DERIVACE SLOŽENÝCH FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

V: nechť $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je diferencovatelná v bodě $\underline{x}^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ kde $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_k)$ mají všechny 1. parciální derivace v bodě $\underline{t}^0 = [t_1^0, \dots, t_k^0]$, přičemž $x_1^0 = \varphi_1(\underline{t}^0), \dots, x_n^0 = \varphi_n(\underline{t}^0)$.

Pak složená $F(t_1, \dots, t_k) = f[\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_k)]$ má 1. parciální derivace v bodě $\underline{t}^0$ a platí pro ně:

$$\frac{\partial F(\underline{t}^0)}{\partial t_1} = \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1(\underline{t}^0)}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n(\underline{t}^0)}{\partial t_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F(\underline{t}^0)}{\partial t_i} = \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1(\underline{t}^0)}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n(\underline{t}^0)}{\partial t_i}$$

$$\vdots$$

Zápis pomocí sumace:

$$(*) \quad \frac{\partial F(\underline{t}^0)}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \overset{\varphi_j}{\overset{\downarrow}{x_j}}}{\partial t_i} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = A \cdot x \\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \end{array} \right.$$

Označme $\underbrace{\text{grad}}_{\text{tento vektor}} f(\underline{x}^0) = \left[\frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_n}\right]^T$ (T) transponovaná

se nazývá gradient fce f v bodě $\underline{x}^0$

Označme $\underbrace{J}_{\text{Jacobiho matice}} := \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(t_1^0, \dots, t_k^0)} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\underline{t}^0)}{\partial t_1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1(\underline{t}^0)}{\partial t_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(\underline{t}^0)}{\partial t_1}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_n(\underline{t}^0)}{\partial t_k} \end{bmatrix}$

(*) lze zapsat maticově:

$$\boxed{\text{grad } F(\underline{t}^0) = J^T \cdot \text{grad } f(\underline{x}^0)}$$ nebo $\text{grad } F(\underline{t}^0)^T = \text{grad } f(\underline{x}^0)^T \cdot J$

$$\Rightarrow \frac{DF}{D(t_1, \dots, t_k)} = \frac{DF}{D(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_k)}$$

Důsledek: Pokud φ_i jsou diferencovatelné pro $i=1,..,n$ v $\underline{t}^0$, pak $F(\underline{t})$ je rovněž diferencovatelná v $\underline{t}^0$ a $dF(\underline{t}^0)$ spočteme formálně tak, že i-tý řádek (*) vynásobíme dt_i $(i=1,..,k)$ a sečteme:

$$\underline{dF(\underline{t}^0)} = \frac{\partial F(\underline{t}^0)}{\partial t_1} \cdot dt_1 + .. + \frac{\partial F(\underline{t}^0)}{\partial t_k} \cdot dt_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F(\underline{t}^0)}{\partial t_i} dt_i \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) \cdot dt_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \overset{\varphi_j}{x_j}}{\partial t_i} dt_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_j} \cdot dx_j = \underline{\underline{df(\underline{x}^0)}}$$

Výše uvedený vztah se nazývá Věta o invariantnosti tvaru 1. diferenciálu, neboť vzorec pro 1. diferenciál fce $y = f(\underline{x})$ napsaný ve tvaru $dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + .. + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ zůstává v platnosti i tehdy, když proměnné $x_1,..,x_n$ jsou diferencovatelné jako fce dalších proměnných $t_1,..,t_k$.

Pozn.: Obdobné tvrzení **NEPLATÍ** pro diferenciály řádu >1 !

Př.: Této vlastnosti využíváme při výpočtu diferenciálů slož. fcí takto:

$(n=2)$; $x_1 \rightsquigarrow x$; $x_2 \rightsquigarrow y$;

a) $\underline{f(x,y) = x \cdot y}$; $d(x \cdot y) = \frac{\partial (x \cdot y)}{\partial x} dx + .. + \frac{\partial (x \cdot y)}{\partial y} dy = \boxed{y \cdot dx + x \cdot dy}$

b) $\underline{f(x,y) = \frac{x}{y}}$; $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = \boxed{\frac{y\,dx - x \cdot dy}{y^2}}$

