2. Arbeitslosigkeit

„Auf die Arbeit schimpft man nur so lange, bis man keine mehr hat.“
Harry Sinclair Lewis

Ein anderes ökonomisches Phänomen von besonderem Interesse ist die Frage, wie viele Personen in einer Volkswirtschaft einer Erwerbsbeschäftigung nachgehen, bzw. wie vielen dies nicht möglich ist. Die Brisanz des Themas erklärt sich natürlich durch die potenzielle individuelle Betroffenheit, da der Verlust des Arbeitsplatzes bekanntermaßen neben den finanziellen Einbußen soziale und psychologische Negativeffekte zur Folge haben kann.

Man vergleiche dazu den Klassiker der empirischen Sozialforschung „Die Arbeitslosen von Marienthal. Ein soziographischer Versuch“ von Paul F. Lazarsfeld, Marie Jahoda und Hans Zeisel, Leipzig, 1933 (Suhrkamp Verlag, Frankfurt, 1975).

Die Arbeitslosenrate ist daher zu einer unumstrittenen Benchmark der Wirtschaftspolitik geworden, und viele Regierungen müssen ihre Performance daran messen lassen. Es ist also notwendig, sie im Verhältnis zu anderen wirtschaftlichen Kenngrößen zu analysieren, um erkennen zu können, ob relevante, für die Politik verwertbare Beziehungen bestehen.

Eine klassische Arbeit von Arthur Okun aus dem Jahre 1962 beschäftigt sich genau damit. Okun fand als erster eine stabile Beziehung zwischen der Arbeitslosenrate und dem Wirtschaftswachstum. Es ist eigentlich ein nahe liegender Zusammenhang, weil im Regelfall die Arbeitsnachfrage mit einem Anstieg des BIP ebenfalls zunimmt. Die zusätzliche Beschäftigung kann aus vier Quellen gespeist werden: Erstens in Form von Überstunden der bestehenden Belegschaft, zweitens aus einem zusätzlichen inländischen Arbeitsangebot von bisher nicht Arbeitssuchenden, drittens aus der Arbeitslosigkeit oder viertens aus dem Ausland.

Die Beziehung zwischen Wirtschaftswachstum und Arbeitslosenrate ist keineswegs starr, sondern hängt von einer Vielzahl von Faktoren ab. Die Produktionstechnologie der Wirtschaftszweige mit steigender Produktion bestimmt sowohl das Ausmaß des Beschäftigungsanstiegs als auch die Art der nachgefragten Fähigkeiten. Welche der vier Quellen des Arbeitsangebots die größte Übereinstimmung mit der nachgefragten Arbeitsleistung hat, bestimmt das Ausmaß in dem die Arbeitslosigkeit durch den Beschäftigungszuwachs abgebaut wird.

Es ist also klar, dass nicht die gesamte zusätzliche Beschäftigung aus den bisher Arbeitslosen gedeckt werden wird, sondern nur ein Teil. Daher sollte der Zusammenhang zwischen Wirtschaftswachstum und Arbeitslosenrate zwar negativ aber gleichzeitig unterproportional sein.

Im Titel der Arbeit von Okun kommt eigentlich nie das Wort Arbeitslosigkeit oder Wirtschaftswachstum vor!

Ja, das stimmt. Arthur Okun entwickelte seine Erkenntnisse ursprünglich als Berater von US-Präsident John F. Kennedy und dachte dabei eher an den optimalen Einsatz der Wirtschaftspolitik zur Erreichung von Vollbeschäftigung. Eine optimale Wirtschaftspolitik würde nur solange zusätzliche Nachfrage schaffen, wie es unterausgelastete Ressourcen gibt. Eine Steigerung der Nachfrage über dieses Niveau erzeugt einen unerwünschten Druck auf die Inflation. Damit man eine optimale Wirtschaftspolitik betreiben kann, braucht man also einen Schätzwert für den Potenzial-Output. Das ist das Outputniveau auf dem alle Ressourcen voll genutzt sind, aber noch kein Inflationsdruck durch eine allgemeine Überschussnachfrage besteht.

Die direkte Schätzung des Potenzial-Outputs ist an eine Vielzahl von Annahmen gebunden und dadurch umstritten. Deshalb ging Okun einen indirekten Weg. Ausgehend von der in den frühen 60‘er Jahren allgemein akzeptierten Zielgröße für die Arbeitslosenrate von *4%*, zeigt Okun, um wie viel das BIP geschmälert wird, wenn die Arbeitslosenrate höher als eben *4%* ist. Dadurch erhält er eine indirekte Schätzung für die Outputlücke, das ist der Abstand zwischen dem aktuellen Output-Niveau und dem Potenzial-Output. Anders ausgedrückt, definiert Okun den Potenzial-Output dadurch, dass die Arbeitslosenrate im Zustand der vollen Ausnutzung aller Kapazitäten genau *4%* beträgt.

2.1 Die Okun’sche Gleichung in ersten Differenzen

Das einfachste Verfahren zur Schätzung des Zusammenhangs zwischen Arbeitslosenrate und BIP ist die Nutzung erster Differenzen. In diesem Verfahren ist es nicht einmal notwendig explizit eine Ziel-Arbeitslosenrate zu definieren, weil durch das Differenzieren die Konstanten beider Zeitreihen unterdrückt werden. Arthur Okun nahm also die Veränderung der Arbeitslosenrate (in Prozentpunkten) u zwischen den Zeitpunkten t und $t-1$ und regressierte sie auf die Veränderungsrate des BIP (in Prozent) g_{Yt} für dieselbe Periode. Sein Ergebnis lautete

$$u_t - u_{t-1} = 0.30 - 0.30\, g_{yt}.$$

Bei einem zusätzlichen Wirtschaftswachstum von *1%* sinkt also die Arbeitslosenrate um *0.3* Prozentpunkte oder – wesentlich bekannter – zum Abbau der Arbeitslosenrate um *1* Prozentpunkt ist umgekehrt ein Wirtschaftswachstum von *1% /0.3 = 3.3%* (der Okun Koeffizient) notwendig.

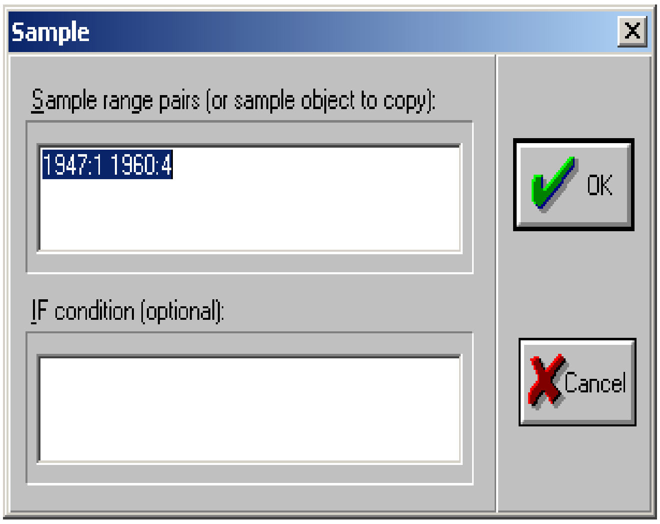
Wie kann man diesen Koeffizienten eigentlich auf eine optimale Wirtschaftspolitik umlegen?

