PARCIÁLNÍ DERIVACE

Def.: parciální derivace

nechť $u = f(\underline{x})$ je definovaná na otevřené množ. M a $\underline{x}^0 \in M$.
Má-li fce $\varphi_i(x_i) := f(\underbrace{x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0}, x_i, \underbrace{x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0})$
pevné

derivaci $\varphi_i'(x_i^0)$, pak $\varphi_i'(x_i^0)$ nazýváme parciální derivací fce $f(x_1, \ldots, x_n)$ podle proměnné x_i $(i = 1, \ldots, n)$ v bodě $\underline{x}^0$

Značíme ji:

$$\frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i} := \varphi_i'(x_i^0)$$

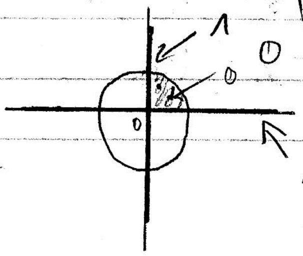
$$\frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_i};\ f'_{x_i}(\underline{x}^0);\ f_{x_i}(\underline{x}^0);\ f'_i(\underline{x}^0).$$

Má-li $f(\underline{x})$ parc. der. podle x_i ve všech bodech podmnož. $N \subseteq M$, stane se na N fcí bodu $\underline{x} \in N$ a $\forall\, \underline{x} \in N$ píšeme

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i};\ \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i};\ f'_{x_i}(\underline{x});\ f'_i(\underline{x});\ \frac{\partial u}{\partial x_i};\ u'_{x_i};\ u'_i$$

! POZOR !
na rozdíl od fcí 1 proměnné z existence parc. derivací $f_1'(\underline{x}^0), \ldots, f_n'(\underline{x}^0)$ neplyne spojitost f v bodě $\underline{x}^0$.

Př.: $n = 2$
↑
DoDo/Př.32/str27



$f = 1$ (osy x, y), 0 jinak
$\underline{x}^0 = [0,0]$
$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, ale f není spojitá v bodě $[0,0]$.

Def.: parc. der. vyšších řádů

Definují se obdobně jako parc. der. parciálních derivací nižších řádů, pokud existují.

$$\circledast\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)=$$

Př.: $n=2$

$$\circledast = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = f''_{xx}(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = f''_{yy}(x_0,y_0) = f_{yy}(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\,\partial y} = f''_{xy}(x_0,y_0) = f_{xy}(x_0,y_0)$$

$$= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\,\partial x} = f''_{yx}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

Obecně pro n:

$$\frac{\partial^{\overset{\text{řád derivování}}{(k)}} f(\underline{x}^0)}{\partial x_{i_1}^{k_1}\cdot\partial x_{i_2}^{k_2}\cdots\partial x_{i_n}^{k_n}}\,,\quad \text{kde } k=\sum_{i=1}^{n} k_i \text{ a } i_1,\dots,i_n\in\{1,\dots,n\}$$

pokud jsou alespoň 2 z $i_1,\dots,i_n$ různé …

… smíšené parc. derivace

V Schwarzova věta – viz. DoDo / V 3.2
Má-li fce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $(n=2)$ spojité parc. der. f_{xy} a f_{yx} v bodě $[x_0,y_0]$, pak $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

Pozn. Pokud f_{xy}, f_{yx} nejsou spojité, tak nemusí být shodné;
→ DoDo Př. 3.4/30

Př. $f(x,y)=\begin{cases} xy & \text{pro } |x|\ge|y| \\ 0 & \text{pro } |x|<|y| \end{cases}$

$z=kx^2,\ k\in[-1,1]$, kde $f_{xy}(0,0)=0$, $f_{yx}(0,0)=1$

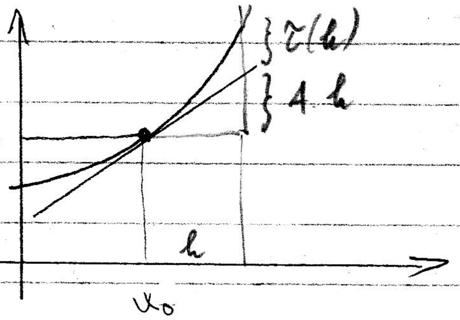
Důsledek (viz DoDo / V. 3:3)

Má-li fce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\underline{x}_0$ a v nějakém jeho okolí spojité parc. derivace až do řádu k, pak hodnota parc. der. řádu kolik. bodě tohoto okolí závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle jednotl. proměnných $x_1, \dots, x_n$, nikoliv na pořadí, v jakém se podle těchto proměnných derivovalo.

TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

Motivace $y = f(\underline{x})$; chceme chování fce $f(\underline{x})$ v okolí bodu $\underline{x}_0$ aproximovat lineární fcí.