Vyskytnou-li se výrazy, kde x, y budou diferencovatelné fce dalších proměnných $\underline{t}$, dx, dy v uvedených vztazích můžeme formálně vyhodnotit jako příslušné diferenciály v proměnných $\underline{t}$. Naopak spočteme-li rovnou diferenciál slož. fce v $\underline{t}$, lze odtud zjistit příslušné parc. der. dle t_i

$$k=2,\ n=1$$

Př.: $F(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\varphi_1} x^2+y^2 \to \ln(\underbrace{x^2+y^2}_{=\varphi_1(x,y)})$

$$dF = \underbrace{\frac{\partial \ln}{\partial n}}_{\frac{d\ln n}{dn}} \cdot dn = \frac{1}{n}\,dn = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot d(x^2+y^2) = \Big(\underbrace{2x}_{\frac{\partial f}{x}}\,dx + \underbrace{2y}_{\frac{\partial f}{y}}\,dy\Big)\Big/(x^2+y^2) =$$

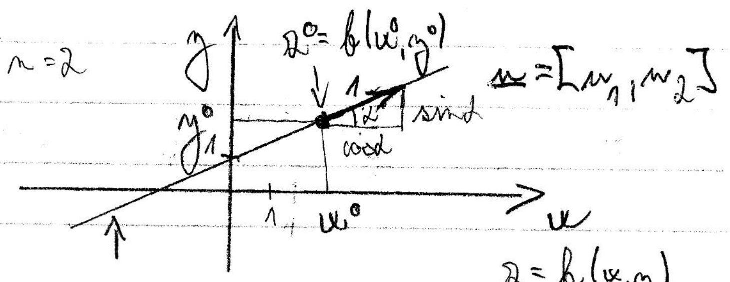
$$= 2\cdot\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy \Rightarrow F_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$F_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$\boxed{V}$ Nechť fce $x_i = \varphi_i(\underline{t})$, $i = 1,\dots,n$; $\underline{t}\in\mathbb{R}^k$ mají spojité parciální derivace až do řádu m včetně v otevřené množině I. Nechť fce $y = f(x_1,\dots,x_n)$ má spojité parc. der. až do řádu m včetně v otevřené množině I'. Nechť pro $\forall\, \underline{t}\in I$ je $[\varphi_1(\underline{t}),\dots,\varphi_n(\underline{t})]\in I'$.
Pak složená fce $y = F(\underline{t}) = f(\varphi_1(\underline{t}),\dots,\varphi_n(\underline{t}))$ má spojité parc. der. až do řádu m včetně na I.

DERIVACE VE SMĚRU

$n=2$



$\underline{n=2}$:

Def: Existuje-li $F'(0)$ složené fce
$F(t) = f(\underbrace{x^0 + t u_1}_{x}, \underbrace{y^0 + t u_2}_{y})$,
nazýváme ji derivací fce $f(x,y)$ v bodě $[x^0, y^0]$ ve směru $\underline{u} = [u_1, u_2]$ a zapisujeme $\dfrac{\partial f(x^0,y^0)}{\partial \underline{u}}$

$\left\{\begin{matrix} x(t) = x^0 + t\cdot u_1 \\ y(t) = y^0 + t\cdot u_2 \end{matrix}\right\}$ param. rovnice přímky ve směru $\underline{u}$ procházející bodem $[x^0, y^0]$

Pozn.: Obvykle $\|u\|=1$, tj. $u=[\cos\alpha, \sin\alpha]$ pro α udávající směr.

$\boxed{V}$ Je-li $f(x,y)$ diferencovatelná v $[x^0, y^0]$, pak má v tomto bodě derivaci v lib. směru $\underline{u}=[u_1, u_2]$ a platí:

$$\boxed{\frac{\partial f(x^0,y^0)}{\partial \underline{u}} = \frac{\partial f(x^0,y^0)}{\partial x}\cdot u_1 + \frac{\partial f(x^0,y^0)}{\partial y}\cdot u_2}$$

Důkaz: $\boxed{n=2,\ k=1}$: $t_1 =: t$

f diferencovatelná, $\varphi_1 = x^0 + t\cdot u_1$; $\varphi_2 = x^0 + t u_2$ mají (spojité) derivace $\frac{d\varphi_1}{dt} = u_1$, $\frac{d\varphi_2}{dt} = u_2$ a stačí užít větu pro der. slož. fci.

