EXTRÉMY FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

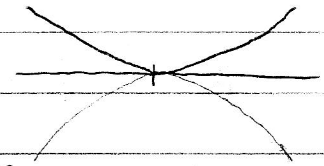
Def.: (lokální extrém) - viz. DoDo, def 6.1 / str. 64

V Nechť $x^0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ je bodem lokálního extrému fce $f(x_1, \dots, x_n) =: f(x)$ a nechť pro nějaké $1 \le i \le n$ existuje $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$.

Pak $\boxed{\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0}$.

Důsledek:

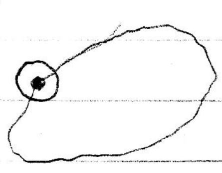
Má-li $f(x)$ v x^0 lokální extrém a existují všechny parc. derivace $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$ pro $i = 1, \dots, n$, pak jsou vždy nulové. Bod s touto vlastností se nazývá stacionární.



Zejména $\frac{\partial f(x^0)}{\partial u} = 0$ v libovolném směru $u = [u_1, \dots, u_n]$, pokud tato směrová derivace existuje (k tomu stačí ex. $df(x^0)$)

Pozn.:

Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech a nebo v bodech, kde některá parc. derivace neexistuje. Mezi takové body patří i body na hranici def. oboru fce (ale musím je vyšetřit zvlášť, neboť část okolí tam nepatří)



Důsledek:

Je-li x^0 stacionární bod a $f(x)$ je diferencovatelná v bodě x^0, pak:

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}}_{=0} dx_i = 0$$

$\boxed{V}$ Nechť funkce $y = f(\underline{x}) := f(x_1, \dots, x_n)$ má v otevřené množině M spojité všechny parc. derivace 2. řádu (tj. f je diferencovatelná až do řádu 2 včetně).
Nechť $\underline{x}^0 \in M$ je stacionární bod fce f.

K existenci lokálního extrému fce $f(\underline{x})$ v bodě $\underline{x}^0$ stačí, aby:

$$d^2 f(\underline{x}^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 \cdot f(\underline{x}^0) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_n^2} dx_n^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot dx_i\, dx_j ,$$

byl definitní (tj. positivně nebo negativně) kvadratickou formou.

Je-li $d^2 f(\underline{x}^0)$ positivně definitní $\Rightarrow$ v $\underline{x}^0$ je ostré lokální minimum!
Je-li $d^2 f(\underline{x}^0)$ negativně definitní $\Rightarrow$ —— " —— maximum!
Je-li $d^2 f(\underline{x}^0)$ semidefinitní (tj. poz. nebo neg.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ v $\underline{x}^0$ může, ale nemusí být lok. minimum nebo maximum!
Je-li indefinitní (ani poz. semid., ani neg. semid.) $\Rightarrow$ v $\underline{x}^0$ není lok. extrém!

Pozn.: $d^2 f(\underline{x}^0) \geq 0$ / ≤ 0 pro $\forall\, dx_i$ příslušný ... positivně / negativně semidefinitní

Jestliže navíc $d^2 f(\underline{x}^0) > 0$ / < 0 pro $\forall\, dx_i$ (z nichž alespoň jedno je nenulové) positivně / negativně definitní

Označíme $H = \left[\dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & \dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$, pak H je symetrická, neboť $\frac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_j \partial x_i}$

a nazývá se Hessovou maticí (Hessian).

Pak $d^2 f(\underline{x}^0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j = \langle H \cdot d\underline{x}, d\underline{x} \rangle = (d\underline{x})^T \cdot (H \cdot d\underline{x})$,

sloupcový vektor

kde $d\underline{x} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$.

(Oprava skript:)
př.: DoDo / str. 72 / př. 6.5 , $u_{xy} = -2$

$H = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, ... $-4\,dx\,dz - 4\,dy\,dz = d^2u$ $\Big\} \rightarrow$ 1

Pozn:
Rozhodnutí o typu lok. extrému vyžaduje rozhodnout o definitnosti kvadr. formy $d^2 f(\underline{x}_0)$, neboli rozhodnout o definitnosti Hessovy matice H.