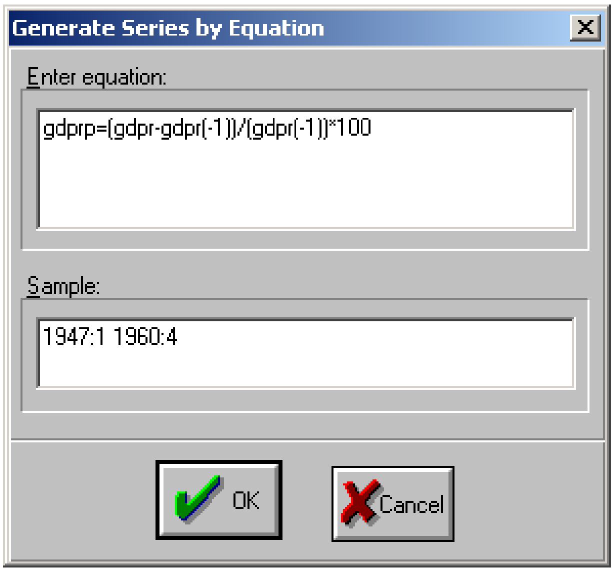
Nun, wenn die Arbeitslosenrate z. B. *5%* beträgt, wäre das ein Zeichen für eine Output-Lücke von *3.3%*. Durch eine Ausweitung der aggregierten Nachfrage in genau diesem Ausmaß, könnte das aktuelle BIP in Übereinstimmung mit dem Potenzial-Output gebracht werden. Dadurch würde die Arbeitslosigkeit um *1* Prozentpunkt sinken und kein Inflationsdruck entstehen. Die Höhe des Potenzial-Outputs kann man überdies aus der Gleichung $p_t = Y_t\,[1 + 0.033(u_t - 4)]$ bestimmen.

Okun (1962) gibt diese Gleichung geringfügig abweichend dazu als $p_t = Y_t\,[1+0.032(u_t - 4)]$ an. Er verwendet dafür ein subjektiv gewichtetes Mittel aus dem obigen und zwei anderen Analyseansätzen. Die zu diesen alternativen Ansätzen gehörigen Regressionen sind Teil der Übungsaufgaben am Ende des Kapitels.

Versuchen wir nun Okuns Regression nachzuvollziehen. Die Daten dafür bezogen sich auf die USA und deckten die Periode zwischen dem zweiten Quartal 1947 und dem vierten Quartal 1960 ab.

Im Workfile „02_usa“ stehen die Arbeitslosenraten ur und die Werte für das reale BIP gdpr quartalsweise für einen größeren Zeitbereich zur Verfügung. Deshalb muss zuerst der Zeitbereich richtig gesetzt werden. Dazu wählt man entweder in der Hauptleiste Proc – Sample oder in der Workfile-Leiste Sample um zum neben stehenden Eingabefenster zu gelangen. Damit ist der Zeitbereich für alle weiteren Operationen auf die von Okun verwendete Periode eingeschränkt.

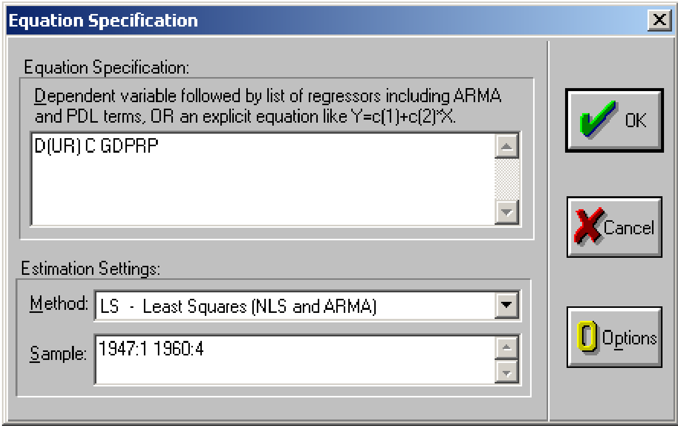




Nachdem nun noch mittels Quick – Generate Series im Menü eine Variable gdprp für die BIP-Wachstumsrate g_{yt} erzeugt wurde, lässt sich diese erste, einfachste Variante von Okuns Regression ohne Probleme durchführen.

In EViews muss dazu nur noch nach Quick – Estimate Equation die neben stehenden Einträge durchgeführt werden.

Die EViews-funktion D(.) bezeichnet den Differenzenoperator $\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$, es geht also die dem ersten Quartal 1947 zugehörige Beobachtung „verloren“, EViews justiert den Zeitbereich hierbei automatisch.



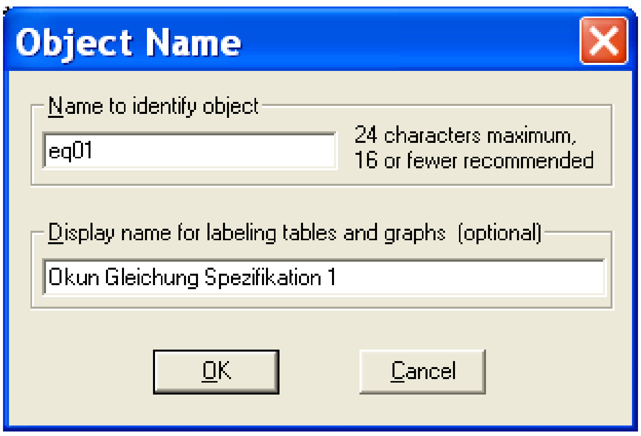
Eine typische Outputtabelle sieht dann wie folgt aus:

Dependent Variable: D(UR)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 1947:2 1960:4
Included observations: 55 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.311155	0.058945	5.278767	0.0000
GDPRP	-0.313616	0.036429	-8.609075	0.0000

R-squared	0.583059	Mean dependent var	0.043345
Adjusted R-squared	0.575192	S.D. dependent var	0.569696
S.E. of regression	0.371312	Akaike info criterion	0.892140
Sum squared resid	7.307262	Schwarz criterion	0.965134
Log likelihood	-22.53384	F-statistic	74.11617
Durbin-Watson stat	1.646644	Prob(F-statistic)	0.000000

Die zugehörige Gleichung kann übrigens zur späteren Verwendung gespeichert werden. Zu diesem Zweck klickt man im Gleichungsfenster auf Name und erhält dann neben stehende Dialogbox zur Namensgebung. Danach steht diese Gleichung als gesondertes Objekt mit eigenem Symbol in spezifischer Farbe in der Objektfläche zur Verfügung. Dies gilt auch für andere gespeicherte Objekte, wie Grafiken, Gruppen, Tabellen, etc.. Soll der Inhalt der Gleichung später nicht mehr verändert werden, empfiehlt es sich zuerst auf Freeze zu klicken und anschließend die Tabelle zu benennen (zu speichern).



Die Schätzwerte von Okun können also nicht exakt nachvollzogen werden. Gibt es dafür eine Erklärung?

Nun, eine Überprüfung des Schätzbereiches im Regressions-Output zeigt, dass wir tatsächlich die richtige Schätzperiode verwendeten. Dieser Test ist in EViews immer angebracht, weil abweichende Schätzperioden in diesem Programm leicht irrtümlich geändert werden. Der Unterschied muss also von abweichenden Datenpunkten herrühren.

Ein Grund für abweichende Datenpunkte sind die laufenden Revisionen des BIP. Nach der ersten Veröffentlichung für den Quartalswert des BIP etwa 60 bis 90 Tage nach Ablauf eines Quartals werden in mehreren Schritten Revisionen durchgeführt, die zusätzliche Informationen in die BIP-Berechnung einarbeiten. Die erste Veröffentlichung beruht vorwiegend auf den Arbeitsmarktdaten, ersten Außenhandelsdaten und den Ergebnissen einer Unternehmensstichprobe. Nach und nach können immer mehr Informationsquellen berücksichtigt werden. Erst nach etwa sieben Jahren sind tatsächlich alle Informationsquellen ausgeschöpft, sodass die Beobachtungen sich nicht mehr ändern.

