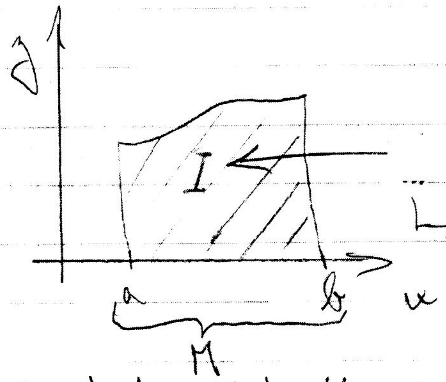
INEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ jedné a více proměnných

<u>Motivace</u>: Rozšíření určitého integrálu zavedeného dříve pro fce 1 proměnné (viz. skripta Novák) obecně na fce n proměnných

$n = 1$



$\int_a^b f(x)\,dx$; „jakási sumace Σ"
↳ (plocha)

Při konstrukci integrálu je třeba:

a, vymezit tzv. <u>měřitelné množiny</u>, tj. takové množiny M, přes které bude možno integrovat

- přirozený požadavek na integrační obor je, aby u M bylo možno určit její 'velikost':

$n=1$: <u>délka</u> ; $n=2$: plocha ; $n=3$: objem ; $n>3$ obecně: n-dimenzionální objem (n-D objem)

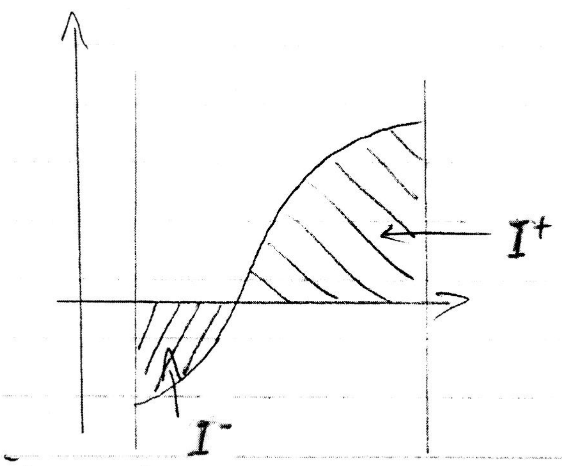
$\mu(M)$ = <u>míra</u> množiny M.
↳ velikost

Množiny M, u nichž lze určit jejich míru (velikost) nazveme <u>měřitelnými množinami</u>

b, vymezit takové fce $y = f(x_1,..,x_n) =: f(\underline{x})$, $\underline{x} \in M \subseteq \mathbb{R}^n$, M měřitelná, u nichž lze určit $(n+1)$-D objem (míru) množiny $I \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ omezené množinou M a grafem fce f v $\mathbb{R}^{n+1}$, tj. $I = \{[\underbrace{x_1,..,x_n}_{\underline{x}}, y] \mid [x_1,..,x_n] \in M$ a $\underbrace{\min(0, f(x))}_{f(x)\geq 0} \leq y \leq \underbrace{\max(0, f(x))}_{f(x)<0}\}$

$\Rightarrow$ takové fce budeme nazývat <u>integrovatelnými na M.</u>

$n = 1$



$I = I^- \dot{\cup} I^+$ ($\dot{\cup}$ .. disjunktní sjednocení)

$I^- := \{ [\underline{x}, y] \in I \mid f(\underline{x}) < 0 \}$
$I^+ := \{ \text{— " —} \mid f(\underline{x}) \geq 0 \}$

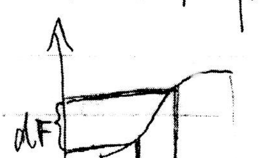
Části objemu I^- přiřadíme znam. minus
— " — I^+ — " — plus
$\Rightarrow \mu(I^-) \leq 0 \quad \mu(I^+) \geq 0$;
$\underline{\mu(I) = \mu(I^-) + \mu(I^+)}$

<u>Pozn.</u>: měřitelnost a s ní svázaná integrovatelnost se dá zavádět různými způsoby. V dalším se omezíme jen na klasický přístup:

a, M měřitelné v Jordanově smyslu, když připouštíme jen konečný (n-D) objem, tj. $0 \leq \mu(M) < \infty$, μ .. tzv. <u>Jordanova míra</u>.

b, fce integrovatelné v Riemannově smyslu (R-integrovatelné)