Pozn.: Obdobně pro obecné n je $F'(0)$ směrová derivace fce f v x^0 ve směru $\underline{u}=[u_1, \dots, u_n]$, kde $F(t) = f(x_1^0 + tu_1, \dots, x_n^0 + tu_n) =: f(\underline{x}^0 + t\underline{u})$ a platí:

$$\frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial \underline{u}} = \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_1}\cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f(\underline{x}^0)}{\partial x_n}\cdot u_n = \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}^0), \underline{u} \rangle =$$

$$\boxed{|\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle| \le \|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\| \Rightarrow -1 \le \underbrace{\frac{\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle}{\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|}}_{=:\cos\varphi} \le 1}$$ Schwarzova věta

$$= \|\operatorname{grad} f(\underline{x}^0)\| \cdot \|u\| \cdot \cos\varphi$$

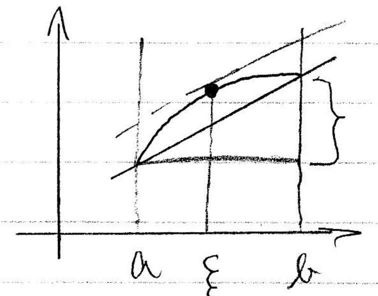
↑ úhel mezi gradientem a $\underline{u}$.

$\Rightarrow$ směrová derivace je největší (kladná) právě když $\cos\varphi = 1$, tj. právě když $\varphi = 0$, tj. právě když $\underline{u}$ má směr gradientu.

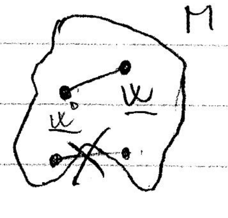
Pozn.: Směrové derivace lze skládat (viz. DoDo | V 3.4 na str. 33)

$\boxed{V}$ Lagrangeova věta pro fce n proměnných

$n=1$



$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



nechť $y = f(x_1,\dots,x_n)$ je def. a má spojité 1. parc. der. na $M \subseteq \mathbb{R}^n$
nechť body $\underline{x}^0 = [x_1^0,\dots,x_n^0]$ a $\underline{x} = [x_1,\dots,x_n]$ leží v M i se svojí spojnicí $\overline{\underline{x}_0\underline{x}}$. Pak existuje takové číslo $0<\Theta<1$, že platí:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_1}\cdot(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_n}\cdot(x_n - x_n^0),$$

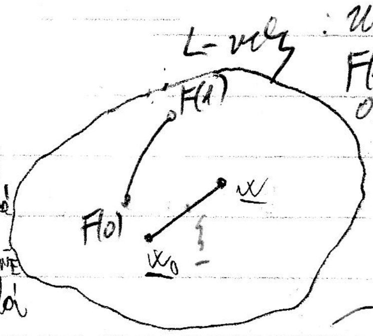
$$\text{kde } \underbrace{\xi}_{\text{závisí na } \underline{x}} = [x_1^0 + \Theta(x_1 - x_1^0), \dots, x_n^0 + \Theta(x_n - x_n^0)].$$

Důkaz: užijeme L-větu pro fce 1 proměnné:

$F(t) = f(\underline{x}^0 + t(\underline{x} - \underline{x}^0))$, $t \in [0,1]$

Ozn. $\underset{(xi)}{\xi} := \underline{x}^0 + \underset{(théta)}{\Theta}(\underline{x} - \underline{x}^0)$ pro $0<\Theta<1$

každé 2 body musí být spojené úsečkou v MNOŽINĚ $\Leftrightarrow$ je souvislá



Dle L.V. 1 prom.: $\exists\, \Theta \in (0,1)$: $\underbrace{f'(\underline{x}^0 + \Theta(\underline{x} - \underline{x}^0))}_{\text{směrová der.}\ t=\Theta} = \underbrace{F'(\Theta)} = \dfrac{\overbrace{f(\underline{x}^0 + 1(\underline{x} - \underline{x}^0))}^{F(1)} - \overbrace{f(\underline{x}^0 + 0\cdot(\underline{x} - \underline{x}^0))}^{F(0)}}{1-0} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\cdot(x_i - x_i^0)$$

$$\Vert$$

$$\boxed{f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\cdot(x_i - x_i^0),\ \xi = \underline{x}^0 + \Theta(\underline{x} - \underline{x}^0)} \text{ --- L-věta}$$

Důsledek

Má-li funkce $y = f(\underline{x})$ na otevřené a souvislé množině M všechny parciální derivace 1. řádu rovny nule, pak $f(\underline{x})$ je konstanta na M.

Důkaz

$\underline{x}^0$ ... lib. pevně $\quad$ v M $\overset{L.v.}{\Longrightarrow}$ $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\underline{\xi})}{\partial x_i}(x_i - x_i^0)$,

$\underline{x}$ ... lib. bod

kde $\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{x})$ je bod na úsečce $\overline{\underline{x}\underline{x}_0} \subseteq M$.