Okuns Arbeit „Potential GNP: Its Measurement and Significance" wurde zu Jahresbeginn 1962 veröffentlicht. Zu diesem Zeitpunkt sollte es erste Werte für das dritte vielleicht sogar schon für das vierte Quartal 1961 gegeben haben; die Werte aus dem Jahr 1960 dürften bereits ihre erste Revision erfahren haben, die aus dem Jahr 1959 ihre zweite usw. Die heute zur Verfügung stehenden Werte entsprechen dem letzten Revisionsstand und weichen daher vom originalen Datensatz etwas ab. Unsere Nach-Schätzung der Okun'schen Gleichung (in Differenzenform) ergibt also

$$u_t - u_{t-1} = 0.311 - 0.314\, g_{Yt} = -\,0.31\,(g_{Yt} - 0.99),$$

wobei letztere Darstellung Gleichung (9.2b) in Blanchard und Illing (2006) entspricht. Hier kann der Wert *0.99 %* schön als „normale Wachstumsrate" definiert werden, jenes Wachstum also, welches notwendig ist, um die Arbeitslosigkeit auf konstantem Niveau zu halten. Dabei handelt es sich aber um eine Veränderungsrate von Quartal zu Quartal. Auf das Jahr umgelegt würde diese Gleichung ein Wachstum für den Potenzial-Output von etwa *4.02 %* implizieren. Dieser Wert liegt etwas über dem von Okun in einem alternativen Ansatz gewählten *3.5 %*

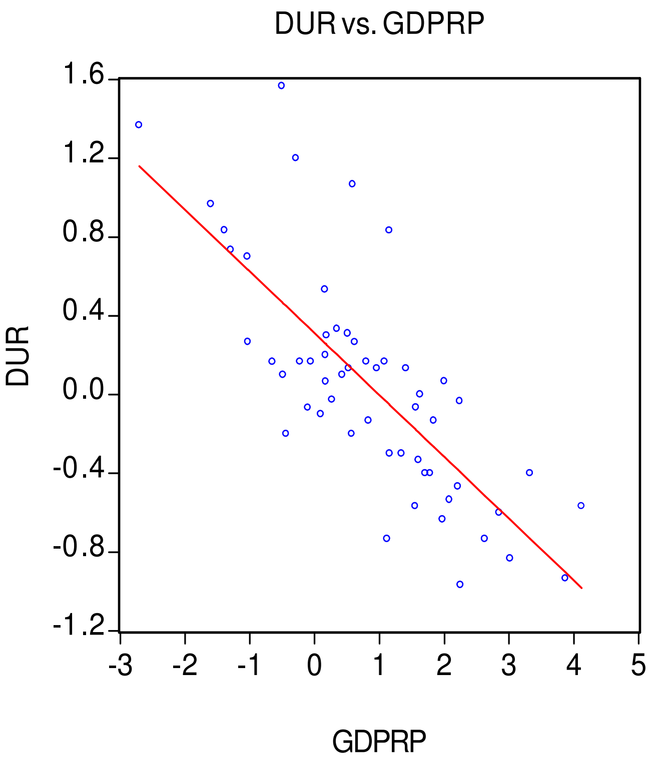
…und auch über dem in Gleichung 9.2b von Blanchard und Illing (2006) angebenen Wert von *3%*, siehe auch das Übungsbeispiel am Ende des Kapitels.

Wir werden diese Diskrepanz in weiterer Folge noch besprechen. Die implizite Wachstumsrate des Potenzial-Output variiert nicht nur mit unterschiedlichen Schätzgleichungen, sondern auch mit geänderten Schätzperioden, weil die Wachstumsrate des Potenzial-Output über die Zeit nicht konstant ist. Dies ist Motivation und Bestandteil zahlreicher alternativer Schätzungen des Okun'schen Gesetzes in der Literatur (für ein Beispiel mit ausgefeilter ökonometrischer Methodik siehe Sögner und Stiassny, 2002) und auch Teil der Übungsaufgaben.

2.2 Residualplots

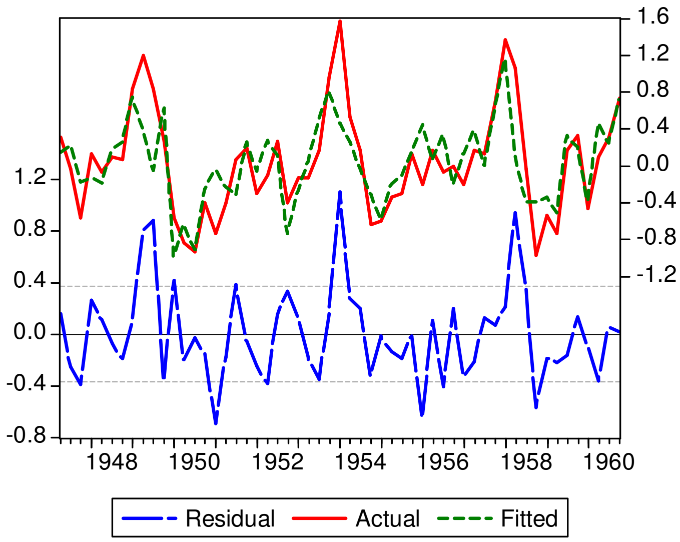
Wir haben wie im letzten Kapitel die Parameterschätzung mit dem Kleinst-Quadrate Prinzip erstellt. Das Vorzeichen und die Größe der Koeffizienten stimmt mit den theoretischen Erwartungen zusammen, aber die Frage, inwiefern die geschätzten Modelle die Daten tatsächlich repräsentieren, d.h. ob die Anpassung der Schätzwerte an die beobachteten Werte „gut genug“ ist, blieb bis jetzt unbeantwortet. Welche Möglichkeiten dies festzustellen haben wir?

Zunächst bietet sich, nach Erzeugen der Variable DUR=D(UR) eine grafische Analyse über ein Streudiagramm mit einer Regressionsgerade an:



Diese Grafik scheint zumindest visuell die postulierte Beziehung zu bestätigen. Der Grund dafür liegt darin, dass die Datenpaare sich – bis auf wenige Ausnahmen – in der Nähe der Regressionsgeraden platzieren.

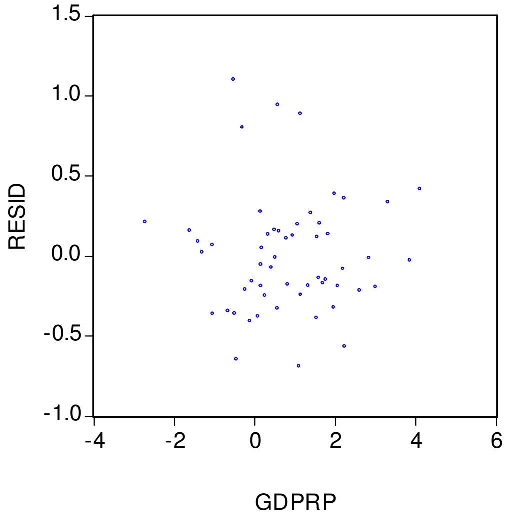
Zur Bewertung dieses Sachverhalts kommen wieder die bereits bekannten Residuen $\hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$ ins Spiel. Sie reflektieren ja im Idealfall das Verhalten der Störterme und sollten deshalb keine auffälligen Muster aufweisen.

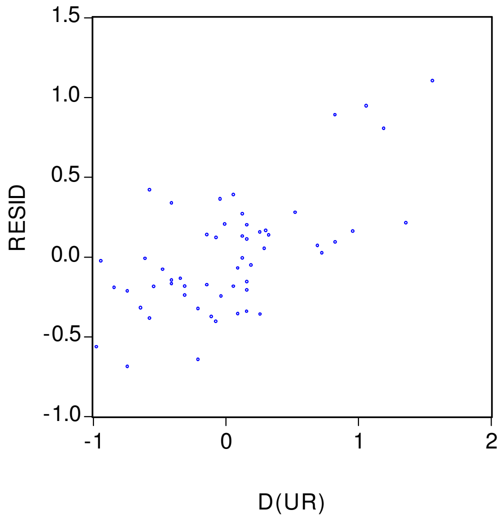


In EViews erhält man einen ersten Eindruck durch Anklicken von Resids in der Gleichungsleiste. Es erscheint dann eine Darstellung von $\hat{\varepsilon}$ (blau – hier strichliert), y (rot – solide) und $\hat{y}$ (grün – gepunktet) im Zeitverlauf.

