VÁZANÉ EXTRÉMY

Uvažujeme fci $z = f(x_1, \dots, x_N)$, kde $x_1, \dots, x_N$ jsou vázány podmínkami:

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1(x_1, \dots, x_N) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad , \text{ kde } 1 \le m \le N \\ \phi_m(x_1, \dots, x_N) = 0 \end{array}\right\} \text{ označme (V)}$$

↳ vazební podm.

<u>Def.</u>: Řekneme, že v bodě $P_0 = [x_1^0, \dots, x_N^0]$, pro nějž platí podmínky (V), tj. $\phi_1(P_0) = 0, \dots, \phi_m(P_0) = 0$, má fce $z = f(x_1, \dots, x_N)$ vázaný (lokální) extrém (tj. vázané maximum nebo minimum) jestliže platí $f(P) \le f(P_0)$ nebo $f(P) \ge f(P_0)$ v nějakém okolí bodu P_0 a to pro všechny body P tohoto okolí rovněž splňující podmínky (V), tj. $\phi_1(P) = 0, \dots, \phi_m(P) = 0$.

<u>Pozn.</u>: Hledání extrému fce f vázaného podm. (V), tedy koresponduje s hledáním lokálního extrému fce f na množině $M = \{P \mid \phi_1(P) = 0, \dots, \phi_m(P) = 0\}$. Každá z rovnic reprezentuje v $\mathbb{R}^N$ $(N-1)$-rozměrnou plochu, takže M je vlastně průnikem těchto ploch.

např.: $N=2$, $m=1$: $z=f(x,y)$; $\phi_1(x,y)=0$

Rovnice $\phi_1(x,y)=0$ určuje např. implicitně zadanou fci (křivku) $y(x)$, takže hledáme extrémy f pouze na této křivce, tj. extrémy fce $f(x,y(x))$

$N=3$, $m=2$: $z=f(x_1,x_2,x_3)$

$$\phi_1(x_1,x_2,x_3)=0$$
$$\phi_2(x_1,x_2,x_3)=0$$

kde např. 1. rovnice určuje implicitní zadání plochy $x_3=y_1(x_1,x_2)$ a 2. rovnice impl. zad. plochy $x_3=y_2(x_1,x_2)$ v $\mathbb{R}^3$, jejichž průnikem je křivka v $\mathbb{R}^3$, tj. opět hledáme extrém 1-rozměrné fce f na této křivce.

V* (viz DoDo IV 9.1) (*)

nechť fce $f, \phi_1, \dots, \phi_m$, $1 \leq m \leq N$ mají spojité parc. derivace na otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}^N$ a nechť v každém bodě množiny U má Jacobiho matice hodnost m.

$$J := \frac{D(\phi_1, \dots, \phi_m)}{D(x_1, \dots, x_N)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

Buď M množina všech bodů $[x_1, \dots, x_N] \in U$, které vyhovují rovnicím (V). Pak m proměnných z $x_1, \dots, x_N$ je vázaných (bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že jsou to proměnné $y_1 := x_{n+1}, \dots, y_m = x_{n+m}$, kde $n = N-m$ je počet zbývajících volných proměnných) a každý vázaný extrém P_0 fce $z = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ je obyčejným extrémem fce n volných proměnných $f(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$.

Je-li P_0 ext., pak $\exists$ $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (závislé na P_0) splňující

$$f'_{x_j}(P_0) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \phi_k(P_0)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{pro } j = 1, \dots, N. \qquad (LR)$$

Lagrangeovy multiplikátory

Důkaz: I. Jestliže J má hodnost m na U, pak v J musí existovat m lineárně nezávislých sloupců. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to posledních m sloupců (pokud tomu tak není, můžeme vždy proměnné přeindexovat tak, aby tomu tak bylo).

Těmto sloupcům pak odpovídají proměnné $x_{n+1}=y_1, \dots, x_{n+m}=y_m$, přičemž Jacobiho submatice:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n+1}}, & \dots, & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_{n+1}}, & \dots, & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{bmatrix}$$

$\partial y_1 \qquad \partial y_m$

je regulární (det (= jacobián) $\neq 0$). Jsou tedy dle poslední věty z předchozí kapitoly splněny podm. pro to, aby ve vhodném okolí každého bodu U podm. (V) určovaly implicitní vektorovou fci

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_m = y_m(x_1, \dots, x_m)$$

, tj. tato fce je určena na celé množině U.