Existuje i univerzálnější koncept množin měřitelných v <u>Lebesgueově smyslu</u> (mohou mít i nekonečnou míru) a na nich zavedený tzv. <u>Lebesgueův integrál</u> (L-integrovatelné fce). Lze připustit i nehomogenní míru. <u>Představa</u>: M je vytvořena z nehomogenního materiálu, tj. s proměnnou spec. hustotou. Míra pak udává hmotnost M, která nemusí být přímo úměrná (n-D) objemu. Speciálním případem této situace je tzv. <u>Lebesgue-Stieltjesův integrál</u>



$\underset{\sim\sim\sim}{\int f(x)\, dF}$

1. Jordanova míra a její konstrukce

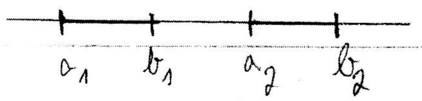
<u>$n=1$</u>: a) $M = [a,b]$ ohranič. $0 < a \le b < \infty$

$(\;\;]$

$[\;\;)$ $\qquad \mu(M) := b - a$

$(\;\;)$

b) $M = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} [a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu([a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$

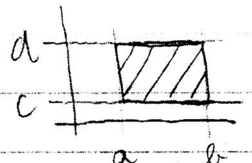


<u>$n=2$</u>: analogicky

a) místo ~~s~~ obran. intervaly pracujeme s obran. obdelníky:

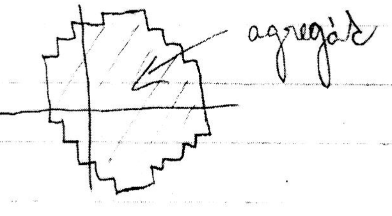
$[a,b] \times [c,d] = M$

$\mu(M) = (b-a)\cdot(d-c)$



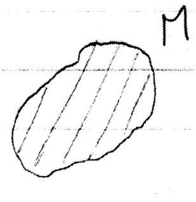
b) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} M_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(M_i) = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)\cdot(d_i - c_i)$

$\hookrightarrow [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$



$\xRightarrow[\text{přechod}]{\text{limitní}}$ obecnější mn. M

(zmenšujeme hrany čtverečků)



Podobně pro obec. $n > 1$

<u>n..rozm.</u> pracujeme s kvádry $H = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $\mu(H) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

<u>Def.</u>: Disjunktní sjednocení konečné (a tedy i prázdné) množiny obdelníků nazveme <u>agregátem</u> (včetně prázdné množiny)

<u>A... množina všech agregátů</u> (pro $n=1$: agregát = sjedn. konečného počtu intervalů

$\boxed{V1}$ Sjednocení, průnik, rozdíl dvou agregátů je agregát

<u>Důsl</u>: —— " —— konečného počtu agregátů je agregát $\Big\}$ A je tzv. množinový okruh.

Dle výše uvedeného představují agregáty nejjednodušší měřitelné množiny, jejichž mírou je jejich (n-D) objem. V případě $n=1$ již více měřitelných množin nedostaneme, pro $n>1$ však ano (viz. limitní přechod)

Def.: Buď $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ohraničená, pak zřejmě existuje agregát $A \in \mathcal{A}$ takový, že $M \subseteq A$.

Definujeme $\mu_*(M) = \sup\limits_{\substack{A \subseteq M \\ A \in \mathcal{A}}} \mu(A)$ ... vnitřní míra množ. M = supremum objemů všech vepsaných agregátů

$\mu^*(M) = \inf\limits_{\substack{A \supseteq M \\ A \in \mathcal{A}}} \mu(A)$ ... vnější míra množ. M = infimum objemů opsaných agregátů.

Zřejmě $\mu_*(M) \leq \mu^*(M)$.

Nastane-li rovnost $\mu_*(M) = \mu^*(M) =: \mu(M)$, říkáme, že M je (Jordanovsky) měřitelná a $\mu(M)$ se nazývá Jordanova míra množ. M.

