Posloupnosti a řady funkcí

Pojem funkcionální posloupnosti a řady

$\{f_n(x)\}$, $x \in J$

pro $x = x_0$ dost. čís. posl. $\{f_n(x_0)\}$, o níž lze pomocí předešlých kriterií zjistit, zda je konv. či diverg.

$D \subseteq J$ označme množinu všech čísel (bodů) $x_0 \in J$, pro něž $\{f_n(x_0)\}$ je konv.

D nazýváme konvergenční obor posl. $\{f_n(x)\}$

$x_0 \in D \Rightarrow f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$; $f(x)$ se nazývá limita posl. $\{f_n(x)\}$; $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ na D $\Leftrightarrow \forall_{x_0} \forall_{\varepsilon} \exists_{N} \forall_{n \geq N}:$
$[|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$

$\sum f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = s(x)$

$\Leftrightarrow \lim s_n(x) = s(x)$, kde $s_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

$\sum f_n(x)$ konv. abs. $\Leftrightarrow \sum |f_n(x)|$ konv.

Platí všechna kriteria, jež byla

uvedena prouvšelné řady

Příklady hledání oboru konvergence funkcionálních řad:

(1) $\sum \ln^n x$ ... geom. řada

Musí tedy platit $-1 < \ln x < 1$

$\frac{1}{e} < x < e$

$D = (\frac{1}{e}, e)$

(2) $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$

$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ konv. abs. dle Raabeova krit.

$n \geq 2$. Tedy $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ konv. abs. pro vš. $x \Rightarrow D = (-\infty, \infty)$.

(3) $\sum x^{n^2}$

$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|x|^{n^2}} = \lim |x|^n =$

$= \begin{cases} \infty & \text{pro } |x| > 1 \\ 0 & \text{pro } |x| < 1 \\ 1 & \text{pro } |x| = 1 \end{cases}$

$0 < 1$ ... pro $x \in (-1, 1)$ konv.

pro $x = 1, x = -1$, div $\Rightarrow$ $D = (-1, 1)$.

Stejnoměrná konvergence

Definice

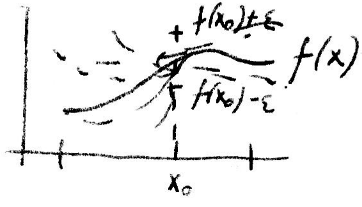
Pravíme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na intervalu J k funkci $f(x)$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje N tak, že pro vš. $n \geq N$ a všechna $x \in J$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Porovnání s obyč. konvergencí:

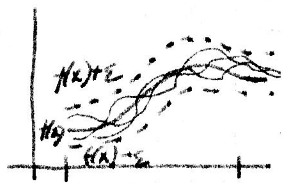
$f_n(x) \to f(x)$ (obyč.) $\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \forall_{x_0 \in J} \exists_{N(\varepsilon, x_0)} \forall_{n \geq N}$: $[\,|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\,]$.

Geometricky:

Obyč. konv.



Stejn. konv.



Def.

Pravíme, že řada $\sum f_n(x)$ konverguje na J stejnoměrně k funkci $s(x)$, když posloupnost jejích část. součtů $\{s_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na J k funkci $s(x)$.

V <u>Cauchy-Bolzanovo kriterium</u>

Posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje na int. J stejnoměrně tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje ν tak, že pro vš. $m \geq n$, $n \geq \nu$ a všechna $x \in J$ platí $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

V <u>Cauchy-Bolzanovo krit. pro řady</u>

Řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na int. J tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ ex. ν tak, že pro vš. $n \geq \nu$, vš. m a vš. $x \in J$ platí $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon$

> Následující věty lze přeformulovat i pro posloupnosti!

V Nechť řady $\sum f_n^{(1)}(x), \sum f_n^{(2)}(x), \dots, \sum f_n^{(k)}(x)$ konvergují stejnoměrně na J a nechť $c_1, c_2, \dots, c_k$ jsou lib. čísla. Položme

$F_n(x) = c_1 f_n^{(1)}(x) + \dots + c_k f_n^{(k)}(x)$

pro každé n. Pak řada $\sum F_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J.