Hledání vázaného extrému fce f se tedy redukuje na hledání na U obyčejného extrému fce $f(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$ ■

II. V dalším budeme tedy předpokládat $|\tilde{J}| \neq 0$.

Podle věty citované v důkazu, část tvrzení c, platí:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{y'_x} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial \phi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial \phi_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1}}_{(\Phi'_y)^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\Phi'_x} \quad (**)$$

kde $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ jsou spojité v $O(P_0)$ každého vybraného P_0.

Hledané koeficienty λ_K jsou pak po jednoznačně určeny posledními m rovnicemi v (LR), vskutku:

$$f'_{x_j}(P_0) - \sum_{K=1}^{m} \lambda_K \frac{\partial \Phi_K(P_0)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{pro } j = n+1, \dots, N, \text{ tj.}$$

$$f'_{y_i}(P_0) - \sum_{K=1}^{m} \lambda_K \frac{\partial \Phi_K(P_0)}{\partial y_i} = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, m,$$ jejichž

maticový zápis je $[\lambda_1, \dots, \lambda_K] \cdot \underline{\Phi}'_y = [f'_{y_1}, \dots, f'_{y_m}]$ a tedy

$$[\lambda_1, \dots, \lambda_K] = [f'_{y_1}, \dots, f'_{y_m}] \cdot \underline{\Phi}'^{-1}_{y} \qquad \text{(LM)}$$

Zbývá ověřit, že $[\lambda_1, \dots, \lambda_K]$ splňují rovnice (LR) i pro $j = 1, \dots, n$: $f(x_1, \dots, x_n)$ má spojité parc. derivace $\Rightarrow$ viz větu v kap. o derivování slož. fcí (před 'derivací ve směru') $\Rightarrow$ složená funkce

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) =: g(x_1, \dots, x_n)$$

má rovněž spojité všechny parciální derivace a v P_0 platí (Po musí být stac. bod – viz $\boxed{V}$ na zač. kapitoly o extrémech)

$$0 = g'_{x_j} = f'_{x_j} + \sum_{K=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_K} \frac{\partial y_K}{\partial x_j} \quad \text{pro } j = 1, \dots, n;$$ neboli maticově:

$$\underline{0} = [f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}] + [f'_{y_1}, \dots, f'_{y_m}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \overset{(**)}{=}$$

$$= [f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}] - [f'_{y_1}, \dots, f'_{y_m}] (\underline{\Phi}'_y)^{-1} \cdot \underline{\Phi}'_x \overset{(LM)}{=} \qquad (+)$$

$$= [f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}] - [\lambda_1, \dots, \lambda_K] \underline{\Phi}'_x,$$ což po rozepsání po složkách dává

$$0 = f'_{x_j} - \sum_{K=1}^{m} \lambda_K \frac{\partial \Phi_K}{\partial x_j} \quad \text{pro } j = 1, \dots, n$$

$\boxed{\text{metody zjišťování vázaného extrému}}$

Extrémy budeme hledat ve stac. bodech složené fce
$f(x_1,\dots,x_n, y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_m(x_1,\dots,x_n)) =: f(x, y(x))$.
Pro určení stac. bodů můžeme použít každou z následujících 2 metod:

I. metoda

a, existují explicitní vyjádření vázaných proměnných, tj. známe

$$x_{n+1} = y_1(x_1,\dots,x_n)$$
$$\vdots$$
$$x_{n+m} = y_m(x_1,\dots,x_n)$$

- řešíme tedy rovnice:

$$\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x_n} = 0 \qquad \text{neboli}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{x_1} + f'_{y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + f'_{y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_1} &= 0 \\ &\vdots \\ f'_{x_n} + f'_{y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \dots + f'_{y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (***)$$

To je
n rovnic pro n neznámých $x_1,\dots,x_n$; až je nalezneme, tak dopočítáme vázané proměnné $x_{n+1} = y_1(x_1,\dots,x_n),\dots, x_{n+m} = y_m(x_1,\dots,x_n)$

b, explicitní fce $y_1,\dots,y_m$ nejsou známy:

- opět ~~mozajme~~ užijeme $(***)$, kde za $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ dosadíme z $(**)$.

Jako při úpravě na vztah $(+)$ na konci důkazu V^*
n rovnic ze vztahu $(+)$ doplníme m rovnicemi $\Phi_1(x_1,\dots,x_N)=0$
$\vdots$
$\Phi_m(x_1,\dots,x_N)=0$

čímž celkem dostaneme $N=n+m$ rovnic, pro N neznámých $x_1,\dots,x_N$ určujících stacionární body.

