

9.1. Fourierova řada (FŘ).

Komplexní harmonické kmity:

$$E = \{e_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi k t}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \omega_k t} = \frac{1}{\sqrt{T}} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t),$$

kde pro $k \neq 0$ značí

$$f_k = \frac{|k|}{T} \quad \dots \quad \text{frekvenci } |k|\text{-ho harmonického kmitu s periodou } \frac{T}{|k|},$$

$$\omega_k = 2\pi f_k \quad \dots \quad \text{jeho úhlovou rychlost.}$$

E je ortonormální systém v $L_2([0, T])$:

$$\langle e_j, e_k \rangle = \int_0^T e_j(t) \overline{e_k(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i \frac{2\pi(j-k)t}{T}} dt = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = k \\ 0 & \text{pro } j \neq k \end{cases}$$

E je dokonce úplný (báze) v $L_2([0, T])$ (bez důkazu):

$$x(t) \in L_2([0, T]) \text{ libovolná a } T\text{-periodická} \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e_k(t),$$

kde řada konverguje (bez ohledu na pořadí) dle normy $\|\cdot\|_2$ v prostoru $L_2([0, T])$ a souřadnice x_k jsou jednoznačně určeny vztahem

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{\delta_{j,k}} = x_k.$$

Komplexní tvar rozvoje do Fourierovy řady:

$$\underline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_k \rangle}_{c_k(x)} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c_k(x) e^{i \omega_k t}},$$

kde

(9.1)

$$\underline{c_k := c_k(x)} = \frac{1}{\sqrt{T}} \langle x, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i \omega_k t} dt = \underline{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i \omega_k t} dt}.$$

- c_k ... k -tý komplexní Fourierův koeficient funkce x ,
- c_0 ... střední hodnota (stejnoseměrná složka) funkce x ,
- $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$... komplexní fourierovské spektrum funkce x ,
- $x_k(t)$:= $c_k e^{i \omega_k t} + c_{-k} e^{-i \omega_k t}$, $k \geq 1$
- ... k -tá harmonická komponenta funkce x o frekvenci f_k .

Tvrzení 9.1 (Dirichletova věta). *Jestliže T -periodická funkce $x(t)$ má konečnou variaci na $[0, T]$, pak její FŘ konverguje bodově k $x(t)$ v každém bodě t , kde je $x(t)$ spojitá a k $\frac{1}{2}(\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t))$ v každém bodě nespojitosti (u funkce s konečnou variací je to vždy pouze konečný skok).*

Důsledek 9.2 (viz [DoNo, Věta 8.4]).

Je-li T -periodická funkce $x(t)$ po částech spojitá a po částech monotónní na $[0, T]$, pak má konečnou variaci a její FŘ konverguje bodově k $x(t)$ v každém bodě t , kde je $x(t)$ spojitá a k $\frac{1}{2}(\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t))$ v každém bodě nespojitosti (u funkce po částech spojitě je to vždy pouze konečný skok).

Je-li $x(t)$ reálná funkce, lze (9.1) upravit na další dva ekvivalentní tvary:

Zřejmě $c_{-k} = \overline{c_k}$. Označíme-li

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k); \quad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

pak $c_0 = \frac{a_0}{2} \in \mathbb{R}$, $b_0 = 0$ a dostáváme

Goniometrický tvar Fourierovy řady:

$$\begin{aligned}\underline{x(t)} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{i\omega_k t} + \underbrace{c_{-k} e^{-i\omega_k t}}_{c_k e^{i\omega_k t}}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}(c_k e^{i\omega_k t}) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),\end{aligned}$$

kde

(9.2)

$$\underline{a_k} = 2\operatorname{Re}(c_k) = \underline{\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_k t dt},$$

$$\underline{b_k} = -2\operatorname{Im}(c_k) = \underline{\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_k t dt}.$$

