Nekonečné řady

Doplňky k teorii posl. reál. čísel

Definice cauchyovské posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá cauchyovská, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ ex. N takže pro všechna $m > N$, $n > N$ platí

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Cauchy-Bolzanovo kriterium konvergence

Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, když je cauchyovská.

Definice hromadného bodu

Číslo a se nazývá hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho indexů n, pro něž $|a_n - a| < \varepsilon$.

Věta Bolzano-Weierstrassova

Každá ohraničená posloupnost má alespoň jeden hromadný bod

Důk: Je-li a limitou posl. vybr. z $\{a_n\}$, pak a je hrom. bod.

V) Nechť a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$. Pak existuje vybr. posl. $\{a_{n_k}\}$ z $\{a_n\}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Důsl. $\liminf a_n$, $\limsup a_n$ pro ohran. $\{a_n\}$ jsou hrom. body $\{a_n\}$.

V) Buď $\{a_n\}$ ohraničená posloupnost. Pak $\limsup a_n$ je její největší hromadný bod, $\liminf a_n$ je její nejmenší hrom. bod.

V) Buď $\{a_n\}$ posloupnost, nechť $b_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$. Pak

$\liminf a_n \leq \liminf b_n \leq \limsup b_n \leq$
$\leq \limsup a_n$.

Důsledek: Cauchyova věta

Existuje-li $\lim a_n = a$, existuje i $\lim \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = a$.

V) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel. Pak

$\liminf \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n}$
$\leq \limsup \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Důsledek: Existuje-li $\lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$ existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a platí $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$

V) Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ posloupnosti. Pak platí:

$\limsup (a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$
$\liminf (a_n+b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$,
pokud mají pravé strany smysl.

V) Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ posl., $\lim b_n = b$. Pak:

$\limsup (a_n \cdot b_n) = b \cdot \limsup a_n$, když $b > 0$
$\limsup (a_n \cdot b_n) = b \cdot \liminf a_n$, když $b < 0$.

Pojem řady a jejího součtu

Definice:

(1) Buď $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel. Def. posl. $\{s_n\}$ takto: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $\dots$, $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $\dots$ Posloupnost $\{s_n\}$ se nazývá posloupností částečných součtů nekonečné řady $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ neb $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečná řada, $\{s_n\}$ posloupnost jejích částečných součtů. Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pravíme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a číslo s nazýváme jejím součtem, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

(3) Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonečná řada, neexistuje-li vlastní limita $\lim s_n$, pravíme, že řada $\sum_{1}^{\infty} a_n$ je divergentní a to určitě diverg., je-li $\lim s_n = \pm\infty$, resp. oscilující, neexistuje-li tato limita vůbec.

Příklady řad:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Rozložíme na parc. zlomky

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Tedy

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}\right) + \dots + \left(\tfrac{1}{n-1} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\underline{s} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \underline{1}$$

(2) Geom. řada: $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = a + aq + aq^2 \dots$

$$s_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}\,; \quad \lim s_n \begin{cases} \text{neex. pro } |q| \geq 1 \\ = \frac{a}{1-q} \text{ pro } |q| < 1 \end{cases}$$

(3) Harmonická řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots$ je určitě divergentní

(4) Grandiho řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 \dots$ oscilující.

Podmínky pro zjištění konvergence:

V| Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim a_n = 0$.

V| Cauchy-Bolzanovo kritérium konvergence

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ ex. N takové, že pro všechna $n > N$ a všechna m platí $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$.

V| Konvergence nebo divergence řady se nezmění, jestliže konečný počet členů vynecháme, přidáme nebo změníme.

Def.|

Buď $\sum a_n$ řada. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ se značí R_n a nazývá se n-tý zbytek (zbytek po n-tém členu) řady $\sum a_n$. Symbol R_n značí též součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$, pokud konverguje.

V| Konverguje-li řada $\sum a_n$, konverguje i každý její zbytek a platí $\lim R_n = 0$. Konverguje-li alespoň jeden zbytek řady $\sum a_n$, konverguje i $\sum a_n$.

V| Je-li $k \neq 0$, pak obě řady $\sum a_n$, $\sum k a_n$ konvergují nebo divergují současně. V případě konvergence platí $\sum k a_n = k \cdot \sum a_n$.

V| Konvergují-li řady $\sum a_n$, $\sum b_n$, konverguje i $\sum (a_n + b_n)$ a platí $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

$\boxed{\text{Větu nelze obrátit!!}}$

V| (Asociativní zákon)

Nechť řada $\sum a_n$ konverguje a nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $n_0 = 0$ a označme $b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}$. Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ rovněž konverguje a platí $\sum b_k = \sum a_n$.

$\boxed{\text{Větu nelze obrátit!!}}$

Řady s nezápornými členy

V| Každá řada s nezápornými členy buď konverguje nebo diverguje k $+\infty$; konverguje tehdy a jen tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je omezená.