Im vorliegenden Fall sind vom Verlauf her keine Auffälligkeiten – wie mehrere aufeinander folgende Perioden mit gleichem Vorzeichen oder regelmäßiger Vorzeichenwechsel – zu erkennen. Allenfalls die drei (vier) prominenten Spitzen werden in Folge von Interesse sein. Zunächst aber soll noch überprüft werden, ob es zwischen Residuen und Regressand bzw. Regressor unerwünschte Beziehungen gibt. Auch hier bietet sich das Erzeugen von Streudiagrammen als einfachste Variante an.

In EViews am Einfachsten mittels Quick – Graph - Scatter:



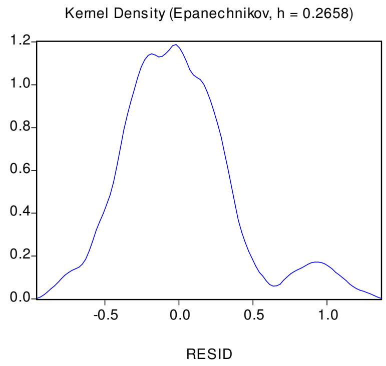


Hier ist nur im unteren Panel eine gewisse Asymmetrie (Beziehung zum Regressanden) auszumachen, die eventuell in die Modellformulierung Eingang finden könnte.

Eigenschaften wie zeitliche Unabhängigkeit der Residuen und konstante Varianz haben wir nun abgecheckt, aber kann man nicht noch mehr von der Verteilung der Störterme verlangen?

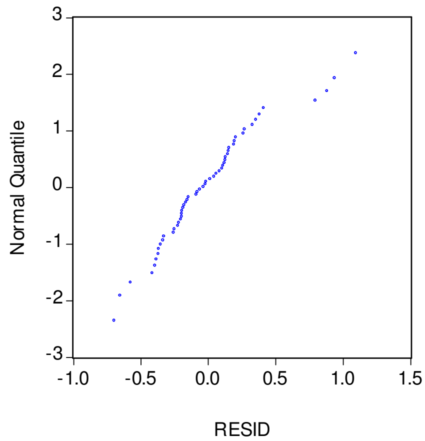
Bisher haben wir ja auf eine diesbezügliche Annahme verzichtet, in weiterer Folge wird eine solche aber entscheidende Bedeutung haben. Man geht gerne davon aus, dass die Störterme ε nicht nur Erwartungswert 0 und konstante Varianz haben, sondern einer Normalverteilung folgen. Auch diese Annahme sollte sich idealer Weise in den Residueneigenschaften widerspiegeln. Zum Zweck der visuellen Überprüfung bieten sich ein Kernschätzer für die Dichte oder ein sogenannter Normal-Quantilsplot, bei dem die Quantile der empirischen Verteilung gegen die der Normalverteilung geplottet werden, an.

Den Kernschätzer erzielt man in EViews, indem man nach Anklicken der aktuellen Residualreihe (zur Sicherheit vorher die Schätzung nochmals durchführen) und resid aus der Variablenleiste View – Distribution Graph – Kernel Density auswählt (im folgenden Menü kann man getrost die Voreinstellungen beibehalten).



Die Grafik für die vorliegende Schätzung weist durchaus Ähnlichkeiten mit einer Normalverteilungsdichte auf – nur der zweite Gipfel bei *1.0* ist wohl wieder auf die vier Spitzenwerte zurückzuführen.

Noch deutlicher ersichtlich ist dies aus dem Normal-Quantilsplot den man über View – Distribution Graphs – Quantile-Quantile – Normal distribution erhält:



Die Punkte sollten möglichst entlang einer 45°-Geraden platziert sein, auch hier liegen die vier Spitzenwerte wieder deutlich entfernt.

> Kann man daraus schließen, dass das Modell für Perioden in denen die Arbeitslosenrate ungewöhnlich stark ansteigt nicht gilt, bzw. ein anderes Modell unter Auslassung dieser Perioden besser geeignet wäre?

Ersteres würde ich bejahen, der zweite Teil deiner Frage bedarf etwas genauerer Überprüfung; ich werde ihn später erneut aufgreifen.

2.3 Das Bestimmtheitsmaß

Zunächst sollten wir jedoch noch mal zum Punkt zurückkehren, ob die Okun-Gleichung grundsätzlich für die Beschreibung der Daten verwendbar ist. Wünschenswert wäre, ein Maß für die Güte der Anpassung der Gerade an die Datenpunkte zur Verfügung zu haben.

Im letzten Kapitel haben wir den Korrelationskoeffizienten als ein solches Maß doch schon eingeführt?

Ja, allerdings ist dieser ausschließlich für den linearen Zusammenhang zweier Variablen geeignet, wir aber wollen eine Maßzahl die sowohl für nichtlineare Beziehungen als auch mehrere Variablen verallgemeinerbar ist. In der Literatur hat sich dafür das so genannte Bestimmtheitsmaß R^2 durchgesetzt. Seine Definition motiviert sich aus der Quadratsummenzerlegung der linearen Regression

$$\sum_t (y_t - \bar{y})^2 = \sum_t (\hat{y}_t - \bar{y})^2 + \sum_t \hat{\varepsilon}_t^2,$$

($\bar{y} = \sum_t y_t / T$ bezeichnet hier den Mittelwert) oder in Matrixschreibweise

$$y' M^0 y = \hat{y}' M^0 \hat{y} + \hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon},$$

wobei $M^0 = I - \iota' \iota / T$ und ι einen Eins-Vektor bezeichnet. Dies bedeutet, dass sich die Gesamtvariation in den durch die Schätzung erklärbaren und den in den Residuen verbliebenen Teil zerlegt. Der Anteil der erklärten an der Gesamtvariation, oder anders formuliert

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_t (y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon}}{y' M^0 y}$$

kann deshalb als vernünftiges Maß für die Güte der Anpassung verstanden werden.

Man bemerke, dass die Kleinst-Quadrate Schätzung impliziert, dass das Bestimmtheitsmaß bei gegebenen Daten (also gegebener Gesamtvariation) den maximal möglichen Wert annimmt, weil ja dabei die Residuenquadratsumme minimiert wird.

Im vorliegenden linearen Fall der Einfachregression ist überdies das Bestimmtheitsmaß eng mit dem bereits bekannten Korrelationskoeffizienten ρ zwischen Regressor und Regressanden verwandt, es entspricht nämlich hier exakt seinem Quadrat und liegt daher auch stets zwischen 0 (kein Erklärungswert) und 1 (aus dem Modell errechnete Werte entsprechen exakt den Beobachtungen).

Es gilt $R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$. Wegen $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ gilt $\hat{y}_i - \bar{y} = \hat{\beta}_1 (x_i - \bar{x})$ und $\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum (x_i - \bar{x})^2$. Wegen $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$ folgt $R^2 = \frac{[\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}$ $= \rho^2 = Korr(x,y)^2$.

In unserer Anwendung, der Okun'schen Gleichung, liegt der Wert für R^2 laut Tabelle bei *0.58*, also näher bei *1* als bei *0*. Bedeutet dies schon, dass wir mit unserem Modell, insbesondere der Wahl des Regressors zufrieden sein können?

