nevlastních bodů. Druhy blížení k nekonečnu pro případ $n=2$

a) $\underline{x}^0 = [+\infty, +\infty]$

podobně

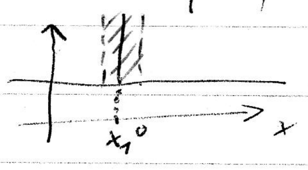
$\underline{x}^0 = [-\infty, +\infty]$



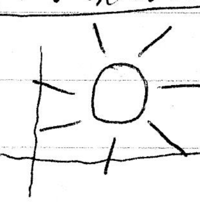
b) $[x_1^0, \infty]$

⋮

atd.



c) $\underline{\text{limita v nekonečnu}}$ (někdy se píše $[\infty, \infty]$)



$O([\infty, \infty])$ v případě $n>2$ postupujeme analogicky.

$\boxed{\text{V}}$ Heineho věta (alternativní definice) – viz též DoDo / V. 2.7 na str. 18

Fce $y=f(\underline{x})$ má vlastní nebo nevlastní limitu L ve vlastním nebo nevlastním bodě $\underline{x}^0$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\underline{x}^{(n)} \xrightarrow{\varrho} \underline{x}^0$, $\underline{x}^{(n)} \neq \underline{x}^{(0)}$ a $\underline{x}^{(n)} \in D(f)$ platí že $f(\underline{x}^{(n)}) \to L$

Pozn (1) konvergence je vzhledem k libovolné metrice ϱ ekvivalentní s eukl. metrikou ϱ_2.

(2) Pro limity fcí více proměnných platí obdobná tvrzení jako pro fce 1 proměnné - viz skripta (DoDo) kap 2) s tím že místo s konečnými uzavřenými intervaly pracujeme s kompaktními množinami

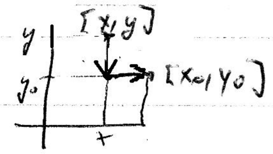
Pozn.:

Pokud se podaří nalézt $\underline{x}^{(n)} \to \underline{x}^{(0)}$ tak, že $f(\underline{x}^{(n)}) \not\to f(\underline{x}^{0})$, pak dle Heineho věty limita v $\underline{x}^{(0)}$ neexistuje limita

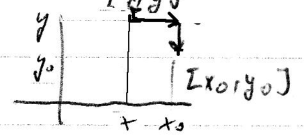
Obvykle se k $x^{(0)}$ blížíme po přímkách

Př. v $n=2$: Dvojné limity

$$L_1 = \lim_{x\to x_0} \left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]$$



$$L_2 = \lim_{y\to y_0} \left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$



Ex.-li $L = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, pak dle Heineho věty $L_1 = L_2 = L$

a) Je-li $L_1 \neq L_2$ pak naopak L nemůže existovat

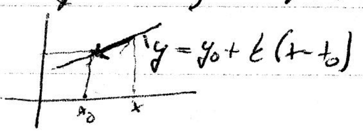
b) Existence $L_1 = L_2 \not\Rightarrow$ ex. L, neověřili jsme totiž všechny možné způsoby blížení k $[x_0, y_0]$. Obdobně pro $n>2$

(v případě $n=1$, možné způsoby blížení jsou pouze 2: limita zprava zleva)

c) neexistuje-li L_1 nebo L_2, tak L může existovat, problém totiž může být u vnitřních limit.