2 postupy:

a) spočteme vlastní čísla $\lambda_1, .., \lambda_n$ matice H

Jelikož H je symetrická matice, tak $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

$\lambda_i \begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix} 0 \quad \forall i = 1, .., n \Rightarrow$ H je
- positivně definitní
- positivně semidef. (některé $\lambda_i = 0$)
- negativně definitní
- negativně semidef. (některé $\lambda_i = 0$)

$[\lambda_1, .., \lambda_n] = \boxed{\text{eig}(H)}$ ... v Matlabu vl. čísla

$\exists\, i, j,\ i \neq j : \lambda_i > 0,\ \lambda_j < 0$ ... H je indefinitní b, <u>Jacobiho determinantová metoda</u>

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \dots & & h_{nn} \end{bmatrix}$$

... spočteme <u>n-hlavních minorů</u>, tj. determinantů h_{11}, $\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$, ..., $|H|$

Pokud jsou všechny kladné $\Rightarrow$ H je pozitivně definitní.
Pokud střídají znaménko počínaje $h_{11} < 0 \Rightarrow$ H je negativně definitní.

Pokud jsou všechny kladné až do jisté pozice, odkud až jsou nulové $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ H je pozitivně semidefinitní.

V ostatních případech indefinitní.

Z Jacobiho kriteria plyne násl. věta pro případ $n = 2$, tj. pro fci $z = f(x, y)$.

$\boxed{V}$ nechť $z = f(x, y)$ má ve stac. bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parc. derivace až do řádu 2 včetně, pak:

$$H = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$$ a platí:

a, $z_{xx} > 0$, $|H| = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy}^2 > 0 \Rightarrow$ v $[x_0, y_0]$ je ostré lok. minimum

b, $z_{xx} < 0$, $|H| =$ —— " —— $> 0 \Rightarrow$ —— " —— lok. maximum

c, $|H| =$ —— " —— $< 0 \Rightarrow$ v $[x_0, y_0]$ není lok. extrém
d, $|H| =$ —— " —— $= 0 \Rightarrow$ v $[x_0, y_0]$ může a nemusí být extrém

Př.: DoDo / str. 68 / 6.2
str. 72 / 6.5 (chyba) viz dříve

1

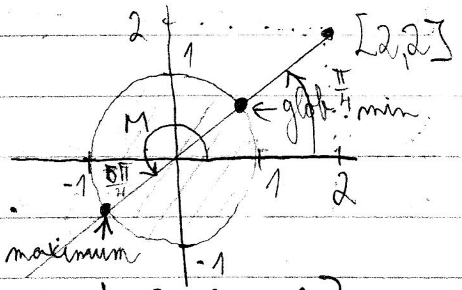
Def.: nechť $f(x)$ je def. na množině M

$\exists$-li takový bod $x^0 \in M$: $\left\langle \begin{array}{l} f(x) \geq f(x^0) \\ f(x) \leq f(x^0) \end{array} \right.$ $\forall\, x \in M$,

pak říkáme, že f nabývá na M absolutního (globálního) $\left\langle \begin{array}{l} \text{minima} \\ \text{maxima} \end{array} \right.$

$\boxed{V}$ Je-li v předchozí def. M kompaktní množina a je-li f na ní spojitá, pak f nabývá svých absolutních extrémů buď ve vnitřních stac. bodech množiny M nebo v bodech ležících na hranici množ. M.

Př.: (77|6.7 i,)



Najděte globální maximum a minimum fce.

$$f(x,y) = \underbrace{x^2-4x}_{=(x-2)^2-4} + \underbrace{y^2-4y}_{=(y-2)^2-4} + 10 \quad \text{na } M := \{[x,y] \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$= \underbrace{(x-2)^2+(y-2)^2}+2$$

$$= \|[x,y]-[2,2]\|^2 + 2$$

Analytické řešení:

1. stacionární body: $\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x-4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ f'_y = 2y-4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right\}$ $[2,2] \notin M$ (není) "? kompaktní množina ?"

$\Rightarrow$ tedy globální extrém nemůže nastat uvnitř M.