Auch dies wäre ein vorschnelles Urteil. Wir können diese Frage nur unter Berücksichtigung des Umfangs des Datensatzes der unserer Untersuchung zu Grunde liegt, beantworten. Es ist offensichtlich, dass bei sehr kleinen Datensätzen auch zufällig sehr hohe Bestimmtheitsmaße erzielt werden können (bei $T=2$ ergibt sich übrigens immer $R^2=1$). Auch die Steigung der Regressionsgerade hat Einfluss auf die Größenordnung des Bestimmtheitsmaßes. Hält man nämlich die Residuenquadratsumme (quasi die Güte der Anpassung) fix (und klein), so bestimmt allein die Gesamtquadratsumme die Höhe von R^2, das heißt das Verhältnis der beiden ist stets näher bei 1 (auch bei guter Anpassung), umso flacher die Regressionsbeziehung ist.

2.4 t -Test und p -Werte

Wir wollen der Einfachheit halber das Problem der Modellwahl zunächst an Hand der Frage, ob einem einzelnen Regressor Einfluss auf den Regressanden zuzuschreiben ist, besprechen. Dazu ist es sinnvoll sich eine – in der Modellformulierung implizierte – grundsätzliche Fiktion zu gewärtigen: man betrachtet die vorhandenen Daten(paare) als zufällige Stichprobe aus einem Universum möglicher Konfigurationen, die von einer quasi in konstantem Zustand befindlichen Ökonomie erzeugt werden. Diese Fiktion erlaubt uns die Anwendung der statistischen Stichprobentheorie bei der Bewertung unserer Schätzergebnisse.

> Diese Vorstellung trifft sich gut mit den meisten theoretischen Modellen in der Volkswirtschaftslehre. Dort wird ebenfalls ausgehend von einem Gleichgewichtszustand die Auswirkung einer marginalen Änderung untersucht. Die abgeleiteten Aussagen sind nur solange sinnvoll als das zugrunde liegende Modell konstant bleibt. In den theoretischen Modellen sind die Abweichungen vom Gleichgewicht allerdings deterministischer Natur.

Für die Kleinst-Quadrate Schätzer $\hat{\beta}$ der Regressionskoeffizienten bedeutet dies nun, dass sie als Zufallsvariable mit vorgegebener Verteilung interpretiert werden können. Diese Verteilung ergibt sich aus den getroffenen Annahmen (inklusive Normalität der Störterme) zu einer Normalverteilung mit Erwartungswert β und Varianz(-Kovarianzmatrix) $\sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$.

$E[\hat{\beta}|X] = E[(X'X)^{-1}X'y|X] = E[(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)|X] = E[\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon|X] = \beta+(X'X)^{-1}X'E[\varepsilon|X] = \beta$ (weil wegen der strikten Exogenität von X gilt, dass $E[\varepsilon|X]=0$). Diese Eigenschaft nennt man Erwartungstreue.

$Var[\hat{\beta}|X] = Var[\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon|X] = (X'X)^{-1}X'Var[\varepsilon|X]X(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$. Für das Rechnen mit Erwartungswert- und Varianzoperator bei Vektoren siehe etwa Greene (2000), Sektion 3.9.

Außerdem gilt das so genannte Gauss-Markov Theorem: es besagt, dass unter allen linearen, erwartungstreuen Schätzern der KQ-Schätzer jener mit der geringsten Varianz ist (der BLUE – best linear unbiased estimator).

> Wenn nun also die Verteilung dieser Zufallsgrößen bekannt ist, müsste man in der Lage sein, einen statistischen Test, etwa zur Hypothese $\beta_1 = 0$, durchzuführen. Diese Hypothese unterstellt, dass in der Okun'schen Gleichung die

Wachstumsrate g_{yt} keinerlei Einfluss auf die Veränderung der Arbeitslosenrate Δu_t hat.

Das ist im Prinzip richtig. Allerdings wäre dazu die Kenntnis der Störgrößenvarianz σ_ε^2 vonnöten, die ja Bestandteil der zu verwendenden Varianz des Schätzers ist. Nahe liegend ist es, die unbekannte Varianz σ_ε^2 auch durch einen Schätzwert zu ersetzen, wobei sich selbstverständlich das empirische Gegenstück, die Varianz der Residuen, anbietet.

Tatsächlich verwendet man allerdings zur Gewährleistung der Erwartungstreue einen im Nenner leicht veränderten Schätzwert, nämlich $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}/(T-k-1)$, für hier $k=1$ als Zahl der Regressoren.

Tut man dies aber, ist die erforderliche statistische Testgröße, also der quasi standardisierte Koeffizient $\hat{\beta}_1 / \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{(X'X)^{-1}_{ii}}$ nicht mehr normalverteilt sondern folgt der so genannten Student - oder t-Verteilung.

Die Entdeckung dieser Tatsache war das Verdienst W.S. Gosset's, der Anfang des vorigen Jahrhunderts in der Guinness Brauerei in Dublin tätig war und seine Erkenntnisse unter dem Pseudonym „Student“ publizierte.

Die standardisierten Koeffizienten werden deshalb auch t-Werte genannt und finden sich routinemäßig den Regressionskoeffizienten zugeordnet auf den Outputtabellen zur Regressionsanalyse.

Die Nenner der standardisierten Koeffizienten finden sich als Standardfehler ebenfalls in den Outputtabellen.

So, in unserer Tabelle finden wir nun also *5.28* als t -Wert für das mit c bezeichnete Interzept β_0, sowie *–8.61* für die die Wachstumsrate g_{yt} repäsentierende Variable gdprp (bzw. den zugeordneten Koeffizienten β_1). Welche Schlüsse können wir aus diesen Werten ziehen?

Der t-Wert für das Interzept ist generell von geringem Interesse, da hier ja nur abgetestet wird, ob quasi der Mittelwert des Regressanden 0 beträgt, eine Fragestellung die selten von gesteigertem Interesse ist. Viel wichtiger in unserem Zusammenhang ist der t-Wert für die Variable gdprp. Um zu beurteilen, ob dieser als für die Hypothese $\beta_1=0$ als typisch oder untypisch zu bezeichnen ist, muss man ihn mit einem – einem vorgegebenem Signifikanzniveau – entsprechenden Wert der Verteilungsfunktion einer t-Verteilung vergleichen.

Da diese Vorgangsweise jedoch relativ umständlich ist, stehen in den meisten Softwarepaketen – also auch in EViews – die so genannten p-Werte automatisch zur Verfügung. Es handelt sich dabei um – gleichverteilt auf den Wertebereich zwischen 0 und 1 – umskalierte, deshalb verteilungsunabhängige Größen. Diese haben den Vorteil, dass ein direkter Vergleich mit dem Signifkanzniveau zur Testentscheidung ausreicht. In unserem Fall müsste der Wert *–8.61* mit einem entsprechenden Tabellenwert – oder aber, völlig äquivalent, der zugeordnete p-Wert (in der Outputtabelle in der Spalte Prob) mit dem zuvor gewählten Wert für das Signifikanzniveau, etwa *1-95%=0.05*, verglichen werden. Liegt der beobachtete Wert darunter – und mit *0.000*, praktisch gleich *0*, tut er dies hier wesentlich, kann man von einem für die formulierte Hypothese sehr untypischem Ergebnis ausgehen, diese daher ablehnen.

> Gleichzeitig heißt das also, dass die BIP-Wachstumsrate g_{Yt} einen auf die Änderungen in der Arbeitslosenrate statistisch nachweisbaren bzw. signifikanten Effekt hat.

Genau so muss man das Ergebnis interpretieren. Allerdings darf man nicht vergessen, dass man es stets – auch bei den *p*-Werten – mit Zufallsgrößen zu tun hat, die deshalb auch zufällig von den für die Hypothesen typischen Werten abweichen können und so zu einer Fehlentscheidung – also einer fälschlichen Ablehnung der Hypothese – führen können. Das Risiko solch einer Fehlentscheidung – der so genannte α-Fehler – ist allerdings mit *5%* beschränkt.