V| <u>První srovnávací kritérium</u>

Nechť $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou řady s nezáp. členy a nechť $a_n \leq b_n$ pro vš. n. Pak platí:

(1) konverguje-li $\sum b_n$, konverguje i $\sum a_n$
(2) diverguje-li $\sum a_n$, diverguje i $\sum b_n$.

($a_n \leq b_n$ lze nahradit pož. $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna n).

$\sum a_n$ ... minoranta řady $\sum b_n$
$\sum b_n$ ... majoranta " $\sum a_n$.

V| <u>Druhé srovnávací kritérium</u>

Nechť $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou řady s kladnými členy a nechť pro všechna n platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Pak platí:

(1) konverguje-li $\sum b_n$, konverguje i $\sum a_n$
(2) diverguje-li $\sum a_n$, diverguje i $\sum b_n$

V| <u>Limitní srovnávací kritérium</u>

Nechť $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou řady s kladnými členy a nechť existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Pak platí:

(1) Je-li $L < \infty$ a konverguje-li $\sum b_n$, konverguje i $\sum a_n$,
(2) Je-li $L > 0$ a diverguje-li $\sum b_n$, diverguje i $\sum a_n$.

V| <u>Odmocninové (Cauchyovo) kritérium</u>

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezáp. členy. Platí-li pro všechna n $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, pak tato řada konverguje. Platí-li pro nek. mnoho n $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak tato řada diverguje.

V| <u>Limitní odmocninové kritérium</u>

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezáp. členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Pak platí:

(1) Je-li $L < 1$ řada konverguje.
(2) Je-li $L > 1$ řada diverguje.
(3) Je-li $L = 1$ řada může konv. i div.

Pozn:

Požadavek $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ je silnější než $\sqrt[n]{a_n} < 1$ (viz řada $\sum \frac{1}{n}$, ta diverg.)

VI Podílové (D'Alembertovo) kritérium

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Platí-li pro všechna n $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, pak tato řada konverguje. Platí-li pro všechna n $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, pak tato řada diverguje.

VI Limitní podílové kritérium

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Pak platí:

(1) Je-li $L < 1$, řada konverguje

(2) Je-li $L > 1$, řada diverguje

(3) Je-li $L = 1$, řada může konv. i div.

VI Raabeovo kritérium

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Platí-li pro skoro všechna n $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \ge q > 1$, pak řada konverguje. Platí-li pro skoro všechna n $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, pak řada diverguje.

VI Limitní Raabeovo kritérium

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť $\lim n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$. Pak:

(1) Je-li $L > 1$, řada konverguje

(2) Je-li $L < 1$, řada diverg.

(3) Je-li $L = 1$, může řada konv. i nekonv.

(Raabeovo krit. je silnější než podílové).

VI Integrální (Cauchy-Maclaurinovo) kritérium

Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu $[1, \infty)$ nezáporná a nerostoucí. Nechť $a_n = f(n)$. Pak řada $\sum_{n=1} a_n$ konverguje tehdy a jen tehdy když konverguje nevlastní integrál $\int f(x)\,dx$.

Absolutně konvergentní řady

Definice

Pravíme, že řada $\sum a_n$ konverguje **absolutně**, konverguje-li $\sum |a_n|$. Pravíme, že tato řada konverg. **relativně**, jestliže konverguje, ale řada $\sum |a_n|$ diverguje.

V] Konverguje-li řada $\sum |a_n|$, konverguje i $\sum a_n$.

V] Konverguje-li řada $\sum a_n$ absolutně, platí $|\sum a_n| \le \sum |a_n|$.

V] Nechť řada $\sum a_n$ konverguje absolutně a nechť $\{c_n\}$ je ohraničená posloupnost. Pak řada $\sum c_n a_n$ konv. absolutně.

$\sum |a_n|$ je řada s nez. členy. Tedy platí obdobná kriteria jako v před. odstavci (jen pokud se týče konvergence – tedy pokud se týče divergence, jsou násl. věty příslušně doplněny):

V] Nechť $\sum b_n$ je konvergentní řada s kladnými členy. Platí-li pro vš. n $|a_n| \le b_n$ nebo $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$, konverguje $\sum a_n$ absolutně. Existuje-li zejména kon. limita $\lim \frac{|a_n|}{b_n}$, konverguje $\sum a_n$ absolutně.

V] Platí-li pro vš. n $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$, konverguje $\sum a_n$ absolutně. Platí-li pro nek. mnoho n $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$, div. $\sum a_n$. Existuje-li zejména $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, pak pro $L < 1$ řada $\sum a_n$ konv. absolutně, pro $L > 1$ řada $\sum a_n$ div.

V] Platí-li tytéž předpoklady jako v předešlé větě s tím rozdílem, že místo $\sqrt[n]{|a_n|}$ píšeme $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, platnost tvrzení věty je táž.

V] Platí-li pro skoro všechna n $n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \ge q > 1$, konverguje řada $\sum a_n$ absolutně. Existuje-li zejména $\lim n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) > 1$, konverguje $\sum a_n$ absolutně.

Def.