$\boxed{V2}$ Množinu všech měřitelných množin označíme $\mathfrak{M}$ (kromě krásných agregátů zahrnuje při $n>1$ i mnoho dalších zaoblených množin). $\mathfrak{M}$ opět tvoří množinový okruh a μ má tyto vlastnosti:

(1) $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} M_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(M_i)$; $M_i \in \mathfrak{M}$ ... aditivita míry

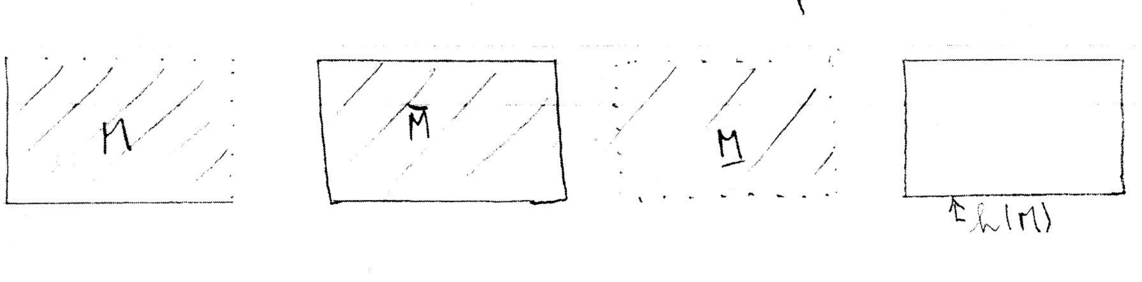
(2) $M \subseteq N$, $M, N \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mu(M) \leq \mu(N)$ monotonie míry (zachovává uspořádání)

(3) $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} M_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(M_i)$

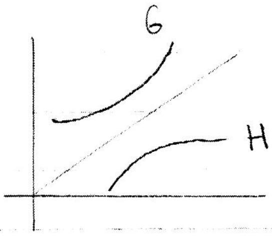
$\boxed{V3}$ $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \in \mathfrak{M} \Rightarrow \underline{M}, \overline{M}, h(M) \in \mathfrak{M}$ a $\mu(\underline{M}) = \mu(\overline{M}) = \mu(M)$, $\mu(h(M)) = 0$

uzávěr M

vnitřek M



V4 $M \subseteq \mathbb{R}^N$ ohraničená, pak $M \in \mathfrak{m} \iff \mu^*[h(M)]=0$ $(\iff \mu[h(M)]=0)$



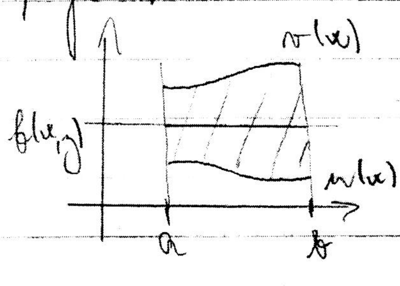
V5 Buď f spojitá na kompaktní (uzavř. + ohran.) množině $M \subseteq \mathbb{R}^N$, a definujme $G := \{[\underline{x}, f(\underline{x})] \mid \underline{x} \in M\}$;
↳ graf fce
$H := \{[f(\underline{x}), \underline{x}] \mid \underline{x} \in M\}$
↳ zrcadlový graf

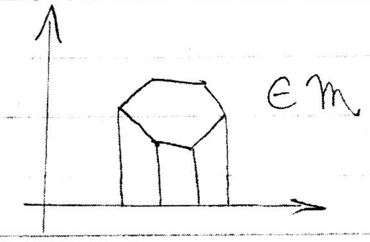
Pak $\mu(G) = \mu(H) = 0$

__Důsl.__: Množina v $\mathbb{R}^{N+1}$ omezená konečným počtem grafů __spojitých fcí__ definovaných na kompaktních množinách v $\mathbb{R}^N$ je měřitelná.

__Důkaz__: plyne z V4 a V5.

$n=2$

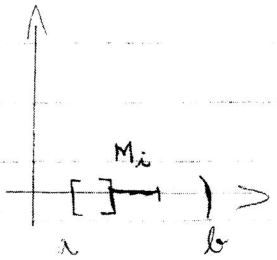




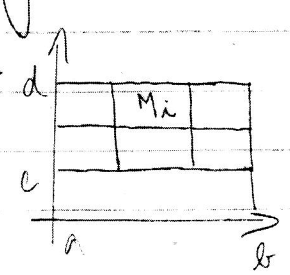
2. __Riemannův integrál a jeho konstrukce__

__Def__: Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^N$ měřitelná, její rozklad $M = \bigcup_{i=1}^{p} M_i$ na neprázdné navzájem disjunktní měřitelné množiny M_i nazveme dělením množiny M a množinu všech takových dělení označím $D(M)$.

