

# Přednáška č. 7

---

## Vícekriteriální metody

Jana Soukopová

[soukopova@econ.muni.cz](mailto:soukopova@econ.muni.cz)

# Metoda váženého součtu

---

angl. Weight Sum Approach - WSA,

- známá též pod názvem metoda vážených dílčích pořadí,
  - vychází z principu maximalizace užitku, ale předpokládá pouze lineární funkci užitku
-

# Postup výpočtu

---

- Vytvoří se normalizovaná kritériální matice  $R = (r_{ij})$ , jejíž prvky získáme z kritériální matice  $Y$  a jejích řádků odpovídajícím ideální ( $I$ ) a bazální ( $B$ ) variantě pomocí transformačního vzorce:

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - B_j}{I_j - B_j}$$

- Tato matice již představuje matici hodnot užitku  $i$ -té varianty podle  $j$ -tého kritéria
-

# Normalizovaná kritériální matice

---

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & & & & r_{2k} \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & r_{nk} \end{pmatrix}$$

---

# Užitek i-té varianty

---

- Při použití aditivní funkce užitku je potom užitek varianty  $a_i$  roven:

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^k v_j r_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

- Varianta, která dosáhne maximální hodnoty užitku je pak vybrána jako „nejlepší“, nebo jsou projekty jsou seřazeny na základě klesající hodnoty funkce užitku.
-

# Příklad metoda váženého součtu

---

*Na základě expertního posudku je třeba zvolit vhodnou lokalitu pro výstavbu vodní elektrárny. Tato lokalita bude vybrána podle šesti kritérií.*

- $k_1$       *Počet pracovních sil, které budou nutné k provozu elektrárny*
  - $k_2$       *Celkový objem (v MW)*
  - $k_3$       *Investiční náklady na výstavbu (v mld. Kč)*
  - $k_4$       *Celkové provozní náklady (v mil Kč)*
  - $k_5$       *Náklady na ŽP (v mil Kč)*
  - $k_6$       *Stupeň spolehlivosti provozu dle 10 stupňové stupnice (tedy minimalizace negativních důsledků pro obyvatelstvo)*
-

# Kriteriální matice

---

$$Y = \begin{pmatrix} 65 & 90 & 6 & 5,4 & 8 & 5 \\ 50 & 55 & 2 & 9,7 & 1 & 2 \\ 68 & 58 & 4 & 7,2 & 4 & 7 \\ 35 & 75 & 10 & 7,5 & 7 & 10 \\ 42 & 72 & 6 & 2,0 & 4 & 8 \\ 70 & 95 & 7 & 3,6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

---

# Převedení minimalizačních kritérií na maximalizační

---

$$Y' = \begin{pmatrix} 65 & 90 & 4 & 4,3 & 0 & 5 \\ 50 & 55 & 8 & 0,0 & 7 & 2 \\ 68 & 58 & 6 & 2,5 & 4 & 7 \\ 35 & 75 & 0 & 2,2 & 1 & 10 \\ 42 & 72 & 4 & 7,7 & 4 & 8 \\ 70 & 95 & 3 & 6,1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

---



# Stanovení vah

---

$$w_1 = 0,111$$

$$w_2 = 0,175$$

$$w_3 = 0,286$$

$$w_4 = 0,206$$

$$w_5 = 0,111$$

$$w_6 = 0,1111$$

---

# Ideální a bazální varianta

---

ideální varianta:

$$I = (70; 95; 8; 7,7; 7; 10)$$

bazální varianta

$$B = (35; 55; 0; 0,0; 0; 2).$$

---

# Normalizovaná kritériální matice

---

- Pomocí transformačního vzorce vytvoříme normalizovanou kritériální matici  $R$ .