V Nechť řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na int. J a nechť funkce $g(x)$ je ohraničená na J. Pak řada $\sum g(x) f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na int. J.

V <u>Weierstrassovo kriterium</u>

Nechť pro všechna $x \in J$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$ a nechť číselná řada $\sum a_n$ konverguje. Pak $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J.

V <u>Dirichletovo kriterium</u>

Nechť řada $\sum f_n(x)$ má na int. J částečné součty stejnoměrně ohraničené, tj. existuje $M > 0$ tak, že platí $|S_n(x)| = |f_1(x) + \dots + f_n(x)| \leq M$ pro vš. $x \in J$ a pro vš. n.

Nechť $\{\alpha_n(x)\}$ je posloupnost nezáporných funkcí na int. J taková, že $\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \dots$, která na J stejnoměrně konverguje k nule. Pak řada $\sum \alpha_n(x) f_n(x)$ konverguje stejnoměrně.

Důsledek:
Nechť řada $\sum f_n(x)$ má na J stejnoměrně ohraničené částečné součty a nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel takových, že $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, $\lim a_n = 0$. Pak řada $\sum a_n f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J.

Příklad
Nechť $0 < \delta < \pi$. Dokažte, že řada $\sum \frac{\sin nx}{1+nx}$ konv. stejnoměrně na $[\delta, 2\pi - \delta]$

$f_n(x) = \sin nx$, $\alpha_n(x) = \frac{1}{1+nx}$

$|s_n(x)| = |\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| \leq$ (Pomocí indukce)

$\leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$,

$\alpha_n(x) \geq \dots \to 0$; $\alpha_n(x) \leq \frac{1}{1+n\delta} \to 0$

$\Rightarrow \alpha_n(x) \to 0$ stejn. na $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Tím jsou splněny podm. předchozí věty.

Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posl. a řad

V) Nechť posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně na int. J k funkci $f(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité v bodě $x_0 \in J$, je i funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x_0 \in J$.

Pozn: Jsou-li $f_n(x)$ spojité na J, pak ve stejn. předp. $f(x)$ je spoj. na J.

V) Nechť řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na int. J a má součet $s(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité v bodě $x_0 \in J$, je i funkce $s(x)$ spojitá v x_0.

Pozn: Jsou-li $f_n(x)$ spojité na J, pak ve stejn. předp. $s(x)$ je spoj. na J.

V) Nechť posloupnost $\{f_n(x)\}$ spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ stejnoměrně konverguje na tomto intervalu k funkci $f(x)$. Pak platí:

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ neboli

$\int_a^b [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

V] Nechť řada $\sum f_n(x)$ stejnom. konverguje na int. $[a,b]$ a má součet $S(x)$. Nechť funkce $f_n(x)$ jsou spojité na $[a,b]$. Pak platí $\int_a^b S(x)\,dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx$ neboli

$$\int_a^b \left[\sum f_n(x)\right] dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx .$$

V] Nechť řada $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na int. $[a,b]$ a má součet $S(x)$. Nechť všechny funkce $f_n(x)$ jsou spojité na $[a,b]$. Nechť $x_0 \in [a,b]$ lib. Pak platí $\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$, přičemž řada napravo skutečně konverguje stejnoměrně.

V] Nechť řada $\sum f_n(x)$ konverguje v int. $[a,b]$ a má součet $S(x)$. Nechť funkce $f_n(x)$ mají na $[a,b]$ spojité derivace a nechť řada $\sum f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$. Pak funkce $S(x)$ má na $[a,b]$ spojitou derivaci a platí $S'(x) = \sum f_n'(x)$ neboli $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Poznámky:

(1) Podobně lze dokázat: Konverguje-li posloupnost $\{f_n(x)\}$ na intervalu $[a,b]$ k funkci $f(x)$, mají-li $f_n(x)$ na $[a,b]$ spojité derivace a konverguje-li posl. $\{f_n'(x)\}$ stejnoměrně na $[a,b]$, má $f(x)$ na $[a,b]$ spoj. derivaci a platí $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

(2) Předpoklady poslední věty lze zeslabit. Stačí předpokládat konvergenci řady $\sum f_n(x)$ [posl. $\{f_n(x)\}$] v jediném bodě $x_0 \in [a,b]$.

