

Přednáška 6

Vícekriteriální metody

Jana Soukopová

soukopova@econ.muni.cz

Definice – Vícekriteriální hodnocení

- Disciplína operačního výzkumu, která se zabývá analýzou rozhodovacích situací, ve kterých jsou posuzovány rozhodovací varianty (v našem případě varianty veřejných projektů) ne pouze podle jednoho, ale podle několika zpravidla navzájem konfliktních kritérií.
-

Klasifikace vícekriteriálních úloh

- podle charakteru množiny rozhodovacích variant:
 - **vícekriteriální hodnocení variant**, kdy je množina přípustných variant zadána ve formě konečného seznamu,
 - **vícekriteriální programování**, kde je množina přípustných variant vymezena souborem podmínek, které rozhodovací varianty musí splňovat, aby byly přípustné.
-

Popis vícekriteriálních rozhodovacích situací

Vícekriteriální rozhodovací problémy jsou popsány množinou variant, množinou hodnotících kritérií a řadou vazeb mezi kritérii a variantami, které umožní definovat hodnotící funkce a metodou výběru což umožňuje formulovat vícekriteriální matematický model.

Formulace úlohy vícekriteriální analýzy

je dán:

■ seznam variant $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

■ seznam hodnotících kritérií

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_k\}$$

■ každá varianta $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ je podle těchto kritérií popsána vektorem kritériálních hodnot $(y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik})$.

■ úloha vícekriteriálního hodnocení variant je pak vyjádřena ve tvaru kritériální matice:

$$Y = (y_{ij})$$

Kriteriální matice rozhodování

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & & & & y_{2k} \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{nk} \end{pmatrix}$$

- Kde y_{ik} je hodnocení i -té varianty projektu podle k -tého kritéria
 - Pro zjednodušení předpokládáme že všechna kritéria jsou maximalizační
-

Cíl vícekritériálního hodnocení

- Cílem metody výběru je najít variantu a_{opt} resp. množinu D variant, které by podle všech kritérií dosáhly co nejlepšího ohodnocení (tedy nejvyšších hodnot kritérií), přičemž jako nejlepší varianta a_{opt} může být vyhodnocena pouze některá nedominovaná varianta.
-

Dominovaná a nedominovaná varianta

Nedominovanou varianta

- Projekt, ke kterému neexistuje v množině variant (projektů) jiná varianta, lépe hodnocená alespoň podle jednoho kritéria a ne hůře podle ostatních kritérií.

Dominovaná varianta

- Opačný případ, a říkáme, že ji „lepší“ varianta z uvedené definice dominuje.
-

Výběr nejlepší varianty

□ Nejlepší varianta

- Máme-li vybrat pouze jednu nejlepší variantu, musíme pomocí metody (funkce) výběru **vybírat jen z množiny D variant nedominovaných.**

□ Úplné řešení

- **Úplným** řešením matematického modelu vícekritériálního hodnocení variant je **množina nedominovaných variant D** tato množina však může být značně rozsáhlá a může být i totožná s původní množinou všech variant A .
-

Ideální a bazální varianta

Ideální varianta

- Teoreticky nejlepší varianta
- Varianta, která dosahuje ve všech kritériích nejlepší možné hodnoty, se nazývá **ideální varianta** $I = (I_1, I_2, \dots, I_k)$

Bazální varianta

- teoreticky nejhorší varianta
- varianta, která má všechny hodnoty kritérií na nejnižším stupni se nazývá **bazální varianta** $B = (B_1, B_2, \dots, B_k)$

Ideální i bazální varianta jsou v hodnocení více-méně hypotetickými variantami

Vyjádření hodnot kritérií

- Hodnocení variant podle jednotlivých kritérií může být v různých jednotkách a různých měřítcích.
 - Důležitá je potom transformace vstupních informací na srovnatelné jednotky, umožňující agregaci podle všech kritérií.
 - To umožňují **stupnice a škály**, které patří mezi nejjednodušší metody vícekritériálního hodnocení.
-

Stupnice a škály

- nominální (binární) stupnice,
 - ordinální stupnice,
 - klasifikační,
 - bodovací.
 - kardinální číselná stupnice
 - intervalová
 - poměrová
 - Speciální (expertní) stupnice a škály
 - Likertova stupnice,
 - sémantická diferenční stupnice,
 - numerická hodnotící stupnice,
 - pořadová stupnice, apod
-

Nominální stupnice

- založena na operaci shody či neshody (rozdílu), která je vymezena binární logickou hodnotou 1 (shoda), resp. 0 (neshoda).
 - Nedostatkem hodnocení
 - není měřena preference jednotlivých kritérií ani nejsou uvažovány váhy jednotlivých kritérií, přičemž nelze předpokládat, že by tyto váhy byly identické.
-