Tedy $\underline{\xi} \in M \Rightarrow \frac{\partial f(\underline{\xi})}{\partial x_i} = 0 \ \forall i \Rightarrow f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = 0 \Rightarrow f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$

Pozn. $(n=2)$, $f(x,y)$ diferencovatelná

Uvažme přímku na (tečné) rovině $\quad z(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$

procházející bodem $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ ve směru $\underline{u} = [u_1, u_2]$ $(\|\underline{u}\| = 1)$

$$x = x_0 + t \cdot u_1,\ y = y_0 + t \cdot u_2 \Rightarrow x - x_0 = t \cdot u_1,\ y - y_0 = t \cdot u_2 \Rightarrow$$

$$z(x_0+tu_1, y_0+tu_2) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} u_1 \cdot t + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} u_2 \cdot t =$$

$$= f(x_0,y_0) + \underbrace{\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} u_2\right)}_{\text{směrnice} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \underline{u}}} \cdot t$$

Tedy směrnice přímek ležících na $z(x,y)$ a procházejících bodem dotyku $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ odpovídají příslušným směrovým derivacím a jsou tedy tečnami ke $\underset{\text{příslušným řezovým křivkám}}{f(x_0+tu_1, y_0+tu_2)}$. To můžeme považovat za definiční vlastnost tečné roviny, a tedy za potvrzení faktu, že $z(x,y)$ je tečná rovina k $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$.

Taylorův vzorec pro funkce více proměnných

V nechť fce $y = f(x_1, \dots, x_n) =: f(\underline{x})$ má v bodě $\underline{x}^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ a nějakém jeho (souvislém) okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$ včetně ($m = 0, 1, \dots$).

Pak pro libovolný bod $\underline{x}$ z tohoto okolí platí:

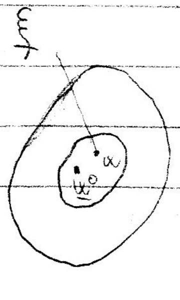
$$\boxed{f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \frac{df(\underline{x}^0)}{1!} + \frac{d^2 f(\underline{x}^0)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(\underline{x}^0)}{m!} + \underbrace{R_m}_{\text{chyba aproximace}}},$$

kde $\boxed{R_m = \frac{d^{m+1} f(\xi)}{(m+1)!}}$, přičemž:

$$\xi = [x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), \dots, x_n^0 + \theta(x_n - x_n^0)] =:$$

$$=: \underline{x}^0 + \theta(\underline{x} - \underline{x}^0) \text{ pro vhodné } 0 < \theta < 1 \quad [\theta, \xi \text{ závisí na } x]$$

V diferenciálech nahradíme dx_i přírůstky $x_i - x_i^0$.
($dx_i = x_i - x_i^0$)



Speciální případy:

(0) $n=0$: ne Lagrangeova věta

(1) $n=1$ ... fce 1 proměnné

Ukážeme, že Taylorův vzorec pro fce 1 proměnné je speciálním příp. Taylorova vzorce dle předchozí věty.

$$d^k f(x^0) = f^{(k)}(x^0)\cdot(dx)^k$$

$$\frac{d f(x^0)}{dx} = f'(x^0) \Rightarrow d f(x^0) = f'(x^0)\cdot dx$$

$$d^2 f(x^0) = f''(x^0)\cdot \underbrace{dx\cdot dx}_{(dx)^2}$$

Dosadíme $dx = x - x^0$, pak

$$f(x) = f(x^0) + \frac{f'(x^0)\cdot(x-x^0)}{1!} + \dots + \frac{f^{m}(x^0)\cdot(x-x^0)^m}{m!} + \frac{f^{m+1}(\xi)\cdot(x-x^0)^{m+1}}{(m+1)!}$$

(2) $n>1$

$$d^k f(\underline{x}^0) = \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cdot dx_n}\Big)^k f(\underline{x}_0) =$$

není násobení (alchymie)

(vyřeším, pak $f(x_0)$ do každého čitatele přepíšu)

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot(x_1-x_1^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)\right)^k f(\underline{x}^0)$$

příklad pro $m=1$ a $n=2$:

$$f(x,y) = f(x^0,y^0) + \frac{\partial f(x^0,y^0)}{\partial x}\cdot(x-x^0) + \frac{\partial f(x^0,y^0)}{\partial y}\cdot(y-y^0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot(x-x^0) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot(y-y^0)\right)^2 f(\xi,\eta)}_{\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial x^2}\cdot(x-x^0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial x\,\partial y}\cdot(x-x^0)\cdot(y-y^0) + \frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial y^2}\cdot(y-y_0)^2}$$