Při ručním počítání v případě b, můžeme formálně postupovat takto:

Vazaný $\hat{y}$ určíme nalezením sloupcové báze Jacob. m.]

① $\underline{df = 0}$ $\quad [f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}] \cdot d\underline{x} + [f'_{y_1}, \dots, f'_{y_m}]\, d\underline{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0.$$

Vzhledem k větě o invariantnosti diferenciálu, je nutno $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ chápat jako závislé na $dx_1, \dots, dx_n$.

② Diferencujeme vazebné podmínky:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} dx_n}_{\phi'_{\underline{x}}\, d\underline{x}} + \underbrace{\frac{\partial \phi_m}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \dots + \frac{\partial \phi_m}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m}}_{\phi'_{\underline{y}}\, d\underline{y}} = 0$$

Tento systém vyřešíme vzhledem k $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ ($= dy_1, \dots, = dy_m$),

tj. řešíme

$$\underline{\phi}'_{\underline{y}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{dy_1}{dx_{n+1}} \\ \vdots \\ dx_{n+m} \end{bmatrix}}_{d\underline{y}} = -\,\underline{\phi}'_{\underline{x}} \underbrace{\begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}}_{d\underline{x}}$$

$\Downarrow$

$$d\underline{y} = -(\underline{\phi}'_{\underline{y}})^{-1} \cdot \underline{\phi}'_{\underline{x}}\, d\underline{x}$$

$$\underbrace{[A_1, \dots, A_n] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_n \end{bmatrix}}$$

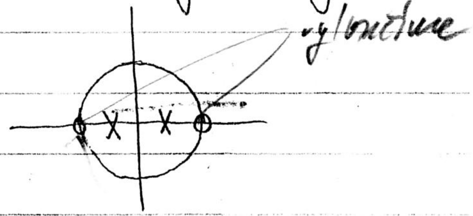
Po dosazení do ① dostaneme výraz typu $A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0$,
kde $[A_1, \dots, A_n] d\underline{x} = \{[f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}] - [f'_{y_1}, \dots, f'_{y_m}](\phi'_{\underline{y}})^{-1} \phi'_{\underline{x}}\} d\underline{x}$

kde řešíme rovnice $A_1 = 0, \dots, A_n = 0$ $\quad$ = totéž jako (7)

$$\phi_1 = 0, \dots, \phi_m = 0.$$

<u>Př.:</u> Najděte vázané extrémy fce $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ s vazebnou podmínkou $x^2 + y^2 = 1$ (kružnice); (y vázané, x volné); $\Rightarrow \phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Jacobián $|\phi'_y| = |[2y]| \neq 0 \iff \underline{y \neq 0}$.



$dz = \frac{1}{a} \cdot dx + \frac{1}{b} dy \longrightarrow$ vázaná

$d\phi = 2x \cdot dx + 2y \cdot dy = 0 \implies \underline{dy = -\frac{x}{y} dx}$; dosadím do dz:

$$0 = \frac{1}{a} dx - \frac{1}{b} \cdot \frac{x}{y} dx = \underbrace{\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{by}\right)}_{A_1 = \frac{\partial\left(\frac{x}{a} + \frac{y(x)}{b}\right)}{\partial x}} \cdot dx = 0$$

Máme rovnice: $\frac{1}{a} - \frac{x}{by} = 0$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

z 1. rovnice $\frac{1}{a} = \frac{x}{by} \implies a = \frac{by}{x} \implies \boxed{y = \frac{ax}{b}} \xrightarrow{\text{do 2. rovnice}}$

$$\implies x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = 1 \iff x^2 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)}_{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = 1 \implies x_{1,2} = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \implies$$

$$\implies y_{1,2} = \pm \frac{\frac{a \cdot \cancel{b}}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\cancel{b}} = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

<u>Dva stac. body:</u> $P_1 = \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$ $P_2 = \left[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

Typ extrému určíme z d^2z:

$$d^2z = 0 \cdot dx^2 + 0 \cdot \underset{\uparrow\, \frac{x^2}{y^2} dx^2}{dy^2} + 2 \cdot 0 \cdot dx \underset{\uparrow\, -\frac{x}{y} dx}{dy} = \underbrace{\left(0 + 0 \cdot \frac{x^2}{y^2} - 2 \cdot 0 \cdot \frac{x}{y}\right)}_{=0} dx^2$$

$= 0$ ... pozitivně semidefinitní (extrém může a nemusí být)

II. metoda Lagrangeových multiplikátorů

- položíme $F = f + \lambda_1 \phi_1 + \ldots + \lambda_m \phi_m$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ → pomocné proměnné =: Lagrangeovy multiplikátory

$F \to F(x_1, \ldots, x_{\underbrace{n+m}_{N}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

- tedy F je funkce $n + 2m$ proměnných.