__$n=1$__:



__$n=2$__:



Def.: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \in \mathfrak{m}$ a $D \in \mathcal{D}(M)$: $M = \bigcup_{i=1}^{p} M_i$ dělení; f ohraničená fce na M.

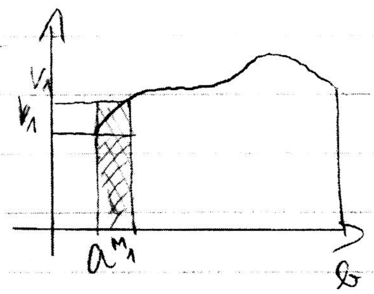
Položme $v_i = \inf_{x \in M_i} f(x)$; $V_i = \sup_{x \in M_i} f(x)$,

pak $s(D, f) = \sum_{i=1}^{p} v_i \, \mu(M_i)$

$S(D, f) = \sum_{i=1}^{p} V_i \, \mu(M_i)$

nazýváme po řadě dolním, resp. horním součtem fce f příslušným k dělení D; zřejmě $s(D,f) \leq S(D,f)$.

$n = 1$:



Def.: [Riemannův integrál]

Za předpokladu jako v předchozí definici definujeme:

$$\underline{\int}_M f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\underline{x}}) \underbrace{dx_1 \dots dx_n}_{d\underline{x}} := \sup_{D \in \mathcal{D}(M)} \{ s(D, f) \}$$ ... dolní R-integrál fce na M (největší objem natlačený na graf zevnitř)

$$\overline{\int}_M f(\underline{x}) \, d\underline{x} := \inf_{D \in \mathcal{D}(M)} \{ S(D, f) \}$$ ... horní R-integrál fce na M (nejmenší objem natlačený na graf zvnějšku)

Zřejmě $\underline{\int}_M f(\underline{x}) \, d\underline{x} \leq \overline{\int}_M f(\underline{x}) \, d\underline{x}$. Nastane-li rovnost, pak jejich společnou hodnotu značíme $\int_M f(\underline{x}) \, d\underline{x}$ a nazýváme ji (n-rozměrným) Riemannovým integrálem fce f na M. Fce f se nazývá R-integrovatelná na M.

↗

Alternativní značení:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n\times}_M f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \quad \text{nebo} \quad \int \cdots \int_M f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

Je-li $M = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ kvádr: $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$

<u>$n=1$</u>: $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx$ ... jednoduchý integrál

<u>$n=2$</u>: $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dx\, dy$ ... dvojný integrál

<u>$n=3$</u>: $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ ... trojný integrál.

Interpretace: $f \geq 0$ na M: $I = I^+ = \{[x_1,\dots,x_n,y] \mid [x_1,\dots,x_n] \in M;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

$s(D,f)$ ... n-D objem sloupců o základnách M_i vepsaných } množině I
$S(D,f)$ ... —— " —— opsaných }

korespondujeme s vepsanými, resp. opsanými agregáty měřitelné množ.

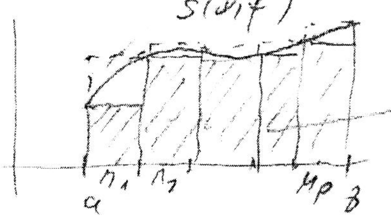
$\underline{\int_M} f(x)\,dx$ ... největší vepsaný objem } korespondují s vnitřní / vnější mírou množ. I

$\overline{\int_M} f(x)\,dx$ ... nejmenší opsaný objem }

společnou hodnotu dává n-D objem množiny I, tj. $\int_M f(x)\,dx = \mu(I)$.

$\Downarrow$ $f(x) \equiv 1$ na M:

$n=1$:



$\int_M dx_1 \dots dx_n = \mu(M)$, neboť tělesa I a M mají numericky stejnou míru, i když v jiných jednotkách.