(1) $n = 1$: $y = f(x)$



$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\overset{\text{tam}}{\tau(h)}}{h} = 0}$$ ... chceme, aby platilo

$\Updownarrow$

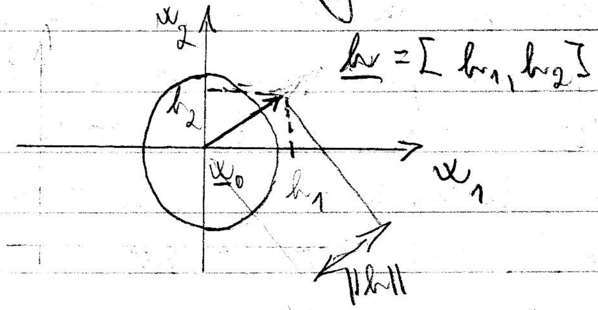
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - \overbrace{[f(x_0) + A\cdot h]}^{\text{přímka}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{A\cdot h}{h} = 0 \iff$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A \iff f'(x_0) = A$$

Závěr: pro $n=1$ je hledanou lineární aproximací tečná přímka ke grafu fce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

② $\underline{n=2}$ $\quad y = f(\underbrace{x_1, x_2}_{\underline{x}})$; $\underline{h} = [h_1, h_2]' := \Delta \underline{x}$

... přírůstkový vektor



Podobně jako v případě $n=1$ hledáme lineární fci $\overbrace{f(\underline{x}^0)+A_1h_1+A_2h_2}^{\text{tečná rovina}}$, která dobře aproximuje chování $f(\underline{x})$ v $O(\underline{x}^0)$, tj. chceme, aby platilo:

$$0 = \lim_{\substack{\underline{h}\to \underline{0}\\ [0,0]'}} \frac{f(\underline{x}^0+\underline{h}) - [f(\underline{x}^0)+A_1h_1+A_2h_2]}{\|\underline{h}\|} =$$

euklid. norma nebo s ní ekvivalentní

$$= \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2) - f(x_1^0,x_2^0) - A_1h_1 - A_2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =: \frac{\tilde{\tau}(\underline{h})}{\|\underline{h}\|}$$

③ pro obecné n analogicky $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]'$

$$0 = \lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{f(x_1^0+h_1,\dots,x_n^0+h_n) - \overbrace{[f(x_1^0,\dots,x_n^0)+A_1h_1+\dots+A_nh_n]}^{\text{tečná nadrovina}}}{\underbrace{\|\underline{h}\|}_{\sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2}}}$$

Def.: Totální diferenciál

Nechť $y = f(\underline{x})$ je def. v bodě $\underline{x}^0$ a nějakém jeho okolí $O(\underline{x}^0)$. Řekneme, že $f(\underline{x})$ je v bodě $\underline{x}^0$ diferencovatelná, ex-li reálná čísla $A_1, \dots, A_n$ a funkce $\tau(h_1, \dots, h_n)$, tak, že přírůstek fce $f(\underline{x})$ v bodě $\underline{x}^0$ lze psát ve tvaru: h

$$f(\underline{x}^0 + h) - f(\underline{x}^0) = \overbrace{A_1 h_1 + \dots + A_n h_n}^{\langle A, h \rangle} + \tau(h) \qquad \text{přičemž}$$

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{\tau(h)}{\|h\|} = 0$$

Výraz $A_1 h_1 + \dots + A_n h_n$ se nazývá totální diferenciál fce $f(x)$ v bodě $\underline{x}^0$ a značí se $df(\underline{x}^0)$.

Pozn.: Označíme-li obdobně přírůstky $dx_1 := h_1; \dots; dx_n := h_n$, pak $df(\underline{x}^0) = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$

!POZOR! Konstanty $A_1, \dots, A_n$ závisí na $\underline{x}^0$, tj. jsou jejich fcemi. Nechámeli $\underline{x}^0$ proměnný, pak

$$df(\underline{x}) = A_1(\underline{x})\, dx_1 + \dots + A_n(\underline{x})\, dx_n,$$ tj. totální diferenciál je také fcí n-proměnných.

$\boxed{V}$ $f(\underline{x})$ diferencovatelná v $\underline{x}^0 \Rightarrow$ pak $f(\underline{x})$ má v $\underline{x}^0$ všechny parciální derivace konečné

$$\frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_i} \text{ pro } i = 1, \dots, n \text{ a platí } A_i := \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_i}, \; i = 1, \dots, n.$$

Můžeme tedy psát: $$\boxed{df(\underline{x}^0) = \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_n} dx_n}$$

$\boxed{V}$ $f(\underline{x})$ <u>diferencovatelná</u> ~~v~~ $\underline{x}^0 \Rightarrow f(\underline{x})$ je <u>spojitá</u> v $\underline{x}^0$.