$\boxed{V}$ Hledání vázaného extrému fce f je ekvivalentní s hledáním obyčejného extrému fce F za předpokladu věty $\boxed{V*}$ (začátek 4. kapitoly)

<u>Důkaz</u>: Je-li P_0 extrém fce F, pak musí být ve stac. bodě:

tj.:
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = f'_{x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \phi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{n+m}} = f'_{x_{n+m}} + \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_{n+m}} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \phi_m}{\partial x_{n+m}} = 0 \end{array}\right\} \text{což jsou rovnice (LR) z věty V*}$$

$$(V) \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \phi_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \phi_m = 0 \end{array}\right.$$

(celá soustava výše: $(****)$)

Vyšetřujeme chování F v okolí P_0: $\Delta F(P_0) = F(P) - F(P_0) =$

$$= f(P) - f(P_0) + \lambda_1 (\underbrace{\phi_1(P)}_{=0} - \underbrace{\phi_1(P_0)}_{=0}) + \ldots + \lambda_m (\underbrace{\phi_m(P)}_{=0} - \underbrace{\phi_m(P_0)}_{=0}) =$$

$$= \underline{\underline{f(P) - f(P_0)}}$$

Tedy přírůstky F a fce f splňující (V) se chovají stejně.
Tudíž obě fce mohou mít lok. extrém pouze ve stejných bodech

Algoritmus

① Najdeme všechny stac. body fce F vyřešením systému (****) $n+2m$ rovnic o $n+2m$ neznámých $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Při řešení postupujeme jako v důkazu V*, 7, nejprve z posledních m rovnic spočteme $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Ty dosadíme do prvních n rovnic, které vyřešíme spolu s $\Phi_1(\underline{x}) = 0, \dots, \Phi_m(\underline{x}) = 0$, což dá opět $N = n+m$ rovnic pro $x_1, \dots, x_N$.

② Pokud $f, \Phi_1, \dots, \Phi_m$ (a tedy i F) mají spojité parc. derivace až do řádu 2, provedeme klasifikaci těchto stac. bodů z hlediska typu případného extrému vyšetřením d^2F v závislosti na $dx_1, \dots, dx_n$:

nechť $P_0 = [x_1^0, \dots, x_{n+m}^0, \lambda_1, \dots, \lambda_m]$ je nějaký stac. bod F nalezený v kroku ①.

$$d^2F(P_0) = \sum_{i,j=1}^{n+m} a_{ij} \, dx_i \, dx_j$$

$\to$ závisí na $x_1^0, \dots, x_{n+m}^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$

dx_i, dx_j nejsou nezávislé a musí splňovat rovnice získané diferencováním vazebných podmínek podobně jako v kroku ② u metody I.

Z těchto rovnic opět vyjádříme $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ jako lineární fce nezávislých přírůstků $dx_1, \dots, dx_n$.
Po jejich dosazení do $d^2F(P_0)$ tato forma přejde v kvadr. formu pouze v proměnných $dx_1, \dots, dx_n$.
Určením její definitnosti rozhodneme o extrému.

Příklad

(1) Předcházející příklad spočteme nyní Lagrangeovou metodou:

$$F = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{a} + 2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2a\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2b\lambda}$$

$$x^2+y^2=1$$

$$\frac{1}{4a^2\lambda^2} + \frac{1}{4b^2\lambda^2} = 1, \qquad \frac{a^2+b^2}{4a^2b^2\lambda^2} = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$$

$$x_{1,2} = \mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$y_{1,2} = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0$$

$$d^2F = 2\lambda\,[dx^2+dy^2]$$

$$d^2F(P_1) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}[dx^2+dy^2], \quad P_1 \text{ je bod min.}$$

$$d^2F(P_2) = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}[dx^2+dy^2], \quad P_2 \text{ je bod max.}$$