Beim statistischen Testen gibt es noch das Risiko einer zweiten Art von Fehlentscheidung, nämlich die Hypothese anzunehmen, obwohl sie falsch ist. Für dieses Risiko – den so genannten β-Fehler – gibt es im Allgemeinen leider keine obere Schranke. Man wird beim Testen die Hypothese also immer so formulieren, dass möglichst eine Ablehnung zu Stande kommt.

2.5 Studentisierten Residuen und Cook's Distanzen

Wir wollen uns mit dem nun erworbenen Wissen noch einmal der Residualanalyse widmen. Konkret deiner Frage, ob die vier ungewöhnlich großen Residuen auf ein anderes Modell hindeuten. Dazu müssen wir wieder zuerst bewerten, ob sich die Abweichungen innerhalb durch Zufälligkeiten erklärbarer Toleranzen bewegen. Man darf wiederum nicht vergessen, dass ja auch die geschätzten Residuen Zufallsgrößen sind, und daher Schwankungen unterliegen. Unter den getroffenen Annahmen sind sie normalverteilt mit Erwartungswert *0* und Varianz $\sigma_\varepsilon^2(1-H_{tt})$, wobei H_{tt} das *t*-te Diagonalelement der Matrix $H=X(X'X)^{-1}X'$ bezeichnet.

Diese Matrix wird, weil sie die Original- in die errechneten Werte überführt $\hat{y} = Hy$, also *y* mit einem Dach versieht, auch Hat-matrix genannt.

Es liegt nun also nahe, statt der Originalresiduen zu *t*-verteilten Residuen transformierte, so genannte (extern) studentisierte Residuen s_t zu verwenden.

In EViews sind diese leider nicht einfach verfügbar. Zuerst muss die Regressormatrix *X* als Objekt erstellt werden (nachdem aber wegen des fehlenden Wertes in 1947:1 zuvor das sample auf 1947:2 bis 1960:4 gesetzt wurde). Dies erreicht man durch Konvertierung einer zuvor definierten Gruppe (hier mit Namen groupx). Zu diesem Zweck muss in der weißen Kommandozeile der Befehl

```
stom(groupx,x)
```

eingegeben und mit ENTER abgeschlossen werden (alternativ kann auch die Funktion @convert verwendet werden).

Danach führt man die für die Definition der Residuenvarianzen notwendigen Matrixoperationen aus:

```
vector htt=@getmaindiagonal(x*@inverse(@inner(x))*@transpose(x))
```

Es folgt die Rückkonvertierung des eben berechneten Vektorobjektes ins Format Zeitreihe

```
mtos(htt, hhtt)
```

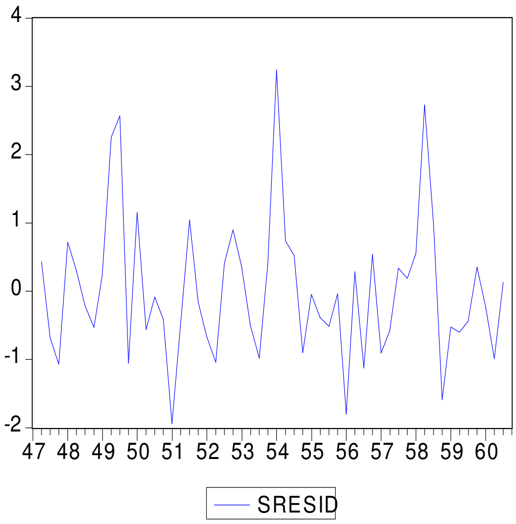
Zur Studentisierung müssen dann so genannte intern studentisierte Residuen $r_t = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{1-H_{tt}}}$ als Zwischenprodukte erstellt werden; die für uns relevanten Externen ergeben sich dann daraus zu $s_t = r_t \sqrt{\frac{T-k-1}{T-k-r_t^2}}$.

```
series rresid=resid/@sqrt(1-hhtt)/okun.@se
series sresid=rresid*@sqrt((okun.@regobs-2)/(okun.@regobs-1-rresid^2))
```

Mit `gleichungsname.@se` erhält man den Standardfehler der Störterme σ_ε, mit `gleichungsname.@regobs` die Zahl der nichtfehlenden Beobachtungen einer zuvor benannten Gleichung (in unserem Fall habe ich den Namen `okun` vergeben).

Danach kann wie üblich der Residualplot erzeugt werden, es ergeben sich zum vorherigen Residualplot nur geringfügige Unterschiede. Allerdings kann man nun die Skalierung interpretieren: alle Werte außerhalb eines Bereichs von ca. ±3.5 – dieser ergibt sich wieder aus der t-Verteilung – können als untypisch groß bewertet werden, solche nennt man üblicherweise Ausreißer.

Zur Berechnung des Wertes 3.5 wurde das Bonferroni Prinzip des multiplen Testens angewendet, für Details siehe z.B. den Klassiker der angewandten Regressionsrechnung „Applied Linear Regression“ (2nd edition) von Sanford Weisberg, Wiley, 1985, S. 116.



Die drei schon ohne Studentisierung auffälligen Perioden sind also wieder 1949:3(2), 1954:1 und 1958:2, jene in denen auch die Arbeitslosigkeit jeweils am stärksten anstieg. Einer der zugeordneten Werte (nämlich für 1954:1) kommt mit 3.24 doch recht nahe an den Schwellwert heran und kann vorerst wohl einmal als Ausreißer angesehen werden.

Dieses Ergebnis lässt unter Umständen auch Kritik an der funktionalen Form der Okun Gleichung zu, wie von Virén („The Okun curve is non-linear“, M. Virén, Economics Letters, **70**, S.253-257, 2001) oder anderen formuliert.

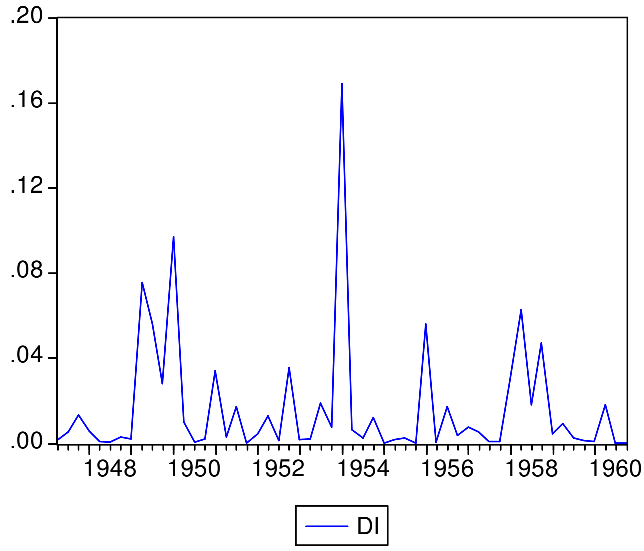
Kann man jetzt also schon automatisch davon ausgehen, dass dieser Ausreißer das Schätzergebnis maßgeblich verzerrt?