Metody výpočtu limit

obvykle se blížíme po přímkách buď po celých směrnicích nebo v polárních souřadnicích



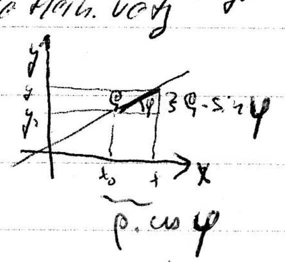
a) $\lim_{x\to x_0} f(x, y_0 + k(x-x_0)) =: L_k$

Pokud $L_k = L$ pro $\forall k$, pak L může, ale nemusí být limitou $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

pokud ale L_k závisí na k, pak L neexistuje dle Hein. věty

b) $x = x_0 + \varrho\cdot\cos\varphi$ pevné

$y = y_0 + \varrho\sin\varphi$ $\quad \varrho \to 0+$



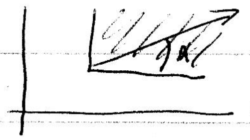
$\lim_{\varrho\to 0+} f(x_0 + \varrho\cos\varphi, y_0 + \varrho\cdot\sin\varphi) =: L_\varphi$

$L_\varphi = L\ \forall\varphi \Rightarrow L$ může, ale nemusí být limitou

Pokud $L_{\varphi_1} \neq L_{\varphi_2}$ pro $\varphi_1 \neq \varphi_2$ nějaké, pak L opět neexistuje podobně jako v případě a) problém ověření existence L usnadňuje V 2.6 ze skript DoDo

Druhy blížení do nekonečna

$[x,y] \to [+\infty,+\infty]$



$\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$

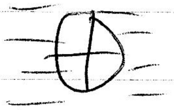
$\rho \to +\infty$

Podobně $\varphi\in[\frac{\pi}{2},\pi]$

$\varphi\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$

$\varphi\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]$

$[x,y]\to[\infty,\infty]$



$\varphi\in[0,2\pi]$

V2.6.

$\boxed{V}$ Funkce f má v bodě $[x_0,y_0]$ limitu rovnu L, jestliže existuje nezáporná funkce $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ splňující $\lim\limits_{\rho\to0+} g(\rho)=0$ takovou, že

$$|f(x_0+\rho\cdot\cos\varphi,\ y_0+\rho\cdot\sin\varphi)-L| < g(\rho) \text{ pro } \forall \varphi\in[0,2\pi]$$

a pro $\rho>0$ dostatečně malá.

$\boxed{\text{Důsl.}}$ Je-li speciálně po transformaci do polárních souřadnic $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{\rho\to0+} \underbrace{g_1(\rho)\cdot g_2(\varphi)}_{f(x_0+\rho\cos\varphi,\ y_0+\rho\sin\varphi)=:}$, kde $\lim\limits_{\rho\to0+} g_1(\rho)=0$ a fce $g_2(\varphi)$ je omezená pro $\varphi\in[0,2\pi)$, pak $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=0$. $\left[L=0;\ |g_2(\varphi)|\le K \Rightarrow |g_1(\rho)\cdot g_2(\varphi)| \le |g_1(\rho)|\cdot K =: g(\rho)\right]$

Důkaz $\boxed{V}$

$\lim\limits_{\rho\to0+} g(\rho)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: pro $0<\rho<\delta$ je $g(\rho)<\varepsilon$,

tj. $|f(x_0+\rho\cdot\cos\varphi,\ y_0+\rho\cdot\sin\varphi-L| < g(\rho)<\varepsilon$ pro $\forall\ 0<\rho<\delta$ a lib. $\varphi\in[0,2\pi)$. Tedy pro lib. $[x,y]$ z ryzího kruhového okolí bodu $[x_0,y_0]$ je $|f(x,y)-L|<\varepsilon$, což je právě definice vztahu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$.

22. 10. 04

Př.: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)\cdot e^{-(x+y)}$ " $\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$ " ← stoupá rychleji

$x=\rho\cdot\cos\varphi\,;\ y=\rho\cdot\sin\varphi\,;\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{\rho^2}{e^{\rho\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}}$$

$\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow \cos\varphi+\sin\varphi\geq 1\Rightarrow$ .. zdola ohraničené (nemůže nulovat)