(2) Určete vázané extrémy funkce $u = x \cdot y \cdot z$ za podmínek
$x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

$$F = x \cdot y \cdot z + \lambda(x^2+y^2+z^2-1) + \mu(x+y+z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cdot z + 2\lambda x + \mu = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot z + 2\lambda y + \mu = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu = 0$$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$x+y+z=0$$

$$y \cdot z + 2\lambda x = -\mu$$

$$x \cdot z + 2\lambda y = -\mu$$

$$xy + 2\lambda z = -\mu$$

$$\boxed{yz + 2\lambda x = xz + 2\lambda y} = xy + 2\lambda z$$

$$(y-x)z + 2\lambda(x-y) = 0$$

$$\underline{(y-x) \cdot (z-2\lambda) = 0}$$

$$(z-y) \cdot x + 2\lambda(y-z) = 0$$

$$\underline{(z-y) \cdot (x-2\lambda) = 0}$$

$$(z-x) \cdot y + 2\lambda(x-z) = 0$$

$$\underline{(z-x) \cdot (y-2\lambda) = 0}$$

I. Jestliže 1. závorka se nuluje ve 2 případech, pak
$\underline{x=y=z}$; z poslední vaz. podmínky
$x=y=z=0$, spor s předchozí podm.
Tento případ nemůže nastat.

II. 1. závorka se anuluje v 1 případě

a) $\underline{x \neq y,\ y = z,\ x \neq z} \Rightarrow \quad z = 2\lambda = y$

$x + 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow x = -4\lambda$

$24\lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}$

$P_{1,2} = \left[\mp \frac{2}{\sqrt{6}},\ \pm \frac{1}{\sqrt{6}},\ \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right]$

b) $\boxed{z \neq y,\ z = x,\ x \neq y} \Rightarrow x = 2\lambda = z$

$y = -4\lambda$

$24\lambda^2 = 1,\ \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}$

$P_{3,4} = \left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}},\ \mp \frac{2}{\sqrt{6}},\ \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right]$

c) $\boxed{x = y,\ z \neq x,\ z \neq y}$, $y = 2\lambda = x$

$z = -4\lambda,\ 24\lambda^2 = 1,\ \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}$

$P_{5,6} = \left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}},\ \pm \frac{1}{\sqrt{6}},\ \mp \frac{2}{\sqrt{6}} \right]$

III. $\boxed{x \neq y,\ y \neq z,\ x \neq z}$, $\Rightarrow z = 2\lambda,\ x = 2\lambda, \quad \Rightarrow x = z$

Tedy tento případ nemůže nastat.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = z,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = x. \qquad d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2 + 2z dx dy + 2y dx dz + 2x dy dz.$$

$$2x dx + 2y dy + 2z dz = 0 \Rightarrow (x-z)dx + (y-z)dy = 0 \Rightarrow dy = \frac{z-x}{y-z} dx$$

$$dx + dy + dz = 0 \Rightarrow \underline{dz = -dx - dy} \quad \Big| \quad dx = -\frac{y-z}{x-z} dy$$

$$d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda(dx^2 + 2dx dy + dy^2) + 2z dx dy + 2y(-dx^2 - dx dy) + 2x(-dx dy - dy^2) =$$

$$= (4\lambda - 2y) dx^2 + (4\lambda - 2x) dy^2 + (4\lambda + 2z - 2y - 2x) dx dy$$

Pro $P_{1,2}$: $d^2F = (4\lambda - 2y)\left(\frac{y-z}{x-z}\right)^2 dy^2 + (4\lambda - 2x) dy^2 -$

$- (4\lambda + 2z - 2x - 2y) \frac{y-z}{x-z} dy^2 = \left[(4\lambda - 2y)\left(\frac{y-z}{x-z}\right)^2 + (4\lambda - 2x) - (4\lambda + 2z - 2x - 2y)\frac{y-z}{x-z}\right] dy^2$

Po dos.

$d^2F(P_1) = \sqrt{6}\, dy^2 \ldots P_1 \ldots$ min

$d^2F(P_2) = -\sqrt{6}\, dy^2 \ldots P_2 \ldots$ max.

Pro $P_{3,4}, P_{5,6}$:

$d^2F = (4\lambda - 2y) dx^2 + (4\lambda - 2x)\left(\frac{z-x}{y-z}\right)^2 dx^2 +$

$- (4\lambda + 2z - 2y - 2x) \cdot \frac{x-z}{y-z} dx^2$

$d^2(P_3) = \sqrt{6}\, dx^2 \ldots P_3$ min

$d^2(P_4) = -\sqrt{6}\, dx^2 \ldots P_4$ max

$d^2(P_5) = \sqrt{6}\, dx^2 \ldots P_5$ min

$d^2(P_6) = -\sqrt{6}\, dx^2 \ldots P_6$ max.