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - B_j}{I_j - B_j}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,86 & 0,87 & 0,50 & 0,56 & 0,00 & 0,38 \\ 0,43 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,94 & 0,08 & 0,75 & 0,32 & 0,57 & 0,63 \\ 0,00 & 0,50 & 0,00 & 0,29 & 0,14 & 1,00 \\ 0,20 & 0,43 & 0,50 & 1,00 & 0,57 & 0,75 \\ 1,00 & 1,00 & 0,38 & 0,79 & 0,29 & 0,50 \end{pmatrix}$$

---

# Dílčí hodnoty užitku

---

- *Pomocí vzorce vypočteme dílčí hodnoty funkce užitku jednotlivých variant*

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^k v_j r_{ij},$$

$$u(a_1) = 0,548$$

$$u(a_2) = 0,443$$

$$u(a_3) = 0,532$$

$$u(a_4) = 0,274$$

$$u(a_5) = 0,593$$

$$u(a_6) = 0,645$$

---

# Řešení

---

- Na základě metody váženého součtu byly vypočteny hodnoty dílčích funkcí užitku.
  - Uspořádáním variant podle hodnot užitku dostáváme pořadí variant:
    - $a_6, a_5, a_1, a_3, a_2, a_4$ .
  - Maximální hodnoty užitku dosahuje varianta  $a_6$  a je vybrána jako nejlepší.
-

# Metody párového srovnání variant

---

- Lexikografická metoda
  - Metoda AHP
  - Metody třídy ELECTRE
-

# Hlavní rozdíl

---

- nezískáme číselné celkové ohodnocení jednotlivých variant, ale výsledkem je pouze rozklad souboru hodnocených variant na několik indiferenčních tříd a preferenční uspořádání těchto tříd
    - varianty obsažené v každé indiferenční třídě lze považovat za varianty rovnocenné z hlediska celého souboru kritérií.
-

# Společný rys

---

- základní informace pro stanovení preferenčního uspořádání variant tvoří výsledky párového srovnávání těchto variant vzhledem k jednotlivým kritériím hodnocení.
-



# Lexikografická metoda

---

- Jednodušší metoda vícekriteriální analýzy.
  - Postupně hodnotí varianty podle jednotlivých kritérií v pořadí jejich důležitosti.
-

# Postup metody

---

## **Krok 1**

Uspořádání kritérií podle důležitosti od nejdůležitějšího po nejméně důležité  $k_1, k_2, \dots, k_k$ ,

## **Krok 2**

Metoda vybírá z množiny variant  $A$ , podmnožinu  $A(1)$ , jejímiž prvky jsou varianty  $a_i$ , které dosahují maximální hodnoty podle nejvýznamnějšího kritéria  $k_1$ .

## **Krok 3**

Dále z množiny variant  $A(1)$  následně vybíráme podmnožinu variant  $A(2)$ , jejímiž prvky jsou varianty  $a_j$ , které dosahují maximální hodnoty podle druhého nejvýznamnějšího kritéria  $k_2$  na množině variant  $A(1)$ , atd.

---

# Výpočet

---

Proces výběru variant končí:

- když některá podmnožina  $A(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , je jednoprvková, potom je tato varianta považována za optimální.
  - když se projde všemi kritérii  $k_1, k_2, \dots, k_k$ , a podmnožina  $A(k)$  obsahuje více variant, které jsou z hlediska uvažovaných kritérií rovnocenné. Potom se podle nějakého dodatečného kritéria vybere jedna z nich jako kompromisní varianta.
-

# Využití lexikografické metody

---

- Ve veřejné správě
    - Ministerstva
    - Obecní úřady atd.
-

# Zhodnocení lexikografické metody

---

- často využívaná kvůli své jednoduchosti
  - Řada nevýhod.
  - Hlavní nevýhoda
    - při hodnocení se současně nepřihlíží k dosaženým hodnotám podle dalších kritérií.
  - Aby byla použitelná, nesmí existovat žádná vzájemná závislost mezi různými etapami volby, tedy žádné kritérium nesmí reagovat na utřídění získaná jinými kritérii!!!!
-

# Příklad - Lexikografická metoda

---

- *Na základě expertního posudku je třeba zvolit vhodnou lokalitu pro výstavbu elektrárny na zpracování bioodpadů, které vznikají v zařízeních veřejného stravování (restaurace, hotely, jídelny, menzy, školní kuchyně) a podle nového nařízení EU se nesmí dále zpracovávat na masokostní moučku v kafilériích. Tato lokalita bude vybrána podle šesti kritérií.*
-