$\Rightarrow \rho\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)\to\infty \Rightarrow e^{\rho\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}\to\infty$,

také $\rho^2\to\infty$

Máme výraz $\frac{\infty}{\infty}$, limitu spočteme L'Hosp. pravidlem:

$$L=\lim_{\rho\to\infty}\frac{[\rho^2]'}{[e^{\rho\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}]'}\overset{L'H}{=}\lim_{\rho\to\infty}\frac{2\cdot\rho}{e^{\rho\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{\rho\to\infty}\frac{2}{\underbrace{e^{\rho\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi)}}_{\infty}\cdot\underbrace{(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}_{\geq 1}}=\underline{\underline{0}}$$

Spojitost

$x=[x_1,\dots,x_n]\in E_n$ ... obecný bod

$x^0=[x_1^0,\dots,x_n^0]\in E_n$ ... konkrétní bod

$u=f(x)=f(x_1,\dots,x_n)\in R$

ρ ... metrika ekviv. s Euklid. metrikou ρ_2, obvykle $\rho(x,y)=\|x-y\|$, kde $\|\cdot\|$ je p-norma $1\leq p\leq\infty$.

$\rho_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

Def.: $f(x)$ se nazývá spojitá v x^0, jestliže $\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)$,
tj. $\forall O(f(x^0))\ \exists O(x^0): \forall x \in O(x^0) \cap D(f)$ je $f(x) \in O(f(x^0))$.

Pozn.: (ε-δ formulace) … epsilon-delta formulace
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D(f)$ takové že $\rho(x, x^0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$

Pozn.: Je-li $f(x)$ spojitá v $x^0 \Rightarrow \exists O(x^0)$, kde $f(x)$ je ohraničená.

$\boxed{\text{V 2.8}}$

f, g spojité v $x^0 \in E_n \Rightarrow f+g,\ f \cdot g,\ \overset{\in R}{c} \cdot g,\ \frac{f}{g}$ jsou rovněž spojité v x^0, v případě podílu předpokládáme $g(x^0) \neq 0$.

$\boxed{\text{V 2.9}}$

nechť $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$ jsou spojité v bodě $t^0 = [t_1^0, \dots, t_k^0]$ a f nechť je spojitá v bodě $x^0 = [\varphi_1(t^0), \dots, \varphi_n(t^0)]$ ⊗ Pak složená fce $F(\underbrace{t_1, \dots, t_k}_{t}) =$
$= f(\varphi_1(\underbrace{t_1, \dots, t_k}_{t}), \dots, \varphi_n(\underbrace{t_1, \dots, t_k}_{t}))$ je rovněž spojitá v bodě t^0.

$$\otimes \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "F"'] & \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \arrow[r, "f"] & {} \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{V}}$ Fce $f(x)$ je spojitá v $x^0 \Longleftrightarrow$ pro $\forall$ posl. $x_n \xrightarrow{\rho} x^0$, $x_n \in D(f)$ platí $f(x_n) \to f(x^0)$.

Důkaz: je důsledkem Heineho věty.

<u>Def.</u>: $M \subseteq E_n$, $M \neq \emptyset$, $f(\underline{x})$ definovaná na M ($M \subseteq D(f)$) a $\underline{x}^0 \in M$. Říkáme, že $f(\underline{x})$ je spojitá v $\underline{x}^0$ vzhledem k M, jestliže ke $\forall\, O(f(\underline{x}^0))\ \exists\, O(\underline{x}^0)$ tak, že pro $\forall \underline{x} \in O(\underline{x}^0) \cap M$ je $f(\underline{x}) \in O(f(\underline{x}^0))$.

Řekneme, že $f(\underline{x})$ je spojitá na M, jestliže je spojitá vzhledem k M v každém jejím bodě.

<u>Pozn.</u>: Platí analog. tvrzení jako pro $n=1$. Pouze uzavřený interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ nahradíme <u>kompaktní podmnožinou</u> v $E_n = \mathbb{R}^n$.