$\boxed{V6}$ Některé postačující podmínky R-integrovatelnosti:

(1) f ohraničená a (po částech) monotonní na $M \subseteq \mathbb{R}$ (případ $n=1$)

(2) f —"— a (po částech) spojitá na M

(3) $M \in \mathcal{M}$ kompaktní a f spojitá na M [$\Rightarrow$ f je ohran. dle Weierstrassovy věty a tvrzení plyne ze (2)]

$\boxed{V7}$ [některé vlastnosti R-integrálu]

Nechť $c \in \mathbb{R}$, $\int_M f(x)\,dx$, $\int_M g(x)\,dx$, $\int_M f_i(x)\,dx$ existují, pak

(1) $\int_M [f(x)+g(x)]\,dx = \int_M f(x)\,dx + \int_M g(x)\,dx$ } linearita

(2) $\int_M \underbrace{c}_{\text{konst.}} f(x)\,dx = c\int_M f(x)\,dx$

(3) $\int_M \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^N c_i \int_M f_i(x)\,dx$

(4) $M = \bigcup_{i=1}^p M_i \Rightarrow \int_M f(x)\,dx = \sum_{i=1}^p \int_{M_i} f(x)\,dx$ ... aditivita

(5) $\int_M f(x)\,g(x)\,dx$ existuje

(6) $\frac{f(x)}{g(x)}$ definovaná a ohran. na $M \Rightarrow \int_M \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ existuje

(7) $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in M \Rightarrow \int_M f(x)\,dx \leq \int_M g(x)\,dx$

(8) $\int_M |f(x)|\,dx$ existuje a $\left|\int_M f(x)\,dx\right| \leq \int_M |f(x)|\,dx$

$\boxed{V8}$ Věta o střední hodnotě

$M \neq \emptyset$, $M \in \mathcal{M}$, f, w R-integrovatelná na M, přičemž buď $w(\underline{x}) \geq 0$ nebo $w(\underline{x}) \leq 0$ všude na M.
Označme $v := \inf_M \{f(\underline{x})\}$, $V := \sup_M \{f(\underline{x})\}$, pak existuje (průměrná) hodnota $\bar{f}: v \leq \bar{f} \leq V$, která se spočte ze vztahu:

$$\underbrace{\underbrace{\int_M f(\underline{x}) \cdot w(\underline{x})\, d\underline{x}}_{\text{vážený součet hodnot}} = \bar{f} \cdot \underbrace{\int_M w(\underline{x})\, d\underline{x}}_{\text{součet vah}}}_{} \qquad \text{(integrální součet)}$$

$$\bar{f} = \frac{\int_M f(\underline{x}) w(\underline{x})\, d\underline{x}}{\int_M w(\underline{x}) \cdot d\underline{x}} \approx \underbrace{\frac{\sum f(\underline{x}_i) w_i}{\sum w_i}}_{\text{vážený průměr}}$$

Důsl.: $w(\underline{x}) \equiv 1 \Rightarrow \int_M f(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = \bar{f} \cdot \underbrace{\int_M d\underline{x}}_{\mu(M)}$

$$\Downarrow$$

$$\bar{f} = \frac{\int_M f(\underline{x})\, d\underline{x}}{\mu(M)} \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} f(\underline{x}_i)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} 1}_{N}}.$$

3. Integrál závislý na parametru a Fubiniho věta

$\boxed{V9}$ Buď $f(x, y)$ spojitá na obdélníku $M = [a,b] \times [c,d]$. Pak fce $F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$ je spojitá na $[c,d]$. Má-li navíc $f(x,y)$ spojitou parciální derivaci $f'_y(x,y)$ na M, pak $F(y)$ má na $[c,d]$ derivaci $F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\, dx$. [formálně derivujeme za integrálem]

Důsl.: Dle $\boxed{V6}$(3) existuje:

$$\underbrace{\int_c^d \Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\text{plocha v řezu v závislosti na } y} \Big)\,dy}_{\text{integrální součet ploch}} \quad \dots \text{ tzv. dvojnásobný integrál}$$

Pozn.: Tvrzení $\boxed{V9}$ platí obdobně pro spojitou fci $f(\underline{x}, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, na $(n+1)$-rozměrném kvádru:

kartézský součin) $\displaystyle\mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \times [c,d]$: $F(y) := \int_M f(\underline{x}, y)\,d\underline{x}$

$$F'(y) = \int_M f_y(\underline{x}, y)\,d\underline{x}$$

nebo obecněji: $F(\underline{y}) = \int_M f(\underline{x}, \underline{y})\,d\underline{x}$

$$F'(y_i) = \int_M f'_{y_i}(\underline{x}, \underline{y})\,d\underline{x}$$

$\underline{y} \to x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$

$\underline{x} \to x_1, \dots, x_n$

$\boxed{V10}$ Za označení a předpokladů V9 položme:

$$V := [c,d] \times [a,b] \times [a,b] = \{ [y,u,v] \mid y \in [c,d];\ u, v \in [a,b] \}$$