Příklady

(1) Najděte obor konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

obor $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$

řada je konvergentní, když $|x|<1$, tedy $x \in (-1,1)$, je-li $x = 1 \Rightarrow$ harm. řada – není konv., $x=-1 \Rightarrow$ $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ $\lim \frac{1}{n} = 0$, dle Leibnitzova kriteria $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje $\Rightarrow$ $D = [-1,1)$.

$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $f_n'(x) = x^{n-1}$

$\sum f_n'(x)$ konvergují stejn. na $[-q, q]$, kde $0 < q < 1$.

$$[\sum f_n(x)]' = \sum f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum f_n(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln|x-1| + C$$

C zjistíme takto:

$x = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

Tedy $\sum f_n(x) = \underline{-\ln|x-1|}$

Potenční řady

Pojem a vlastnosti potenčních řad

Definice

Potenční (mocninná) řadou rozumíme řadu tvaru $\sum_{n=0} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$

kde $a_0, a_1, \dots, x_0$ jsou reálná čísla, čísla $a_0, a_1, \dots$ se nazývají koeficienty, číslo x_0 střed dané potenční řady.

Pozn:

Je-li $x_0 = 0$, dostaneme řadu tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, jež má střed v počátku. Poněvadž lze každou obec. pot. řadu jedn. lin. substit. $x - x_0 = x$ převést na řadu se středem v počátku, budeme nadále uvažovat pouze řady tvaru $\sum_{n=0} a_n x^n$.

V| **První Abelova věta**

Nechť potenční řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje v čísle $x_0 \neq 0$. Pak tato řada konverguje absolutně pro vš. x takové, že $|x| < |x_0|$.

V] Nechť mocninná řada $\sum_{n=0} a_n x^n$ diverguje v nějakém čísle x_0. Pak diverguje v každém čísle x, pro něž platí $|x| > |x_0|$.

Poznámka

Každá mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje ve svém středu, tj. v čísle $x=0$. Může se stát, že v každém jiném čísle x diverguje. Pak řekneme, že tato řada vždy diverguje. [illegible] ex. mocninné řady, které konvergují v každém čísle x. O takové řadě řekneme, že vždy konverguje.

V] Jestliže mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ani vždy nekonverguje, ani vždy nediverguje, pak existuje takové reálné číslo $R>0$, že tato řada konverguje, a to absolutně, pro všechna x, pro něž $|x|<R$ a diverguje pro všechna x, pro něž $|x|>R$.

Definice

Číslo R se nazývá poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a interval $(-R,R)$ intervalem konvergence této řady. Jestliže řada $\sum_{n=0} a_n x^n$ vždy konverguje, pak definujeme $R=\infty$. Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vždy diverguje, def. $R=0$.

V bodech $R, -R$ může, ale nemusí konvergovat.

Pozn.

Má-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ o středu x_0 poloměr konvergence R, kde $0<R<\infty$, pak její interval konvergence je (x_0-R, x_0+R).

V] Věta Cauchy-Hadamardova

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0} a_n x^n$ je roven:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Přitom klademe $\frac{1}{t}=\infty$, je-li $t=\limsup \sqrt[n]{|a_n|}=0$ a $\frac{1}{t}=0$, je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}=\infty$.

Poznámka

Ex.-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, platí $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, v tomto případě tedy $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Podobně ex.-li $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, plyne z věty na str. 28, že ex. i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ a obě jsou si rovny; je tedy i v tomto případě $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

Příklady

Najděte poloměr konvergence:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; $R = \frac{1}{e}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$; $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{pro } n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$

; $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{pro } n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}$, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

V) Nechť potenční řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konverg. $R \geq 0$. Pak tato řada konverguje stejnoměrně na lib. int. $[a,b]$ obs. v int. konvergence.