Das nicht, dazu berechnen wir für jede Beobachtung die so genannte Cook's Distanz, die sich aus $D_t = \frac{1}{k+1} r_t^2 \left(\frac{H_{tt}}{1 - H_{tt}} \right)$ ergibt (mit $k=1$ als Anzahl der Regressoren), also hier:

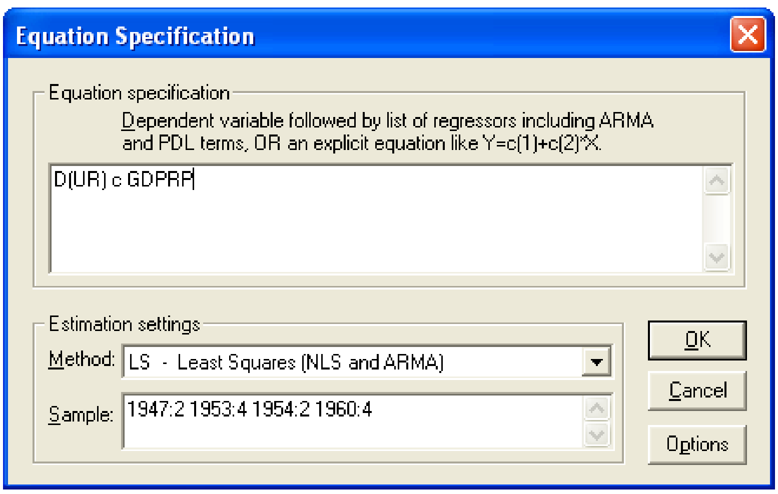
```
series di=rresid^2*hhtt/(1-hhtt)/2
```

Cook's Distanzen wurden ursprünglich als Abstände im Parameterraum interpretiert, die sich ergeben, wenn einzelne Beobachtungen bei der Schätzung nicht berücksichtigt werden, siehe Weisberg (1983). S 118f.

Der zugehörige Plot weist einen eindeutigen Spitzenwert für die Periode 1954:1 auf. Dieser liegt um ein Vielfaches über den meisten restlichen Werten, man könnte also davon ausgehen, dass eine Schätzung unter Auslassung dieser Periode ein wesentlich anderes Ergebnis zeitigen würde.



Dies lässt sich in EViews am einfachsten nachprüfen, indem man den betreffenden Zeitpunkt aus der Sample Definition einfach ausnimmt.



Es ergibt sich der Output:

Dependent Variable: D(UR)
Method: Least Squares
Sample: 1947:2 1953:4 1954:2 1960:4
Included observations: 54

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.277743	0.055130	5.037979	0.0000
GDPRP	-0.298737	0.033789	-8.841121	0.0000

R-squared	0.600508	Mean dependent var	0.015130
Adjusted R-squared	0.592826	S.D. dependent var	0.534849
S.E. of regression	0.341288	Akaike info criterion	0.724154
Sum squared resid	6.056835	Schwarz criterion	0.797821
Log likelihood	-17.55217	F-statistic	78.16543
Durbin-Watson stat	1.680899	Prob(F-statistic)	0.000000

Übersetzen wir den Inhalt der Tabelle zuerst einmal in unsere Gleichungsform

$$u_t - u_{t-1} = 0.278 - 0.299\, g_{yt} = -\, 0.30\, (g_{yt} - 0.93).$$

Durch die Ausschaltung der einflussreichsten Beobachtung haben sich sowohl die Konstante als auch die Sensibilität der Arbeitslosenrate in Bezug auf das BIP-Wachstum geändert, beide sind kleiner. Die Grundaussage von Okun, dass etwa *3%* Wirtschaftswachstum notwendig sind, um die Arbeitslosenrate um *1* Prozentpunkt zu senken, bleibt erhalten. Hingegen sinkt die durchschnittliche Wachstumsrate des Potenzial-Outputs von Quartal zu Quartal leicht auf *0.93 %*. Umgerechnet auf eine Jahreswachstumsrate ergibt das nun den etwas plausibleren Wert von *3.77 %*. Das potenzielle BIP-Wachstum liegt damit auch näher an dem von Okun vorgeschlagenen Wert von *3.5 %*.

2.6 Umgekehrte (reverse) Regression

Einen entscheidenden Aspekt haben wir in der gesamten Diskussion bis dato ausgespart. Nämlich die Frage welche der beiden betrachteten Variablen man als Regressanden und welche als Regressor festlegen sollte und ob diese Festlegung überhaupt einen Unterschied macht?

Eigentlich müssten sich die Arbeitslosenquote und die Veränderung des BIP endogen aus einem ökonometrischen Modell ergeben. Z.B. würden die beiden Größen in einem Modell auf Grundlage des IS-LM-Schemas immer durch die Interaktion von Güter-, Arbeits- und Geldmarkt bestimmt sein. Wenn man also nur die Beziehung zwischen Arbeitslosenquote und BIP-Veränderung betrachtet, muss man beachten, dass die beiden Größen eigentlich aus einem gemeinsamen Daten-generierenden Mechanismus stammen und damit einer gemeinsamen Verteilung folgen. Die Einteilung in erklärte und erklärende Variable ist damit aus wirtschaftstheoretischer Sicht unmöglich, und hängt deshalb von den Aussagen ab, die man aus der Schätzgleichung ableiten möchte.

Ich habe anfangs schon betont, dass Arthur Okun eigentlich ein Verfahren zur Schätzung des Potenzial-Output suchte, das auf einem weitgehend außer Streit stehenden Maßstab für die Vollbeschäftigung beruht. Er war der Meinung, dass ein Wert von *4 %* für die Arbeitslosenquote ein solcher Maßstab ist. In seiner Gleichung regressiert er die Arbeitslosenquote auf die Veränderungsrate des BIP und ermittelt die Wachstumsrate des Potenzial-Output indirekt, indem er Konstante und Steigung miteinander verschmilzt. Wir haben schon gesehen, dass der implizite Wert für die durchschnittliche Wachstumsrate des Potenzial-Output stark von Ausreißern abhängt. Er ist darüber hinausgehend – aus technischen Gründen – von der Einteilung in Regressand und Regressor abhängig.

Ja, das sehen wir augenblicklich, wenn wir unser grafisches Vorstellungsvermögen bemühen. Im Streudiagramm (wie üblich mit Regressor auf der Abszisse und Regressand auf der Ordinate) minimiert die Kleinst-quadrate Methode ja die vertikalen Abstände der Punkte von der Geraden. Vertauscht man Regressand und Regressor werden sozusagen in der Originalgrafik die horizontalen Abstände minimiert, was zu einer unterschiedlichen Anpassung führt.

Formal bedeutet das, dass wir statt der Regression $y_t=\beta_0+\beta_1x_t+\varepsilon_t$ die Regression $x_t=\lambda_0+\lambda_1y_t+\xi_t$ durchführen. Als Schätzer ergibt sich analog $\hat{\lambda} = (Y'Y)^{-1}Y'x$ mit $Y=\{\iota, y\}$ und daraus $\hat{\lambda}_1 = R^2/\hat{\beta}_1$, wobei R^2 wegen der symmetrischen Definition als Quadrat des Korrelationskoeffizienten für beide Regressionen gleich ist. Das heißt aber nun, dass die beiden Regressionsgeraden einander umso näher liegen umso größer der Wert für R^2 ist. Identisch sind sie jedoch nur bei perfekter Korrelation.

Das hat aber entscheidende inhaltliche Implikationen für das Schätzen der Okun'schen Gleichung. Wir erinnern uns, dass Okun seinen Schätzwert für die durchschnittliche Wachstumsrate des Potenzial-Output einfach durch $\hat{\beta}_0/\hat{\beta}_1 = 0.99$ (in %) berechnet. Da aus der Wirtschaftstheorie keine Vorgaben über die Richtung der Regression bestehen, können wir genauso die umgekehrte Regression mit folgendem Output durchführen.