2. Tedy globální extrém může být jen na hranici M, což je jednotková kružnice s param. vyj. $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

3. dosadím:

$$F(\varphi) := f(x(\varphi), y(\varphi)) = (\cos\varphi - 2)^2 + (\sin\varphi - 2)^2 + 2$$

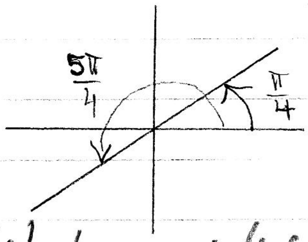
$$4_{,}\; F'(\varphi) = \cancel{2}\cdot(\cos\varphi-2)\cdot(-\sin\varphi)+\cancel{2}\cdot(\sin\varphi-2)\cdot\cos\varphi \;\cancel{=0} \Rightarrow$$

$$= 4\sin\varphi - 4\cos\varphi$$

$$\Rightarrow 0 = \cancel{4}\sin\varphi - \cancel{4}\cos\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\varphi = \cos\varphi \Leftrightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 1$$



$$\operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \varphi = \left\langle \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} \end{array}\right. \quad \text{... stac. body}$$

$$F''(\varphi) = 4\cdot\cos\varphi + 4\cdot\sin\varphi = \left\langle \begin{array}{l} 4\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right) = 4\sqrt2 > 0 \text{ ... ostr. lok. min.} \\ 4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\right) = -4\sqrt2 < 0 \text{ — " — max.} \end{array}\right.$$

Rozšíření difer. počtu na vektorové fce $R^n \to R^m$

(viz DoDo kap. 7)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underline{x}} \xrightarrow{\underline{F}} \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

f_i ... souřadnicové fce vektor. zobrazení $\underline{F}$.

Pojmy dif. počtu se přenáší po složkách, tj. např.:

$\underline{F}$ je spojitá v $\underline{x}^0 \Leftrightarrow f_i(\underline{x})$ jsou spojité v $\underline{x}^0$ $\forall i = 1,..,m$

$\underline{F}$ je diferencovatelná v $\underline{x}^0 \Leftrightarrow f_i(\underline{x})$ je diferenc. v $\underline{x}^0$ $\forall i = 1,..,m$

atd.

Diferenciál

$$d\underline{F}(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} df_1(\underline{x}^0) \\ \vdots \\ df_m(\underline{x}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x}^0)}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1(\underline{x}^0)}{\partial x_n}\cdot dx_n \\ \frac{\partial f_i(\underline{x}^0)}{\partial x_1}\, dx_1 + \vdots + \frac{\partial f_i(\underline{x}^0)}{\partial x_n}\cdot dx_n \\ \frac{\partial f_m(\underline{x}^0)}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f_m(\underline{x}^0)}{\partial x_n}\cdot dx_n \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x}^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\underline{x}^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\underline{x}^0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\underline{x}^0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}}^{J \text{ ... } m\times n} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

(J .. Jacobiho matice)

$|J|$ .. jacobián

Označení:

$$J =: \frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(x_1,\dots,x_n)} =: \frac{D\underline{F}}{D\underline{x}} =: \underline{F}'(\underline{x}) \quad \dots \text{ matice } m\times n,$$

pak tedy $\underbrace{dF(\underline{x}^0)}_{m\times 1} = \underbrace{\underline{F}'(\underline{x}^0)}_{m\times n} \cdot \underbrace{d\underline{x}}_{n\times 1}$

Složení 2 vektorových zobrazení:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "\underline{G}\,\underline{F}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "G"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \overset{F}{\longmapsto} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}}_{=:\,\underline{y}} \overset{G}{\longmapsto} \begin{bmatrix} g_1(\underline{y}) \\ \vdots \\ g_k(\underline{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{g_1(\underbrace{f_1(\underline{x}),\dots,f_m(\underline{x})}_{\underline{y}})}^{\tilde{g}_i(\underline{x}) \text{ slož. fce}} \\ \vdots \\ \underbrace{g_k(f_1(\underline{x}),\dots,f_m(\underline{x}))}_{\tilde{g}_k(\underline{x})} \end{bmatrix}$$