Položíme-li $a_k = A_k \cos \varphi_k$ a $b_k = A_k \sin \varphi_k$, dostaneme

Amplitudově-fázový tvar Fourierovy řady:

$$\underline{x(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\cos \varphi_k \cos \omega_k t + \sin \varphi_k \sin \omega_k t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k \cos(\omega_k t - \varphi_k)}_{x_k(t)}.$$

kde

(9.3)

$$A_k = 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}.$$

- A_k ... amplituda k -té harmonické složky funkce x ,
- φ_k ... fázový posuv k -té harmonické složky funkce x ($-\pi < \varphi_k \leq \pi$),
- $c_0 = \frac{a_0}{2}$... střední hodnota (stejnoseměrná složka) funkce x ,
- $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$... amplitudové spektrum funkce x ,
- $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$... fázové spektrum funkce x .

9.2. Parsevalova identita (PI).

Nechť $x \in L_2([0, T])$ (tj. s konečnou energií na intervalu $[0, T]$) je T -periodická, potom

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 &= \int_0^T |x(t)|^2 dt = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \sqrt{T} \underbrace{\frac{e^{i\omega_j t}}{\sqrt{T}}}_{e_j(t)}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sqrt{T} \underbrace{\frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{T}}}_{e_k(t)} \right\rangle \\ &= T \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_j \bar{c}_k \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{\delta_{j,k}} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.\end{aligned}$$

Odtud pak dostáváme:

Komplexní tvar Parsevalovy identity:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}_{\text{střední výkon na } [0, T]} < \infty \Rightarrow \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2. \quad (9.4)$$

Speciálně:

- $|c_0|^2$... střední výkon stejnosměrné složky,
- $\frac{1}{T} \int_0^T |x_k(t)|^2 dt = |c_{-k}|^2 + |c_k|^2$... střední výkon k -té harmonické složky.

Amplitudový tvar Parsevalovy identity (x reálná):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(|c_{-k}|^2 + |c_k|^2)}_{2|c_k|^2 = A_k^2/2} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt. \quad (9.5)$$

Speciálně:

$$\frac{a_0^2}{4} \dots \text{střední výkon stejnosměrné složky,}$$

$$\frac{A_k^2}{2} \dots \text{střední výkon } k\text{-té harmonické složky,}$$

$$\{2|c_k|^2\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{A_k^2}{2} \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (9.6)$$

... výkonová spektrální hustota,

$$\{2T|c_k|^2\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{TA_k^2}{2} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

... energetická spektrální hustota.

9.3. Diskretizace Fourierovy řady.

Vypočteme hodnoty rozvoje $x(t)$ do její komplexní FR (9.1) pouze na rovnoměrné diskrétní síti N subintervalů: $T = N\Delta t$, $x_n = x(n\Delta t)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Obdržíme

$$\underline{x}_n \stackrel{(9.1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{N\Delta t} n \Delta t} = \sum_{k=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \overbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+mN} \right)}^{\hat{c}_k} e^{i \frac{2\pi(k+mN)n}{N}} = \sum_{k=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \hat{c}_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}}. \quad (9.7)$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí celou část hodnoty.

Platí

$\hat{c}_k \approx c_k$, neboť $|c_k| \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \pm\infty$,

$\hat{c}_k = c_k$, pokud $c_k = 0$ pro $|k| \geq \frac{N}{2}$ (FR je konečná: $f_{max} \leq \frac{N}{2} \frac{1}{T}$ udává konečný frekvenční obsah $x(t)$),

$\{\hat{c}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je N -periodická posloupnost ($\hat{c}_k = \hat{c}_{k+mN}$, $m \in \mathbb{Z}$).