# Kritéria

---

- $k_1$  *Počet pracovních sil, které budou nutné k provozu bioelektrárny*
  - $k_2$  *Celkový objem (v MW)*
  - $k_3$  *Investiční náklady na výstavbu (v mld. Kč)*
  - $k_4$  *Provozní náklady na provoz (v mil Kč)*
  - $k_5$  *Přepravní náklady na svoz bioodpadů (v mil Kč)*
  - $k_6$  *Stupeň spolehlivosti provozu dle 10 stupňové stupnice (tedy minimalizace negativních důsledků pro obyvatelstvo)*
-

# Kriteriální matice

---

$$Y = \begin{pmatrix} 60 & 90 & 6 & 5,4 & 8 & 12 \\ 50 & 55 & 8 & 10,6 & 3 & 2 \\ 68 & 58 & 6 & 7,2 & 4 & 7 \\ 35 & 75 & 10 & 7,5 & 7 & 10 \\ 42 & 72 & 9 & 1,8 & 4 & 8 \\ 80 & 100 & 7 & 3,6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

---



# Seřazení kritérií podle důležitosti

---

- $k_3$  *Investiční náklady na výstavbu (v mld. Kč) – max 7 mld Kč.*
- $k_6$  *Stupeň spolehlivosti provozu dle 10 stupňové stupnice (tedy minimalizace negativních důsledků pro obyvatelstvo) – min 7*
- $k_2$  *Celkový objem (v MW) – min 70 MW*
- $k_1$  *Počet pracovních sil, které budou nutné k provozu bioelektrárny – min 40 osob*
- $k_4$  *Provozní náklady na provoz (v mil Kč) – max 5 mil.*
- $k_5$  *Přepravní náklady na svoz bioodpadů (v mil Kč) – max 8 mil. Kč*
-

# Množina A1

---

- Zde je první výběr podle nejdůležitějšího kritéria

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 60 & 90 & 6 & 5,4 & 8 & 12 \\ 50 & 55 & 8 & 10,6 & 3 & 2 \\ 68 & 58 & 6 & 7,2 & 4 & 7 \\ 35 & 75 & 10 & 7,5 & 7 & 10 \\ 42 & 72 & 9 & 1,8 & 4 & 8 \\ 80 & 100 & 7 & 3,6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

---

# Množina A2 a A3

---

- Zde je výběr podle druhého nejdůležitějšího kritéria

$$A_2 = \{a_2, a_5, a_6\}$$

- A následně podle třetího nejdůležitějšího kritéria

$$A_3 = \{a_5, a_6\}$$

---

# Další postup a řešení

---

- Podle dalšího kritéria se nám množina nezmění, tedy

$$A_4 = \{a_5, a_6\}$$

- Podle dalšího kritéria je již množina jednoprvková

$$A_5 = \{ a_5 \}$$

---

# Metoda AHP (Saatyho metoda)

---

angl. Analytic Hierarchy Process

- Jednoduchá a účinná metoda
  - Vychází z posloupnosti párových srovnání vhodně stanovených částí systému
  - Spolu s bodovací metodou patří mezi nejčastěji používané metody vícekriteriální analýzy.
-

# Postup hodnocení

---

- Základem je párové srovnání

**Krok 1** Vytvoření hierarchické struktury cílů, expertů, kritérií a rozhodovacích variant v několika různých úrovních s rostoucí prioritou až po vrcholovou úroveň. Každá úroveň obsahuje části s podobnými vlastnostmi, které umožňují srovnání.