V) Nechť potenční řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak součet této řady $s(x)$ je funkce spojitá na intervalu $(-R, R)$.

V) Druhá Abelova věta

Nechť potenční řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence R, kde $0 < R < \infty$. Nechť je v bodě $x = R$ ($x = -R$) konvergentní, pak součet $s(x)$ této řady je funkce zleva (zprava) spojitá v bodě $x = R$ ($x = -R$), tj. platí

$\lim_{x\to R-} s(x) = \sum a_n R^n$ $\left[\lim_{x\to -R+} s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n\right]$.

VI Nechť potenční řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R>0$. Pak v lib. int. $[a,b]$, pro nějž $[a,b] \subseteq (-R,R)$ lze tuto řadu integrovat člen po členu, tj. platí

$$\int_a^b \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum a_n \int_a^b x^n dx = $$
$$= \sum \frac{a_n}{n+1} b^{n+1} - \sum \frac{a_n}{n+1} a^{n+1}.$$

VI Nechť potenční řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $R>0$. Pak pro každé $x \in (-R,R)$ platí

$$\int_0^x \left(\sum a_n t^n\right) dt = \sum a_n \int_0^x t^n dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

přičemž potenční řada na pravé straně má týž poloměr konvergence R.

Pozn.

Věta platí i tehdy, když nahradíme číslo 0 lib. číslem $x_0 \in (-R,R)$.

VI Nechť potenční řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $R>0$. Pak součet $s(x)$ této řady má na int. $(-R,R)$ derivaci, kterou obdržíme derivováním člen po členu, tj. platí $s'(x) = \left(\sum a_n x^n\right)' = \sum n a_n x^{n-1}$.

Důsledek:

Součet potenční řady má na konv. int. derivace všech řádů, přičemž k-tou derivaci obdržíme k-násobným derivováním člen po členu.

Příklad

Integrace řady $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

$R=1$, neboť uv. řada konv. pouze pro $|x|<1$. V int. $[0,x]$ a $|x|<1$ podle uv. věty platí

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$
$$= \sum (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Podle 2. Abelovy věty uvedený vztah platí pro $x \in (-1,1]$

Taylorova řada

Definice

Nechť $f(x)$ je funkce, která má v bodě x_0 derivace všech řádů. Taylorovou řadou této funkce v bodě x_0 rozumíme řadu $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Pro $x_0 = 0$ mluvíme o Maclaurinově řadě.

$S_n(x) = T_n(x)$ (n-tý Taylorův polynom)

Poznámka

Taylorova řada nemusí mít součet $f(x)$ v žádném okolí bodu x_0.

V) Taylorova řada funkce $f(x)$ konverguje na otevřeném intervalu k funkci $f(x)$ tehdy a jen tehdy, když pro posloupnost příslušných Taylorových zbytků platí $\lim R_n(x) = 0$ na tomto intervalu.

V) Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 a nějakém jeho okolí derivace všech řádů, které jsou stejnoměrně ohraničeno, pak Taylorova řada této funkce v bodě x_0 konverguje v daném okolí k funkci $f(x)$.

V) Základní elementární funkce mají tyto Maclaur. rozvoje:

(1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$

(2) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$

(4) $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ pro $x \in (-1, 1]$

(5) $(1+x)^k = 1 + \binom{k}{1} x + \binom{k}{2} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$ pro $x \in (-1, 1)$

(6) $\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ pro $x \in [-1, 1]$.

V) Potenční řada je v konverg. intervalu Taylorovým rozvojem svého součtu.

V) Věta o jednoznačnosti

Je-li možno funkci $f(x)$ v nějakém okolí bodu x_0 rozvinout do potenční řady, je takový rozvoj pouze jeden a je zároveň Taylorovým rozvojem této funkce v bodě x_0.