Po úpravě:

$$\underline{x}_n = \sum_{k=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{-1} \hat{c}_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \hat{c}_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}}, \quad (9.8)$$

kde první ze sum jsme upravili záměnou sčítacího indexu $r = k + N$ na tvar:

$$\sum_{k=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{-1} \hat{c}_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{r=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor + N}^{N-1} \hat{c}_{r-N} e^{i \frac{2\pi(r-N)n}{N}} = \sum_{r=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{N-1} \hat{c}_r e^{i \frac{2\pi rn}{N}}$$

s využitím vztahů

$$-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor + N = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1 \text{ a } \hat{c}_r = \hat{c}_{r-N} \text{ pro } r = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1, \dots, N-1 \text{ (} N\text{-periodicita).}$$

Označíme-li $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$ vzorky $x(t)$ na její jedné periodě a $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_0, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{N-1})^T$ odhady Fourierových koeficientů, pak (9.8) určuje tzv. **operátor diskrétní Fourierovy transformace** ($\mathbf{x} = \text{DFT}_N^+(\hat{\mathbf{c}})$) dle následující definice.

Definice 9.1 (Diskrétní Fourierova transformace (DFT)).

$\text{DFT}_N^\pm : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ je lineární operátor $\mathbf{X} = \mathbb{W}_N^\pm \mathbf{x}$ určený maticí $N \times N$:

$\mathbb{W}_N^\pm = [W_N^{kn}]_{0 \leq k, n \leq N-1}$, kde $W_N = e^{\pm i \frac{2\pi}{N}}$ je N -tá primitivní odmocnina z 1, tj.

$W_N^N = 1$, ale $W_N^k \neq 1$ pro $k = 1, \dots, N-1$. Tedy

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})^T, \quad \text{kde } X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm i \frac{2\pi kn}{N}} x_n \text{ pro } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zřejmě \mathbb{W}_N^\pm je symetrická matice a $(\mathbb{W}_N^\pm)^* = \mathbb{W}_N^\mp$.

Věta 9.2 (Věta o inverzi).

Platí $\mathbb{W}_N^\pm \mathbb{W}_N^\mp = \mathbb{W}_N^\pm (\mathbb{W}_N^\pm)^* = NI_N$ a tedy $(\mathbb{W}_N^\pm)^{-1} = \frac{1}{N} \mathbb{W}_N^\mp$ a $\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbb{W}_N^\pm$ je unitární matice.

Důkaz. Označme $A := [a_{r,s}] = \mathbb{W}_N^\pm \mathbb{W}_N^\mp$, pak

$$a_{r,s} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{rn} W_N^{-ns} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(r-s)} = \sum_{n=0}^{N-1} q^n, \quad q = W_N^{r-s}.$$

Odtud

$$a_{r,s} = \begin{cases} N & \text{pro } r = s \\ \frac{q^N - 1}{q - 1} = 0 & \text{pro } r \neq s \end{cases},$$

neboť $q^N = W_N^{N(r-s)} = 1$ a $q \neq 1$ pro $r \neq s$ v důsledku $0 < |r - s| \leq N - 1$. □

Poznámka 9.3. V systému MATLAB jsou operátory DFT_N^\pm realizovány pomocí algoritmu tzv. **rychlé Fourierovy transformace** implementovaných v procedurách **fft** a **ifft** takto:

$$\underline{\mathbf{X}} = \mathbb{W}_N^- \mathbf{x} = \text{DFT}_N^-(\mathbf{x}) = \underline{\text{fft}(\mathbf{x})}$$

a

$$\underline{\mathbf{x}} = (\mathbb{W}_N^-)^{-1} \underline{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \mathbb{W}_N^+ \underline{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \text{DFT}_N^+(\underline{\mathbf{X}}) = \underline{\text{ifft}(\underline{\mathbf{X}})}.$$

Důsledek 9.4. Podle (9.8), věty 9.2 a poznámky 9.3 platí

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbb{W}_N^+ \underline{\hat{\mathbf{c}}} = \text{DFT}_N^+(\underline{\hat{\mathbf{c}}}) = \underline{\text{nifft}(\underline{\hat{\mathbf{c}}})},$$

$$\underline{\hat{\mathbf{c}}} = (\mathbb{W}_N^+)^{-1} \underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \mathbb{W}_N^- \underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \text{DFT}_N^-(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\frac{1}{N} \text{fft}(\underline{\mathbf{x}})}.$$