(GF)

$$\Longrightarrow d(\underline{G}\underline{F}) = \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{g}_i(\underline{x})}{\partial x_j} \end{bmatrix}}^{(\underline{G}\underline{F})' = J(x)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}}_{d\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_i(\underline{y})}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial \overset{f_1}{y_1}(\underline{x})}{\partial x_j} + \dots + \dfrac{\partial g_i(\underline{y})}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial \overset{f_m}{y_m}(\underline{x})}{\partial x_j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

(i,j-tý prvek)

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial g_i(\underline{y})}{\partial y_r} \cdot \frac{\partial f_r(\underline{x})}{\partial x_j} \end{bmatrix}}_{} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}}_{d\underline{x}} = \underbrace{\underbrace{\underline{G}'(\underline{y})}_{k\times m} \cdot \underbrace{\underline{F}'(\underline{x})}_{m\times n}}_{k\times n} \cdot \underbrace{d\underline{x}}_{n\times 1} \Longrightarrow$$

porov. L a P strany

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_i(\underline{y})}{\partial y_r} \end{bmatrix}}^{G'(y)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_r(\underline{x})}{\partial x_j} \end{bmatrix}}^{F'(x)}$$

(i,r)-tý prvek (r,j)-tý prvek

„maticové násobení"

$$(\underline{G}\,\underline{F})' = \underline{G}'(\underline{y})\, \underline{F}'(\underline{x}) =$$

$$= \underline{G}'(\underline{F}(\underline{x}))\, \underline{F}'(\underline{x}).$$

Formálně odpovídá vzorci pro derivaci 1-d složené fce.

$$\Longrightarrow (\underline{G}\,\underline{F})' = \underline{G}'(\underline{y})\cdot \underline{F}'(\underline{x}) = \underline{G}'(\underline{F}(\underline{x}))\cdot \underline{F}'(\underline{x})$$

Diferenciální počet pro implicitně zadané fce (kap. 8)

$F(x_1,\dots,x_n,y)=0$ ... za vhodných podm. určuje implicitně zadanou fci $y=y(x_1,\dots,x_n)$; $n\in\mathbb{N}$

stručně:

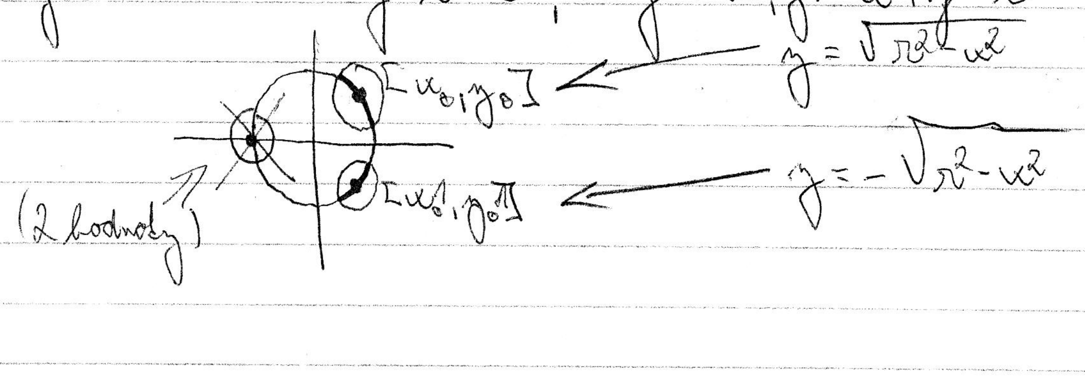
vektor

$F(\underline{x},y)=0 \rightsquigarrow y=y(\underline{x})$

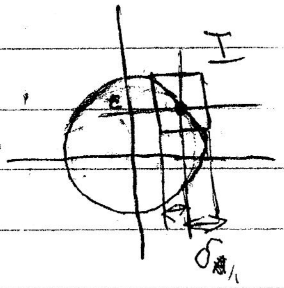
Obecně $y(\underline{x})$ se obtížně vyjadřuje explicitně tj. v závislosti na $\underline{x}$, přesto chceme počítat její derivace, diferenciály, atd.