Příklady

(1) Najděte Maclaurinovy rozvoje funkcí $\cosh x$, $\sinh x$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$

(2) Určete Maclaur. rozvoj funkce

$$\frac{1}{x^2-3x+2}$$

Rozložíme na parc. zlomky:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1,1)$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^n} \dots (-2,2)$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 \dots$$

$$\dots + \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \dots (-1,1)$$

Dělení potenčních řad

Při výpočtu podílu $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$ postupujeme takto:

1) Je-li $b_0 \neq 0$, hledáme podíl ve tvaru potenční řady (s neurč. koef.):

$$\frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} = \sum c_n x^n \Rightarrow \sum a_n x^n = \sum b_n x^n \sum c_n x^n$$

Srovnáním koeficientů obdržíme systém rovnic pro neznámé c_n.

2) Je-li $b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$; $b_k \neq 0$, hledáme podíl ve tvaru

$$\frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} = \frac{1}{x^k}\sum c_n x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^k \sum a_n x^n = \sum b_n x^n \cdot \sum c_n x^n$$

Srovnáním koeficientů obdržíme systém rovnic pro c_n.

Příklad

Najděte rozvoj funkce $\frac{1}{x^2\cosh x}$ do nekonečné řady!

$$x^2\cosh x = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} + \dots + \frac{x^{2n+2}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{x^2\cosh x} = \frac{1}{x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{4!}+\dots+\frac{x^{2n+2}}{(2n)!}} =$$

$$= \frac{1}{x^2}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

$$x^2 = \left(x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} + \dots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

$c_0 = 1 \qquad c_1 = 0$

$c_2 + \frac{c_0}{2!} = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$; $c_3 + \frac{c_1}{2!} = 0$, $c_3 = 0 = c_5 = c_7$

$c_4 + \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!} = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{5}{24}$

$c_6 = \frac{c_4}{2!} + \frac{c_2}{4!} + \frac{c_0}{6!} = 0 \Rightarrow c_6 = -\frac{61}{720}$

$$\frac{1}{x^2\cosh x} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 - \frac{61}{720}x^6 + \dots\right)$$

Užití potenčních řad

① Přibližný výpočet funkčních hodnot

Příklady:

(1) vyp. přibl. sin 18° tak, že vezmete 3 členy rozvoje funkce sin x do pot. ř.; určete max. vel. chyby.

$\sin x \doteq \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$; za $x = \frac{\pi}{10}$

$|R_3| < \frac{\pi^7}{7!\,10^7}$ (viz kap. o odhadu chyby)

Pozn. Jindy napsat se zadanou přesností z odkadu vypočteme, kolik členů rozvoje je třeba vzít.

(2) vyp. $\sqrt[5]{250}$ s přesností 0,001.

Nelze psát ve tvaru $(249+1)^{\frac{1}{5}}$, neboť $249 \notin (-1,1)$, což je def. obor této řady. Najdeme ~~nejbližší~~ číslo, jehož pátá mocnina je nejblíže čísla 250, tj. $3^5 = 243$ a vzepíšeme v násl. tvaru:

$$\sqrt[5]{250} = \sqrt[5]{243+7} = \sqrt[5]{243\left(1+\frac{7}{243}\right)} =$$

$= 3\cdot\left(1+\frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$, kde $\frac{7}{243} \in (-1,1)$.

Dále postup. stejně jako v před. př.

(3) Vypočtěte $\ln 2$ s přesností 0,0001.

Jelikož řada $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \dots$ roste velice pomalu (bylo by zapotřebí k dos. dané přes. přibl. mnoho členů), použijeme rozvoje $\ln \frac{1+x}{1-x}$

$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \dots$

$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$

$\ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots$

$\frac{1+x}{1-x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Další postup stejný jak v příkl.

② Přibližný výpočet určitých integrálů:

(1) Vyp. přibl. $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ tak, že sečteme 3 čl. rozvoje fce do Maclaur. řady.