Pak fce $F(y,u,v) := \int_u^v f(x,y)\,dx$ je spojitá na V.
Má-li $f(x,y)$ na M navíc spojitou parc. derivaci $f_y(x,y)$, pak $F(y,u,v)$ má na V spojité všechny parc. der. 1. řádu:

(a) $F_y(y,u,v) = \int_u^v f_y(x,y)\,dx$

(b) $F_u(y,u,v) = -f(u,y)$; $F_v(y,u,v) = f(v,y)$

<u>Odvození:</u>

(a) plyne z V9 při volbě $a = u$, $b = v$

(b) nechť $G(x,y) = \int f(x,y)\,dx$ je neurčitý integrál z f (primitivní fce) vzhledem k x (závisí na y)

$$F(y,u,v) = \int_u^v f(x,y)\,dx = G(v,y) - G(u,y) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F_v = \underbrace{G_v(v,y)}_{f(v,y)} - \underbrace{G_v(u,y)}_{=0} = f(v,y)$$

$$F_u = \underbrace{G_u(v,y)}_{=0} - \underbrace{G_u(u,y)}_{f(u,y)} = -f(u,y)$$

<u>Důsl.:</u> nechť ve V10 je $a < u(y) \leq v(y) < b$, kde $u(y)$ i $v(y)$ jsou spojité na $[c,d]$, pak fce

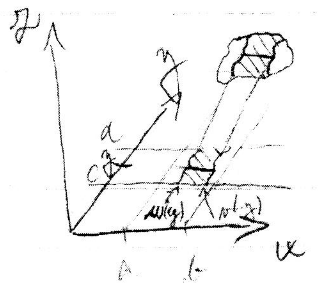
$$H(y) := F(y, u(y), v(y)) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx \text{ je spojitá na } [c,d].$$

Ex-li spojité derivace f_y na M a $u'(y)$, $v'(y)$ na $[c,d]$, pak $H(y)$ má na $[c,d]$ derivaci

c) $$H'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x,y)\,dx + f(v(y),y)\,v'(y) - f(u(y),y)\cdot u'(y)$$

Důkaz: dle důkazu V10: $H(y) = F(y,u(y),v(y)) = G(v(y),y) - G(u(y),y)$, takže stačí tuto fci derivovat jako složenou funkci:

$$H'(y) = \underbrace{F_y(y,u(y),v(y))}_{\int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x,y)\,dx \text{ (dle a)}} + \underbrace{F_u(y,u(y),v(y))}_{-f(u(y),y) \text{ (dle b)}}\cdot u'(y) + \underbrace{F_v(y,u(y),v(y))}_{f(v(y),y) \text{ dle (b)}}\cdot v'(y)$$



$\boxed{V11}$ **Fubiniho věta na obdélníku**

Nechť $M = [a,b] \times [c,d]$ a f nechť je R-integrovatelná na M.

Pak $\int_c^d f(x,y)\,dy$ i $\int_c^d f(x,y)\,dy$ jsou R-integrovatelné na $[a,b]$

a platí $\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$

Posn.: Roli x a y lze ve V11 zaměnit, tj. také lze psát

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy.$$

Jestliže integrační meze vnitřního integrálu závisí na integrační proměnné vnějšího integrálu, dostaneme následující obecnější variantu F.V.

$\boxed{V12}$ **Fubiniho věta přes oblast v jednom směru omezenou křivkami**

Nechť $u(x), v(x)$ jsou spojité na $[a,b]$, $u(x) < v(x)$ $\forall\, x \in [a,b]$.
Nechť $f(x,y)$ je spojitá na množině $M = \{[x,y] \mid x \in [a,b],\ u(x) \leq y \leq v(x)\}$.

$$\iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\underbrace{\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy}_{\text{plocha řezu ve směru osy od } u(x) \text{ po } v(x)} \Big] dx$$

<u>Pozn.</u>: F.V. obdobně platí pro fce n proměnných.

$$\int_M \cdots \int f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_{a_1}^{b_1}\Big[\int_{a_2}^{b_2}\cdots\Big[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n\Big]dx_{n-1}\cdots\Big]dx_1$$