Def.: Buď $F(\underline{x},y)$ funkce def. na množině I. Nechť $[\underline{x}^0,y^0]\in I$, pro nějž $F(\underline{x}^0,y^0)=0$.
Ex-li takové okolí $\mathcal{O}$ bodu $[\underline{x}^0,y^0]$, že body $[\underline{x},y]\in I\cap\mathcal{O}$ splňující $F(\underline{x},y)=0$ splývají s body $[\underline{x},y]$, pro něž $y=y(\underline{x})$, kde $y(\underline{x})$ je jistá fce, pak pravíme, že $F(\underline{x},y)=0$ je implicitním vyjádřením fce $y=y(\underline{x})$ v tomto okolí.

Př.: $n=1$; $x^2+y^2=r^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-r^2=0$, tedy $F(x,y)=x^2+y^2-r^2$



$\boxed{\text{V}}$ Věta o existenci implic. fce



nechť $F(\underline{x}, y)$ splňuje tyto předpoklady:

(1) F je definovaná a spojitá na kvádru $I = \{[\underline{x}, y] \mid$

$\mid \underline{x}^0 - \underline{\delta} \leq \underline{x} \leq \underline{x}^0 + \underline{\delta},\ y^0 - \varepsilon \leq y \leq y^0 + \varepsilon\} =$

$= [x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1] \times \ldots \times [x_n^0 - \delta_n, x_n^0 + \delta_n] \times [y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon]$
se středem v bodě $[\underline{x}^0, y^0]$.

(2) Platí $F(\underline{x}^0, y^0) = 0$

(3) Při pevném $\tilde{\underline{x}} \in$ kvádru $J = [\underline{x}^0 - \underline{\delta}, \underline{x}^0 + \underline{\delta}] = \{\underline{x} \mid \underline{x}^0 - \underline{\delta} \leq \underline{x} \leq \underline{x}^0 + \underline{\delta}\}$
je fce $F(\tilde{\underline{x}}, y)$ ryze monotónní (vzhledem k y) na $[y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon]$

Pak platí:
a, Existuje takové okolí bodu $[\underline{x}^0, y^0]$, že v něm rovnice $F(\underline{x}, y) = 0$
je implic. vyjádřením jisté fce $y = y(\underline{x})$.

b, $y(\underline{x}^0) = y^0$
c, Funkce $y = y(\underline{x})$ je v tomto okolí spojitá

Důsledek:
Podmínku (3) lze nahradit silnější podmínkou:
(3') V bodě $[\underline{x}^0, y^0]$ existuje spojitá derivace $\dfrac{\partial F(\underline{x}^0, y^0)}{\partial y} \neq 0$.

D: $\dfrac{\partial F(\underline{x}^0, y^0)}{\partial y} \neq 0$ spojitá v $[\underline{x}^0, y^0] \Rightarrow \dfrac{\partial F(\underline{x}, y)}{\partial y}$ je v nějakém okolí (= I bez újmy na obec.)
bodu $[\underline{x}^0, y^0]$ definovaná a je zde buď kladná nebo záporná; $\forall$
pro $[\tilde{\underline{x}}, y] \in I$ je $F(\tilde{\underline{x}}, y)$ ryze monotónní dle Doku. Důsl. 6.4/114, což je (3).

Jestliže (3) nahradíme ještě silnější podmínkou než (3'), pak platí věta

$\boxed{V}$ Splňuje-li F podmínky (1), (2) a podmínku:

(3'') Funkce F má na I spojité všechny parciální derivace

$$\frac{\partial F(\underline{x}, y)}{\partial x_i} \text{ pro } i = 1, \dots, n \quad a \quad \frac{\partial F(\underline{x}, y)}{\partial y}, \text{ přičemž } \frac{\partial F(\underline{x}^0, y^0)}{\partial y} \neq 0.$$

Pak $y = y(\underline{x})$ má vlastnosti a) až c) a navíc v okolí ad a) též spojité všechny parc. der.