Řekneme, že posloupnost $\{\nu_n\}$ přirozených čísel je *přerovnáním posloupnosti* $\{n\}$, jestliže každé přirozené číslo se vyskytne v posloupnosti a sice právě jednou.
Řekneme, že řada $\sum a_{\nu_n}$ vznikla přerovnáním z řady $\sum a_n$, jestliže posl. $\{\nu_n\}$ je přerovnáním posl. $\{n\}$.

Def.

Řekneme, že pro konvergentní řadu $\sum a_n$ platí komutativní zákon, jestliže konverguje každá řada vzniklá přerovnáním této řady a její součet je týž.

V) Komutativní zákon platí pro každou absolutně konverg. řadu.

Relativně konvergentní řady

Definice

Nekonečná řada se nazývá *alternující*, jestliže lib. dva sousední členy mají opačná znaménka.

Alternující řada: $\left.\begin{matrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \\ \text{nebo} \\ \sum (-1)^n a_n \end{matrix}\right\} a_n > 0$

V) Leibnitzovo kritérium

Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Alternující řada $\sum (-1)^{n-1} a_n$ konverguje tehdy a jen tehdy, když $\lim a_n = 0$.

Př: Leibnitzova řada: $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots = \ln 2$

V) Je-li $\sum a_n$ relativně konvergentní řada, pak obě řady sestavené z kladných, resp. záporných členů této řady určitě divergují.

V) Riemannova věta

Z libovolné relativně konvergentní řady lze vhodným přerovnáním získat řadu konvergentní k lib. předem danému číslu, resp. řadu určitě divergentní, respektive řadu oscilující.

V) Dirichletovo kriterium

Nechť $\{c_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel taková, že $\lim c_n = 0$. Nechť řada $\sum a_n$ má ohraničené částečné součty, tj. ex. $K > 0$ tak, že $|s_n| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n| < K$. Pak řada $\sum c_n a_n$ konverguje.

Pozn.

Odtud plyne Leibnitzovo kriterium, položíme-li $a_n = (-1)^{n-1} \Rightarrow \sum (-1)^{n-1} c_n$ konverguje.

V) Abelovo kriterium

Nechť $\{c_n\}$ je monotonní a ohraničená posloupnost a nechť $\sum a_n$ konverguje. Pak $\sum c_n a_n$ konverguje.

Násobení nekonečných řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{i,j} a_i b_j =: \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

rozepsáno:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots
\end{array}$$

Druhy uspořádání:

(1) Cauchyův součin (úhlopříčně)

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots + c_n = (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1)$$

(2) Dirichletův součin (do čtverců)

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + \dots + c_n = (a_1b_n + a_2b_n + \dots + a_{n-1}b_n + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \dots + a_nb_1)$$

V] Nechť řady $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ konvergují absolutně. Pak řada $\sum c_n$ konverguje rovněž absolutně a platí $\sum c_n = a\cdot b$ při lib. uspořádání c_n.

V] Mertensova věta

Nechť řady $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ konvergují ať aspoň jedna z nich absolutně. Pak Cauchyův součin $\sum c_n$ těchto řad konverguje a platí $\sum c_n = a\cdot b$.

V] Abelova věta

Nechť $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ jsou konvergentní řady a nechť $\sum c_n$ je jejich Cauchyův součin. Jestliže $\sum c_n$ konverguje, pak platí $\sum c_n = a\cdot b$.

V]

Nechť $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ jsou konvergentní řady. Pak Dirichletův součin $\sum c_n$ těchto řad konverguje a platí $\sum c_n = a\cdot b$.

Odhad zbytku řady

V] Nechť $\sum a_n$ je konv. řada a $\sum b_n$ konv. řada s nezáp. členy. Nechť pro každé n platí $|a_n| \le b_n$, značí-li r_n n-tý zbytek řady $\sum a_n$, R_n n-tý zbytek řady $\sum b_n$, platí $|r_n| \le R_n$.

V] Nechť pro všechna n platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$. Pak pro n-tý zbytek řady $\sum a_n$ platí $|R_n| \le |a_n| \frac{q}{1-q}$.

V] Nechť $\sum a_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy a nechť $a_n = f(n)$, kde $f(x)$ je nezáporná a nerostoucí funkce na $[1, \infty)$. Pak pro n-tý zbytek řady $\sum a_n$ platí $R_n \le \int_n^{\infty} f(x)\,dx$.

V] Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posl. nezáp. čísel taková, že $\lim a_n = 0$. Pak pro n-tý zbytek alternující řady $\sum (-1)^{n-1} a_n$ platí $|R_n| < a_{n+1}$, $\operatorname{sgn} R_n = (-1)^n$.

Příklad:

Kolik členů řady $\sum \frac{2^n}{n!}$ je třeba sečíst, abychom součet dostali s přesností 0,01.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, 2^n} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$$

pro $n \geq 3$

Tedy $R_n \leq a_n \frac{q}{1-q} = \frac{2^n}{n!} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^n}{n!}$

$$\frac{2^n}{n!} < \frac{1}{100} \Rightarrow n! > 100 \cdot 2^n \Rightarrow \underline{n = 8.}$$