Meze opět mohou být fcemi proměnných, pomocí nichž se teprve bude integrovat:

$$a_n = a_n(x_1,\dots,x_{n-1}),\ b_n = b_n(x_1,\dots,x_{n-1})$$

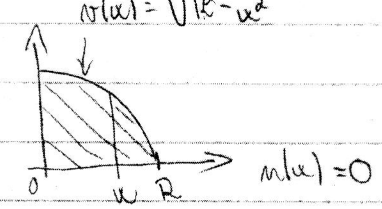
$$a_{n-1} = a_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2}),\ b_{n-1} = b_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$a_2 = a_2(x_1),\ b_2 = b_2(x_1).$$

<u>Příklady</u>:

(1) $I := \iint_M \underbrace{x\cdot y}_{f(x,y)}\,dx\,dy$, kde M:



$$I \overset{F.V.}{=} \int_0^R \Big[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x\cdot y\,dy\Big]dx = \int_0^R x\cdot dx\Big(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\cdot dy\Big) = \int_0^R x\cdot dx\Big(\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\Big) =$$

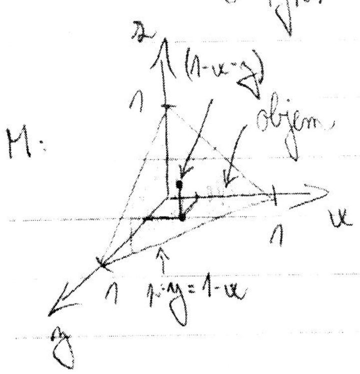
$$= \int_0^R x\cdot dx\cdot\frac{1}{2}\left(R^2-x^2-0^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^R \left(R^2\cdot x - x^3\right)dx = \frac{1}{2}\Big[R^2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\Big]_0^R =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(R^4-\frac{R^4}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{R^4}{8}}}$$

(2) $\iiint\limits_M \underbrace{z^2}_{f(x,y,z)}\,dx\,dy\,dz$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast omezená 4 rovinami:

$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1 \Leftrightarrow z \le 1-x-y$

$x+y+z-1 \le 0$

M: 

osa x; přímka; šikmá stěna
(1) (1-x) (1-x-y)

$$I = \int_0^1 \Big[\underbrace{\int_0^{1-x} \Big[\underbrace{\int_0^{1-x-y} z^2\,dz}_{\text{fce } x,y} \Big] dy}_{\text{fce } x} \Big] dx = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^3\,dy = \frac{1}{3} \int_0^1 dx \left[(-)\frac{(1-x-y)^4}{4} \right]_0^{1-x} =$$

dosazuji podle y

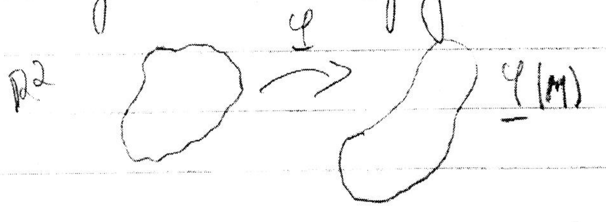
$$= -\frac{1}{12} \int_0^1 \Big([\underbrace{1-x-(1-x)}_{=0}]^4 - [1-x]^4 \Big) dx = \frac{1}{12} \int_0^1 (1-x)^4\,dx =$$

$$= \frac{1}{12} \left[-\frac{(1-x)^5}{5} \right]_0^1 = -\frac{1}{60} \cdot \big(\underbrace{(1-1)^5}_{=0} - (1-0)^5 \big) = \underline{\underline{\frac{1}{60}}}$$

4. Transformace proměnných v Riemannově integrálu

Motivace: Analogie substituční metody známé z 1-rozměrné integrace (viz. rovák: V3.5, str. 42)

Transformační fce je pro $n>1$ vektorová: $\underline{\varphi}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a transformuje integrační obor M na jiný:



$\boxed{\text{V13}}$ nechť $\underline{\varphi}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je prosté (vektorové) zobrazení transformující otevřenou měřitelnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ na měřitelnou množinu $\underline{\varphi}(M) \subseteq \mathbb{R}^n$.
nechť $\underline{\varphi}(\underline{x})$ má na M spojité parc. der. 1. řádu (a jeho Jacobián $(\det(J) \neq 0)$) je nenulová a ohraničená fce na M.