<u>Pozn.</u>: Z existence parciálních derivací v $\underline{x}^0$ <u>neplyne v případě $n \geq 2$ diferencovatelnost v $\underline{x}^0$</u>. (a tedy obecně ani spojitost fce f-ní Př/str.16 nebo DaDo/Př 3.2/str.27

Toto platí pouze v příp. $n=1$, kdě $y = f(\underline{x})$ je diferencovatelná v $\underline{x}^0 \Leftrightarrow f'(\underline{x}^0)$ existuje a je konečná,

$$df(\underline{x}^0) = \underbrace{f'(\underline{x}^0)}_{A}\,dx \quad \text{neboli} \quad f'(\underline{x}^0) = \frac{df(\underline{x}^0)}{dx}$$

! $\boxed{V}$ Má-li $f(\underline{x})$ v $\underline{x}^0$ všechny parciální derivace spojité $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(\underline{x})$ je v $\underline{x}^0$ diferencovatelná.

! <u>Pozn.</u>: Z diferenc. $f(\underline{x})$ v $\underline{x}^0$ sice dle výše uvedené věty plyne existence všech parc. derivací, tyto však obecně nemusí být spojité.

<u>Tečná rovina ($n=2$)</u>

Plocha $z = f(x,y)$ má v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ tečnou rovinu $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x,y)$ zde má totální diferenciál. Rovnice tečné roviny je pak příslušná lineární aproxim. fce v $O(x_0,y_0)$,

$$f(\underbrace{x_0+h_1}_{=:x}, \underbrace{y_0+h_2}_{=:y}) \approx \underbrace{f(x_0,y_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2}_{\text{tečná rovina}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x,y) \approx \boxed{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}$$

pro případ $n=1$ ... máme tečnou přímku

$n>2$ ... máme <u>tečnou nadrovinu</u>

$$f(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{x}) \approx \underbrace{f(x_1^0,\dots,x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}(x-x_i^0)}_{\text{tečná nadrovina.}}$$

Pozn.: diferenciál k-ho řádu

Protože $d f(x)$ je fcí $\underline{x}$, můžeme konstruovat diferenciály vyšších řádů postupně.

$$\left.\begin{array}{lll} d^2 f(x) := d(d f(x)) & \ldots & \text{dif. 2. řádu} \\ \vdots & \vdots & \\ d^k f(x) := d(d^{k-1} f(x)) & \ldots & \text{dif. k-tého řádu} \end{array}\right\} \text{rekurentní definice}$$

Způsob výpočtu $d^2 f(x,y)$:

$$d(d f(x,y)) = d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \left[d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] dx + \left[d \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] dy =$$

$$= \Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}_{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x}} dx + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}_{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}} dy\Big] dx +$$

$$+ \Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}_{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}} dx + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}_{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}} dy\Big] dy$$

Z předpokladu spojitosti parc. der. 2. řádu jsou smíšené derivace stejné a výraz lze upravit:

$$d^2 f(x,y) = \underline{f''_{xx} dx^2 + 2 \cdot f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2} =$$

„alchymie" (pak přepíše do čitatele)

$$\underset{\text{(formálně)}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2\right) \cdot f(x,y) =$$

$$= \underline{\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} dy^2}$$

obecně pro $k \geq 1$ dostáváme za předpokladu spojitosti parc. der. k-tého řádu násl. pravidla výpočtu k-tého diferenciálu:

a, $n=2$: $d^k f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x,y) =$ ↙ Binomická věta

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} dx^j \cdot \frac{\partial^{k-j}}{\partial x^{k-j}} dy^{k-j}\right) f(x,y) = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{j}}_{\frac{k!}{\underbrace{j!}_{j_1!}\,\underbrace{(k-j)!}_{j_2!}}} \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^j \partial x^{k-j}} \cdot (dx)^j \cdot (dy)^{k-j}$$

, kde $j_1 + j_2 = k$

b, pro obecné n:

$$d^k f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k \cdot f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x}) =$$ ↙ zobecněná bin. věta

$$= \sum_{\substack{j_1+\dots+j_n=k \\ 0 \leq j_i \leq k}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_n!} \cdot \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} \cdot (dx_1)^{j_1} \cdots (dx_n)^{j_n}$$

Pozn.: Pokud fce $f(x)$ nemá v bodě x^0 spojité parc. derivace, pak existenci diferenciálu musíme ověřit přímo z definice zkoumáním limity,

např.: pro $n=2$:

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{f(x_0+h_1, x_0+h_2) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} h_1 - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \overset{?}{=} 0$$

Podobně po diferenciály vyšších řádů