$\boxed{V}$ <u>Bolzano-Weierstrassova věta</u>

Je-li $\{\underline{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená posl. v $\mathbb{R}^k$ $\Rightarrow$ z $\{\underline{x}^n\}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{\underline{x}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ($n_1 < n_2 < \ldots$)

$\boxed{V}$ <u>1. Weierstrassova věta</u>

$f(\underline{x})$ definována a spojitá na kompaktní množině $M \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\underline{x})$ je na M ohraničená.

$\boxed{V}$ <u>2. Weierstrassova věta</u>

$f(\underline{x})$ definována a spojitá na kompaktní množ. $M \Rightarrow$
$\Rightarrow$ nabývá na M své největší a nejmenší hodnoty.

<u>Def.</u>: <u>stejnoměrná spojitost</u>

$M \subseteq E_n$, $M \neq \emptyset$, $f(\underline{x})$ def. na M.
Řekneme, že f je <u>stejnoměrně spojitá na M</u>, jestliže ke každému $\varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tak, že pro každé 2 body $\underline{x}, \underline{y} \in M$, pro něž $\underline{\rho(\underline{x}, \underline{y})} < \delta$ platí $|f(\underline{x}) - f(\underline{y})| < \varepsilon$.
(metrika ekviv. s Euklid.) $\|\underline{x} - \underline{y}\|$

<u>Pozn.</u>: f stejnoměrně spojitá na $M \Rightarrow f$ spojitá na M

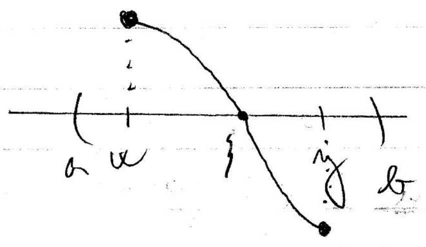
$\overset{?}{\Leftarrow}$ (může i nemusí být)

[VI] Heine - Cantorova věta

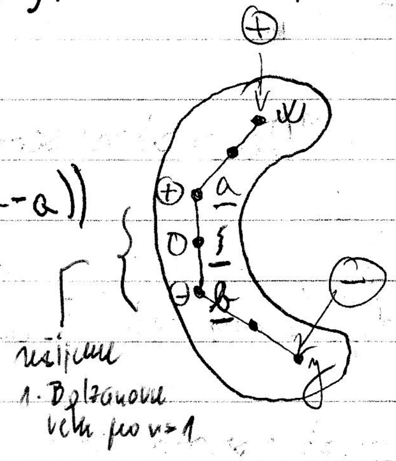
Nechť $f(\underline{x})$ je definována a spojitá na kompakt. množ. $M \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ je na M spojitá stejnoměrně.

[V] 1. Bolzanova věta

Je-li $f(\underline{x})$ definovaná a spojitá na otevřené a souvislé množ. $M \subseteq E_n$.
Existují-li v M dva body $\underline{x}$ a $\underline{y}$ tak, že $f(\underline{x}) < 0$ a $f(\underline{y}) > 0$.
Pak existuje bod $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n] \in M$ tak, že $f(\xi) = 0$.



$f(\underline{a} + t\cdot(\underline{b} - \underline{a}))$



$\underline{a} + t\cdot(\underline{b} - \underline{a})$

$t \in [0,1]$

[V] 2. Bolzanova věta

Je-li $f(\underline{x})$ def. a spoj. na otevřen. a souvislé podmnož. $M \subseteq E_n$ a
$\underline{x}, \underline{y} \in M$ takové, že $f(\underline{x}) \neq f(\underline{y})$. Pak ke každému c
ležícímu mezi čísly $f(\underline{x})$ a $f(\underline{y})$ existuje $\xi \in M : f(\xi) = c$.

Důkaz: Např. pro $f(x) < c < f(y)$ je $f(x) - c < 0$ a $f(y) - c > 0$.
Dle předchozí věty $\exists\, \xi : f(\xi) - c = 0 \Rightarrow f(\xi) = c$.