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{bmatrix}$

Pak pro každou fci $f(x_1,\dots,x_n)$ spojitou a ohraničenou na $\underline{\varphi}(M)$ [a tedy i R-int. dle V6 (2)] platí:

$$(*)\quad \int_{\varphi(M)} f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n = \int_M f(\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_n(x_1,\dots,x_n))\cdot \underline{|\det(J)|}\,dx_1\dots dx_n$$

→ abs. hodnota z jacobiánu

- skrácene: $\int_{\varphi(M)} f(\underline{y})\,d\underline{y} = \int_M f(\underline{\varphi}(\underline{x}))\cdot|\underline{\varphi}'_{\underline{x}}(\underline{x})|\,dx$

<u>Pozn.</u>: speciální případy

(a) $\underline{\underline{n=1}}$: $J(x) = [\varphi'(x)] \Rightarrow \det[J(x)] = \varphi'(x)$; $M=[a,b]$, $a<b$;

<u>i)</u> $\varphi'(x)>0 \Rightarrow \varphi$ je ryze rostoucí na $M \Rightarrow \varphi(M)=[\varphi(a),\varphi(b)]$, $\varphi(a)<\varphi(b)$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy \underset{\text{subst.: } y=\varphi(x)}{=} \int_a^b f[\varphi(x)]\,\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)}$$

<u>ii)</u> $\varphi'(x)<0 \Rightarrow \varphi$ je ryze klesající $\Rightarrow \varphi(M)=[\varphi(b),\varphi(a)]$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(y)\,dy = \int_a^b f[\varphi(x)]\cdot\underbrace{(-\varphi'(x))}_{|\varphi'(x)|}\,dx \Rightarrow \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$$

(b) $\underline{\underline{n=2}}$: $\iint_{\varphi(M)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_M f[x(u,v),y(u,v)]\cdot|\underline{\varphi}'(u,v)|\cdot du\,dv$,

kde substituci formálně provedeme jako v příp. (a):

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u\,du + x_v\,dv \\ y_u\,du + y_v\,dv \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}}_{J(u,v)}\cdot\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

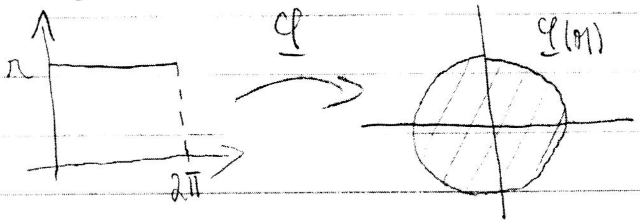
s tím, že $J(u,v)$ nahradíme $|\det J(u,v)|$

(c) $\underline{\underline{n=3}}$: analogicky

Příklady:

(1) V případě $n=2$ se často transformuje z polárních souřadnic do kartézských:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\varphi,\rho) = \rho\cdot\cos\varphi \\ y &= y(\varphi,\rho) = \rho\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\}\underline{\varphi} \quad ; \quad \begin{aligned} &\varphi\in[0,2\pi) \\ &\rho\in[0,r] \end{aligned}$$



$$J(\varphi,\rho)=\begin{bmatrix}\rho\cdot(-\sin\varphi) & \cos\varphi\\ \rho\cdot(\cos\varphi) & \sin\varphi\end{bmatrix} \quad ; \quad |\det J(\varphi,\rho)| = |-\rho\sin^2\varphi-\rho\cos^2\varphi| = \rho\cdot|-1| = \underline{\underline{\rho}}$$

<u>Výpočet objemu koule v $\mathbb{R}^3$:</u> $x^2+y^2+z^2=r^2 \Rightarrow z=\sqrt{r^2-(x^2+y^2)} =: f(x,y)$

$$V = 2\cdot\underbrace{\int_{\underline{\varphi(M)}}\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy}_{\text{objem horní polokoule}} = 2\int_0^r\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2-\rho^2}\cdot\rho\cdot d\varphi\, d\rho \overset{F.V.}{=}$$

$\hookrightarrow \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi$

$$= 2\cdot\int_0^r\sqrt{r^2-\rho^2}\cdot\rho\cdot\Big[\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{[\varphi]_0^{2\pi}=2\pi}\Big]\cdot d\rho = 4\pi\cdot\int_0^r\sqrt{r^2-\rho^2}\cdot\rho\cdot d\rho \overset{u^2=r^2-\rho^2}{=}$$

$2u\,du=-2\rho\,d\rho$

$$= 4\cdot\pi\cdot\int_r^0 u\cdot(-u)\cdot du = 4\cdot\pi\cdot\int_0^r u^2\,du = 4\pi\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^r = \underline{\underline{4\pi\cdot\frac{r^3}{3}}}$$