$y'_{x_i} = \frac{\partial (y(\underline{x}))}{\partial x_i}$ pro $i = 1, \dots, n$, které se dají spočíst ze vztahu

$$\boxed{y'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(\underline{x}, y)}{F'_y(\underline{x}, y)}} \quad (*)$$

Pozn.:

(1) Vztah $(*)$ lze snadno odvodit takto:

$F(x_1, \dots, x_n, y(x_1, \dots, x_n)) = 0$ ... konst. fce v okolí bodu $\underline{x}^0$.

- derivováním dle x_i:

$$\underbrace{F'_{x_i}(\overbrace{x_1, \dots, x_n}^{\underline{x}}, y(x_1, \dots, x_n))}_{\text{užitím pravidel der. slož. fcí}} = 0_{x_i} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial F(\underline{x}, y)}{\partial x_i}}_{F_{x_i}(\underline{x}, y)} + \underbrace{\frac{\partial F_y(\underline{x}, y)}{\partial y}}_{F_y(\underline{x}, y)} \cdot y'_{x_i}(\underline{x}) = 0 \Rightarrow y'_{x_i}(x) = -\frac{F_{x_i}(\underline{x}, y)}{F_y(\underline{x}, y)}$$

(2) Splňuje-li $F(\underline{x}, y)$ v předchozí větě předpoklady (1), (2), (3") a navíc má spojité parc. der. až do řádu k, pak rovněž implic. fce $y = y(\underline{x})$ má v okolí až ε spojité parc. der. až do řádu k, které vypočteme formálním derivováním výrazu $(*)$, v němž $y = y(\underline{x})$

Př.: $n = 1$, tj. máme $F(x, y) = 0$, což určuje impl. fci $y = y(x)$

Vztah $(*)$ získáme derivováním $F(x, y(x)) \equiv 0$; tj.

$$F'_x + F'_y \cdot y'(x) = 0 \implies y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))} \quad \left(= -\frac{F'_x}{F'_y} \right)$$

Odtud

$$y''(x) = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy}\, y') \cdot F'_y - F'_x \cdot (F''_{yx} + F''_{yy}\, y')}{(F'_y)^2}$$

po dosazení $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ a úpravě

$$y''(x) = \frac{2 \cdot F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - (F''_{xx} \cdot F'^2_y + F''_{xy} \cdot F'^2_x)}{(F'_y)^3}$$

Předpokládejme nyní, že F je ~~m~~-rozměrná vektorová fce, tj. implic. vyjádření bude z m-rovnic:

$$\underbrace{\begin{matrix} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\underline{x}}, \underbrace{y_1, \dots, y_m}_{\underline{y}}) = 0 \end{matrix}}_{\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}}$$

, které určují implicitní vektorovou fci $\begin{bmatrix} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} =: \underline{y}(\underline{x})$

$\underline{x}$ ... volné proměnné

$\underline{y}$ ... vázané proměnné

$$y''(x) = -\frac{\left(F_{xx} + F_{xy}\cdot\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\right)\cdot F_y - F_x\left(F_{yx} + F_{yy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\right)}{F_y^2}$$

$$= \frac{-F_{xx}\cdot F_y^2 + F_{xy} F_x\cdot F_y + F_x\cdot F_{yx}\cdot F_y - F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}$$

$$= \frac{2\cdot F_x\cdot F_y F_{xy} - \left(F_{xx} F_y^2 + F_{yy} F_x^2\right)}{F_y^3}$$

<u>Představa</u>: z m-té rovnice: $y_m = y_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1})$

- tuto dosadíme do zbývajících rovnic: dostaneme $m-1$ rovnic závislých na $x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_{m-1}$.
- z posledn. z nich vyjádřením y_{m-1} analogicky, … atd.