Příklad

- Pro hodnocení tří variant projektů a_1, a_2, a_3 skladu nebezpečných odpadů byly zvoleny následující kritéria:
- k_1 kapacita nad 1 tunu NO,
 - k_2 dvojité dno,
 - k_3 manipulační prostředky,
 - k_4 mechanická váha,
 - k_5 nádoby pro více než 10 různých druhů NO.
- Hodnocení jednotlivých projektů pomocí binární stupnice je v následující kritériální matici:

$$Y = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordinální stupnice

- částečně překonávají výše uvedené slabiny
 - uspořádávají kritéria od nejvíce důležitého po nejméně důležité.
 - Používají se:
 - **klasifikační stupnice**, která jednotlivá kritéria hodnotí pomocí známkování (např. 1 – 5, kde 1 = nejlepší hodnota a 5 = nejhorší hodnota)
 - **bodovací stupnice**, která jednotlivá kritéria ohodnocuje v rámci dané škály (např. 1 – 10, kde 1 = nejhorší hodnota, 10 = nejlepší hodnota).
 - Hodnoty kritérií však vypovídají pouze o pořadí kritérií, nikoli o intenzitě preferencí.
-

Příklad

Na základě expertního posudku je třeba zvolit vhodnou lokalitu pro výstavbu vodní větrné elektrárny. Tato lokalita bude vybrána podle čtyř kritérií.

- k1 Počet pracovních sil, které budou nutné k provozu elektrárny - max**
- k2 Celkový objem (v MW) - max**
- k3 Investiční náklady na výstavbu (v mil. Kč) - min**
- k4 Stupeň spolehlivosti provozu dle 10 stupňové stupnice (tedy minimalizace negativních důsledků pro obyvatelstvo) - max**

Krajskému úřadu se přihlásily 4 projekty, které byly ohodnoceny podle uvedených kritérií. Proved'te hodnocení a výběr metodou váženého součtu. Hodnocení expertů vidíte v kritériální matici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 33 & 11 & 9 \\ 2 & 28 & 8,5 & 10 \\ 3 & 43 & 14,5 & 10 \\ 1 & 39 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Příklad

Ohodnoťte tyto projekty podle bodovací stupnice ve škále 1-100

$$\begin{pmatrix} 3 & 33 & 11 & 9 \\ 2 & 28 & 8,5 & 10 \\ 3 & 43 & 14,5 & 10 \\ 1 & 39 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 100 & 77 & 73 & 90 \\ 67 & 65 & 94 & 100 \\ 100 & 100 & 55 & 100 \\ 33 & 91 & 100 & 90 \end{pmatrix}$$

Celkové ohodnocení projektů

340, 326, 355, 314 – pořadí a_3, a_1, a_2, a_4

Příklad

Ohodnoťte tyto projekty podle klasifikační stupnice ve škále 1-4

$$\begin{pmatrix} 3 & 33 & 11 & 9 \\ 2 & 28 & 8,5 & 10 \\ 3 & 43 & 14,5 & 10 \\ 1 & 39 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Celkové ohodnocení projektů

9, 9, 7, 8 – pořadí a_3 , a_4 , a_2 a zároveň a_1

Kardinální číselná stupnice

□ **stupnice intervalová,**

- pro posuzování projektů jsou zvolena kvantitativní kritéria.
- Jako základní operace jsou používány shoda (=) a různost (<>).
- V intervalové stupnici určujeme měřící jednotky a počátek.

□ **stupnice poměrová,**

- počátek měřené vlastnosti je dán přirozeným počátkem měřené veličiny.
-

Likertova stupnice

- V případě, že kritéria nelze kvantifikovat, je možné použít přístup zohledňující „Fuzzy“ matematický přístup. Ten reprezentuje např. tzv. Likertova stupnice

Hodnota	Hodnocení
1	vůbec nesouhlasím
2	nesouhlasím
3	ani souhlas, ani nesouhlas
4	souhlasím
5	zcela souhlasím

Výhody a nedostatky stupnic a škál

- K jejich výhodám patří poměrně relativní jednoduchost při hodnocení alternativ.
 - K nevýhodám patří, že tyto postupy nerozlišují mezi důležitostí jednotlivých kritérií. Snad jen při použití intervalové stupnice můžeme z rozdílu hodnot mezi dvěma alternativami usuzovat na velikost preference.
-

Vyjádření preferencí mezi kritérii

- Informace o důležitosti kritérií může být vyjádřena ve tvaru:
 - aspiračních úrovní kritérií, tj. hodnot požadovaných pro akceptování rozhodnutí
 - = nejnižší hodnoty, kterých by v nejhorším případě měla varianta hodnocená podle jednotlivých kritérií dosáhnout. Varianty které dosáhnou alespoň požadované aspirační úrovně se nazývají akceptovatelné varianty, ostatní varianty jsou neakceptovatelné.
 - v ordinální formě pořadím důležitosti kritérií,
 - Stupnice a škály
 - v kardinální podobě pomocí vah kritérií.
-

Váhy

- důležitosti jednotlivých kritérií vyjadřujeme pomocí vektoru vah kritérií v (přičemž platí, že čím je kritérium významnější (resp. důležitější), tím je i jeho váha větší):

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_k), \quad \sum_{i=1}^k v_i = 1, \quad v_i \geq 0$$