$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots$

Obor konv.: $(-\infty, \infty)$ $\quad [0, \frac{1}{4}] \subset (-\infty, \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ řada konv. stejn. na $[0, \frac{1}{4}] \Rightarrow$

lze integrovat člen po členu

$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots \right]_0^{\frac{1}{4}} \doteq$

$\doteq \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{10 \cdot 4^5} - \dots$

Uvedenujem způsobem lze vyjádřit i funkci $\operatorname{Si} x = \int^x \frac{\sin x}{x} dx =$

$= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

③ Řešení diferenciálních rovnic

Příklad:

$x y'' + 2y' + xy = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Předp., že y lze rozv. do pot. řady o RSO, potom $\Rightarrow$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

Platí tedy:

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$

Převedeme řady na nejnižší spol. mocninu:

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0$

$2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n+1) a_n + a_{n-2} \right] x^{n-1} = 0$

$2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$n(n+1) a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-2}}{n \cdot (n+1)}$

$a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = a_5 = \dots = 0$

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!}\ ;\quad a_4 = \frac{-a_2}{4\cdot 5} = \frac{a_0}{5!}\ \ldots$$

$$\ldots\ a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(2k+1)!}$$

a_{2k} jsou vyjádřeny obecně (tedy i tak), protože neznáme a_0.
Podmínka $y(0)=1 \Rightarrow y(0)=a_0=1$ ..
tzn. $a_0=1$ .. dosaď jedno z řešení
$y'(0) = a_1 = 0$ ... zkus. platí!

Nejčastější konvergentní řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\ ;\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{11}{18}$$

geom. řada: $\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n = \frac{a}{1-q}$ pro $|q|<1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pro $p>1$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ pro $0<p\leq 1$ ... relativně
$p>1$ ... absolutně

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ pro $p>1$

Leibnitzova řada: $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$

$\sum \ln^n x$ pro $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$

$\sum x^{n^2}$ pro $x \in (-1, 1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ pro $x \in (-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad \text{pro } x\in(-1,1]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = (1+x)^k \quad \text{pro } x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} x \quad \text{pro } x\in[-1,1]$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x \quad \text{pro } x\in(-\infty,\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sinh x \quad \text{pro } x\in(-\infty,\infty)$$

$$\left.\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{k} \sin nx\right| &\leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \\ \left|\sum_{n=1}^{k} \cos nx\right| &\leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \end{aligned}\right\} \text{pro } x\neq 2l\pi$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} \sin nx &= 0 \\ \sum_{n=1}^{k} \cos nx &= k \end{aligned}\right\} \text{pro } x = 2l\pi$$

Z Dirichletova kritéria plyne následující tvrzení:

Nechť $a_n \to 0$ monotónně, pak

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ konv. pro vš. x

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ konv. pro $x \neq 2l\pi$.

Odtud plyne konv. řad:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \sin nx}{n}$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n}\cdot \sin\frac{\pi n}{4}$ pro vš. x.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ pro $x \neq 2k\pi$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx_1 \cdot \cos nx_2}{n}$ pro vš. x_1, x_2

$\left(\sin nx_1 \cos nx_2 = \frac{1}{2}\left[\sin n(x_1+x_2) + \sin n(x_1-x_2)\right]\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ (z předch. pro $x_1 = x, x_2 = \pi$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx_1 \cdot \cos nx_2}{n} \iff \begin{array}{l} x_1 + x_2 \neq 2k\pi \\ x_1 - x_2 \neq 2k\pi \end{array}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n} \iff x \neq (2k-1)\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n} \quad \ldots \text{relativně}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \\ \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} \end{array}\right\} \text{konv.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} \quad \text{div.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Nejčastější divergentní řady

geom. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$ pro $|q| \geq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pro $p \leq 1$

Harm. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (v případě $p=1$)

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ pro $p \leq 0$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ pro $p \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} \; ; \left(\frac{\sin^2 n}{n} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\Sigma \text{ div.}} - \underbrace{\frac{\cos 2n}{2n}}_{\Sigma \text{ konv.}} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} \; ; \quad \frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$