Platí analogická věta jako v předchozím případě:

$\boxed{V}$ nechť $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$ splňují tyto předpoklady:

(1) $F_i(\underline{x}, \underline{y})$ pro $i = 1, \dots, m$ jsou definovány a spojité na kvádru $I = \{ \underbrace{[\underline{x}, \underline{y}]}_{(n+m)\text{ dimenz. vektor}} \mid \underline{x}^0 - \underline{\delta} \leq \underline{x} \leq \underline{x}^0 + \underline{\delta},\ \underline{y}^0 - \underline{\varepsilon} \leq \underline{y} \leq \underline{y}^0 + \underline{\varepsilon} \}$ se středem v bodě $P_0 = [\underbrace{x_1^0, \dots, x_n^0}_{\underline{x}^0}, \underbrace{y_1^0, \dots, y_m^0}_{\underline{y}^0}]$.

(2) $F_1(P_0) = 0, \dots, F_m(P_0) = 0$
(neboli $\underline{F}(\underline{x}^0, \underline{y}^0) = \underline{0}$)

(3'') $F_1, \dots, F_m$ mají na I spoj. parc. der. 1. řádu, přičemž

$\underbrace{|\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}^0, \underline{y}^0)|}_{\text{jacobián = det}} \neq 0$, kde $\underline{F}'_{\underline{y}}(\underline{x}^0, \underline{y}^0) =$

$$= \frac{D\underline{F}(\underline{x}^0, \underline{y}^0)}{D(\underline{y})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \text{ v bodě } [\underline{x}^0, \underline{y}^0].$$

<u>Pak platí</u>:

a) $\exists\, O(P_0)$, v němž systém $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$ def. vektr. fci $\underline{y} = \underline{y}(\underline{x})$.

b) Platí $\underline{y}(\underline{x}^0) = \underline{y}^0$, tj. po složkách $y_1(\underbrace{x_1^0, \dots, x_n^0}_{\underline{x}^0}) = y_1^0, \dots, y_m(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_m^0$

c) Fce $y_1(\underline{x}^0), \ldots, y_m(\underline{x}^0)$ jsou v okolí ad a) spojité a mají v tomto okolí spojité všechny parc. der. 1. řádu, přičemž pro odpovídající Jacobiho matici platí:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\substack{y'_{\underline{x}} \\ m \times n}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1}}_{\substack{(F'_{\underline{y}})^{-1} \\ m \times m}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\substack{F'_{\underline{x}} \\ m \times n}} \qquad (**)$$

- vztah (**) odpovídá řešení maticové rovnice:

$$F'_{\underline{y}} \cdot \underbrace{y'_{\underline{x}}}_{\text{neznámé}} = -\underbrace{F'_{\underline{y}} \cdot (F'_{\underline{y}})^{-1}}_{I_m} \cdot F'_{\underline{x}} = -F'_{\underline{x}}$$

- tuto maticovou rovnici můžeme řešit jako u systému lin. rovnic, když za $y'_{\underline{x}}$ a za $F'_{\underline{x}}$ bereme postupně všechny sloupce.

Př.:
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= b^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 &= c^3 \end{aligned}$$
; $m = 3$; $\underline{y} = [y, z, u]$ ... zvolím
; $n = 1$; $\underline{x} = [x]$

Hledáme vekt. fci ... $\begin{bmatrix} y(x) \\ z(x) \\ u(x) \end{bmatrix} =: \underline{y}(x)$

Rovnice zderivujeme dle x jako složenou fci:

$$\left.\begin{aligned} 1 + y' + z' + u' &= 0 \\ 2x + 2y \cdot y' + 2z \cdot z' + 2u \cdot u' &= 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \cdot y' + 3z^2 \cdot z' + 3u^2 \cdot u' &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y' + z' + u' &= -1 \\ 2y \cdot y' + 2z \cdot z' + 2u \cdot u' &= -2x \\ 3y^2 \cdot y' + 3z^2 \cdot z' + 3u^2 \cdot u' &= -3x^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & 2z & 2u \\ 3y^2 & 3z^2 & 3u^2 \end{bmatrix}}_{F'_y} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} y' \\ z' \\ u' \end{bmatrix}}_{y'_x} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix}}_{F'_x} \Longleftrightarrow (**)$$

<u>Oprava chyby</u>: DoDo, př.: 8.5 i,) 104 ... v bodě $[2,0,0]$