Metody stanovení vah

- Metoda pořadí
 - Bodovací metoda
 - Metoda párového srovnávání kritérií (Fullerova trojúhelníku)
 - Saatyho metoda
-

Metoda pořadí

- vyžaduje od hodnotitele pouze uspořádání kritérií podle důležitosti.
- nejdůležitějšímu kritériu je přiřazena hodnota k (k je počet kritérií), druhému kritériu $k-1$ a nejméně důležitému 1.
- Označíme-li hodnotu přiřazenou i -tému kritériu symbolem p_i , potom lze odhad váhy tohoto kritéria získat pomocí následujícího vztahu (1):

$$v_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^k p_i} \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^k p_i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Metoda pořadí

- U projektu nákupu nových aut zvažujeme 3 kritéria, kterým přiřadíme hodnoty dle důležitosti

- k_1 Cena $p_1 = 3$

- k_2 Rychlost $p_2 = 1$

- k_3 Spotřeba $p_3 = 2$

- Dle metody pořadí stanovíme váhy

$$v_1 = \frac{3}{6}, v_2 = \frac{1}{6}, v_3 = \frac{2}{6} \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^3 p_i = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

Bodovací metoda

- vychází z kvantitativního ohodnocení důležitosti kritérií pomocí bodovací stupnice (např. od 1 do 10)
- čím je kritérium pro rozhodovatele důležitější, tím bude jeho bodové ohodnocení vyšší
- Označíme-li bodové ohodnocení i -tého kritéria symbolem p_i , potom lze odhad vah kritérií získat podle vztahu (1):

$$v_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^k p_i} \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^k p_i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Klasifikace vícekriteriálních metod

□ Fiala

- metody s informací o aspiračních úrovních kritérií,
- metody s ordinální informací o kritériích,
- metody s kardinální informací o kritériích.

□ My budeme používat

- metody založené na dílčím hodnocení variant,
 - metody založené na párovém srovnávání variant.
-

Klasifikace metod dílčího hodnocení

- zaleží, zda důsledky variant hodnotíme vzhledem ke kvalitativním či kvantitativním kritériím
 - Metody hodnocení na základě kvalitativních kritérií
 - Bodovací metoda
 - Metody hodnocení na základě kvalitativních kritérií
 - Metoda váženého součtu
-

Bodovací metoda

- Při této metodě hodnotitel přiřadí jednotlivé variantě určitý počet bodů ze zvolené stupnice vzhledem k daným kritériím
 - Čím lépe je daná varianta hodnocena, tím vyšší je její bodové ohodnocení vzhledem k tomuto kritériu.
 - Počet stupňů bodové stupnice závisí na rozlišovací schopnosti hodnotitele, která nemusí být pro všechna kritéria stejná.
-

Přiřazení bodů

- Maximální (resp. minimální) počet bodů přiřazený nejlepší (resp. nejhorší) hodnotě kritéria však musí být pro všechna kritéria stejný.
 - Nevylučuje se případ, kdy při hodnocení podle některého z kritérií žádná varianta nedosáhne tento extrémní počet bodů.
-

Výpočet

$$h_i = \sum_{j=1}^k v_j y_{ij} ,$$

kde

h_i je ohodnocení i -té varianty, $i = 1, 2, \dots, n$,

y_{ij} jsou hodnoty kritériální matice Y ,

v_j je normovaná váha j -tého kritéria, $j = 1, 2, \dots, k$

- varianty a_i se seřadí tak, že čím je větší hodnota h_i , tím více je i -tá varianta preferována.
-

Zhodnocení bodovací metody

- patří mezi nejjednodušší metody vícekritériálního hodnocení
 - rozlišuje mezi důležitostí kritérií
 - vhodná pro hodnocení téměř všech veřejných projektů
 - lze ji doporučit pro hodnocení vzájemně se vylučujících i vzájemně se nevylučujících veřejných projektů
 - zvláště vhodná je pro hodnocení veřejných projektů na základě **kvalitativních kritérií**.
-

Příklad bodovací metoda

V rámci OP Infrastruktura posuzujeme čtyři projekty v různých lokalitách. Tyto projekty označíme a_1, a_2, a_3, a_4 , takže množina rozhodovacích variant je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Vhodnost projektů (lokalit) se hodnotí podle následujících pěti kritérií:

- k_1 vliv na zaměstnanost
- k_2 přínos pro životní prostředí
- k_3 kvalita technologie
- k_4 cena

Expertí přičadili jednotlivým projektům body od 1 – 10 podle zvolených kritérií. Hodnocení jsou zřejmé z následující kritériální matice:

Kriteriální matice

$$Y = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Váhy

- Kritériím byly přiřazeny následující váhy

$$w_1 = 0,2$$

$$w_2 = 0,25$$

$$k_3 = 0,2$$

$$k_4 = 0,35$$

Bodovací metoda

□ Vyřešte pomocí bodovací metody

$$h_i = \sum_{j=1}^k v_j y_{ij} ,$$

$$h_1 = 5,7, h_2 = 7,2, h_3 = 5,85, h_4 = 6,7$$