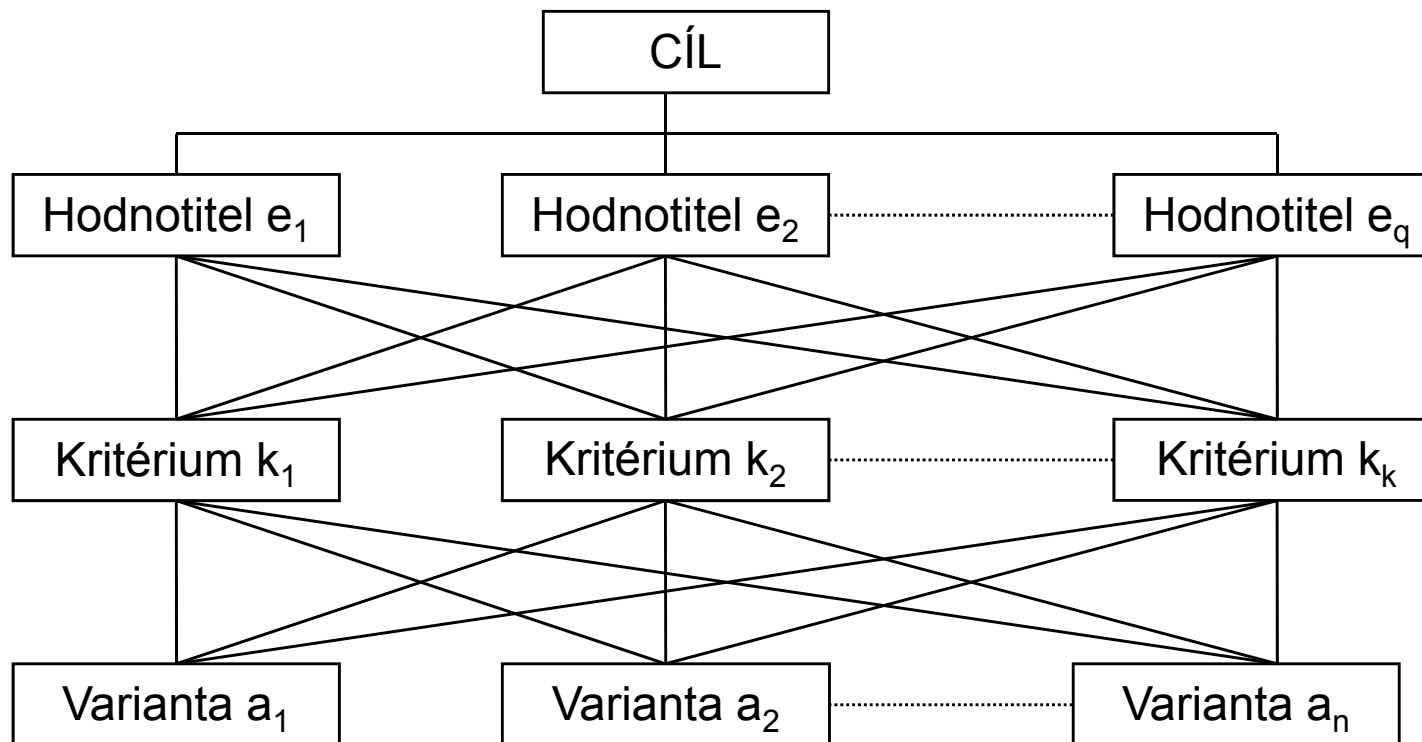
**Krok 2** Na každé úrovni hierarchie se provádí párové srovnání části systému. Počínaje vrcholovou úrovní se postupuje dolů a vytváří se matice párových srovnání, na jejímž základě se odhaduje vektor vah jednotlivých částí.

**Krok 3** Kombinují se odhadnuté váhy jednotlivých částí systému k získání agregovaných vah a vybere se varianta s největší agregovanou vahou.

---

# Základní hierarchická struktura

---



# Postup výpočtu

---

- Metoda AHP je metoda pro stanovení priorit, která odvozuje relativní priority na základě párových srovnání prvků na stejné hierarchické úrovni s využitím škály absolutních čísel 1 až 9.
- Absolutní čísla z této škály jsou aproximací poměru vah  $v_j/v_k$ , na jejichž základě je možno odvodit hodnoty vah  $v_j$  a  $v_k$ . Metoda AHP používá pro syntézu vah v hierarchické struktuře vztah

$$u_i = \sum_{j=1}^n v_j w_{ji}$$

Kde

- $w_{ji}$  jsou lokální váhy prvku  $i$  v dané úrovni vzhledem k prvku  $j$  z předchozí úrovně hierarchické struktury,
  - $v_j$  jsou váhy prvků předchozí úrovně hierarchické struktury,
  - $u_i$  je globální váha prvku  $i$  z hlediska všech prvků předchozí úrovně hierarchické struktury.
-



# Zhodnocení metody AHP

---

- AHP je metoda, která je vhodná pro hierarchické struktury systémů.
  - Pro hodnocení veřejných projektů na základní úrovni veřejné volby ji považují za příliš složitou.
  - V oblasti veřejného sektoru se často používá pro hodnocení a porovnání kvality péče o hospitalizované pacienty na různých klinikách.
-