Dependent Variable: GDPRP
Method: Least Squares
Sample: 1947:2 1960:4
Included observations: 55

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.934528	0.122262	7.643630	0.0000
DUR	-1.859149	0.215952	-8.609075	0.0000

R-squared	0.583059	Mean dependent var	0.853942
Adjusted R-squared	0.575192	S.D. dependent var	1.387078
S.E. of regression	0.904060	Akaike info criterion	2.671845
Sum squared resid	43.31823	Schwarz criterion	2.744839
Log likelihood	-71.47573	F-statistic	74.11617
Durbin-Watson stat	2.070022	Prob(F-statistic)	0.000000

Die Konstante $\hat{\lambda}_0 = 0.93$ ist etwas kleiner als der implizite Wert in der Originalregression und ergibt eine durchschnittliche jährliche Wachstumsrate für das Potenzial-Output von *3.77 %*; deutlich niedriger als der implizite aus der Originalregression errechnete Jahreswert von *4 %* und wesentlich näher am letztlich unterstellten Wert von *3.5 %*. Noch deutlicher wird der Unterschied, wenn man aus den Koeffizienten der Alternativ-Regression den Okun-Koeffizienten implizit berechnet. In diesem Fall folgt aus $-1/\hat{\lambda}_1 = 0.54$, dass der Okun-Koeffizient wesentlich unter dem Wert von *3.3* in der Originalregression liegt und nur *1.85* beträgt. Umgelegt auf das Okunsche Gesetz wären also nicht *3.3%* Wirtschaftswachstum notwendig, um die Arbeitslosenquote um *1* Prozentpunkt zu senken, sondern nur mehr *1.85%*.

Diese Diskrepanz wurde in „There Are Two Okun’s Law Relationships Between Output and Unemployment” von Humberto Barreto und Frank Howland, Wabash College, Internet, 1993 ausführlich analysiert.

Aus Sicht der Wirtschaftspolitik wäre das eine hervorragende Nachricht gewesen, weil dadurch alle Instrumente der Nachfragesteuerung wesentlich effektiver als angenommen gewirkt hätten. Nur, wenn die beiden Schätzer so unterschiedlich sein können, nach welchen Kriterien sollte man dann bestimmen, welcher von beiden verwendet werden soll?

Das ist eine sehr schwierige Frage, die bis an die Fundamente der schließenden Statistik bzw. Ökonometrie geht. Oft wird davon ausgegangen, dass durch die ökonomische Theorie eine gewisse Kausalitätsrichtung (Regressor bedingt Regressanden) vorgegeben ist. Ist dies, wie im vorliegenden Fall, nicht argumentierbar, orientiert man sich in der Regel daran, welche Größe durch welche vorhergesagt werden soll, also nach der dominanten Prädiktionsrichtung.

Dieses Problem beschäftigt die Ökonometrie seit langem. In „The History of Econometric Ideas”, Kapitel 7 präsentiert Mary S. Morgan, Cambridge University Press, 1990-95 die Diskussion in launiger Briefform. Die Kausalitätsinterpretation ist strittig und hat prominente Kritiker, siehe „Causality; Models, Reasoning, and Inference“ von Judea Pearl (Cambridge University Press, 2000). Die Frage der Kausalität bzw. Kausalitätsrichtung wird uns auch noch in einem späteren Kapitel beschäftigen.

In unserem Fall interessiert wohl eher die Bestimmung eines bedingten Erwartungswertes der Form $E[u_t - u_{t-1} \mid g_{Yt}]$ als umgekehrt, d. h. wieviel Wirtschaftswachstum bzw. nachfrageorientierte wirtschaftspolitische Maßnahmen braucht es, um einen Rückgang der Arbeitslosenrate um *1* Prozentpunkt zu bedingen. Der Anstieg des besten linearen Prädiktors beträgt dann eben *-3.3* wie in der Originalregression.

Noch etwas komplizierter wird die Sache, wenn man die Interpretation der Störterme erweitert. Bis jetzt haben wir sie als durch Stichprobenrealisierungen theoretischer Größen bedingte Abweichungen vom Modellzustand beschrieben. Enthalten die Daten jedoch auch noch Messfehler, so können diese nur dann in den Störtermen subsumiert werden, wenn sie sich ausschließlich auf den Regressanden auswirken – und vom Regressor unabhängig sind. Im anderen Fall trifft man auf das Problem der Fehler-in-den-Variablen Modelle, die wir an anderer Stelle noch im Detail besprechen.

Die Rolle der umgekehrten Regression in Fehler-in-den-Variablen Modellen findet sich z.B. in „Introduction to Econometrics“ , 3rd Edition, GS Maddala, Wiley, 2001, S.42.

Übungsaufgaben:

In den folgenden Übungen sollte man jeweils die Parameterschätzwerte erstellen und bewerten, sowie eine komplette Residualanalyse durchführen.

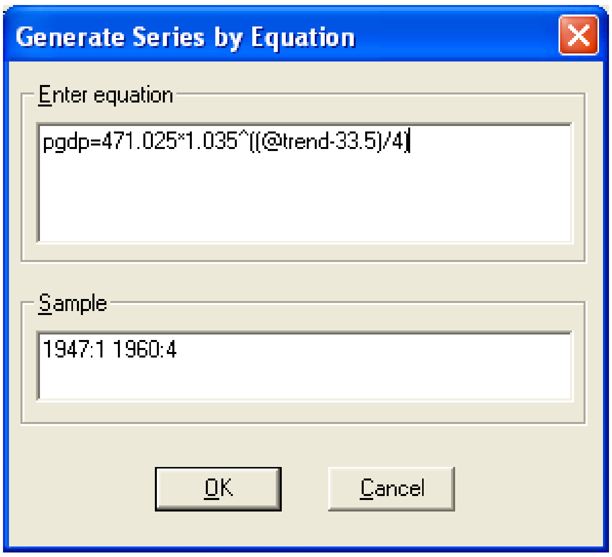
- Blanchard und Illing (2006) verwenden in Gleichung 9.2b nicht *3.5 %* für die durchschnittliche Wachstumsrate des Potenzial-Output, sondern *3.0 %*. Schätzen Sie diese Gleichung für die Periode 1960 bis 1998 und überprüfen Sie die Gültigkeit seiner Aussagen. Trennen Sie die Schätzperiode in den Zeitraum von 1960 bis 1973 und in die nachfolgende Periode 1974 bis 1998 und vergleichen Sie die Ergebnisse. Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie daraus?

- Okun schlägt in seinem Artikel zwei weitere Gleichungen vor. Die erste lautet

$$u_t = \beta_0 + \beta_1\, gap_t,$$

mit $gap_t = YP_t / Y_t - 1$, wobei der Potenzial-Output YP_t mittels einer durch den Mittelwert des BIP des Jahres 1955 laufende Trendgeraden mit *3.5%* Anstieg festgelegt wurde.

Tipp: eine Variable mit 3.5% jährlichem Anstieg für Quartalsdaten erzeugt man in EViews am einfachsten durch nebenstehende Gleichung nachdem zuvor über die Perioden 1955:1 bis 1955:4 ein Mittelwert von 471.025 ermittelt wurde. Zur Periodenmitte 1955 muss dann der Exponent des Steigungskoeffizienten Null ergeben.



- Die zweite von Okun zusätzlich vorgeschlagene Gleichung lautet

$$log\ (100-u_t) = \beta_0 + \beta_1\ log\ Y_t + \beta_2 t,$$

  also mit Einbeziehung des Zeittrends als zusätzlichen Regressor. Hierbei kann die Wachstumsrate des Potenzial-Outputs aus $\hat{g}_{YPt} = -\hat{\beta}_2/\hat{\beta}_1$ berechnet werden.

Tipp: Die Bewertungskriterien für Regressionsschätzer von Modellen mit mehr als einem Regressor sind uns bisher noch nicht untergekommen. Man kann jedoch die Gleichung mittels der im vorigen Kapitel diskutierten Technik des Trendbereinigens auf einen Regressor zurückführen.

Literaturhinweise

Barreto, H., Howland, F., „There Are Two Okun’s Law Relationships Between Output and Unemployment”, Wabash College, Internet, 1993.

Blanchard, O. und Illing, G. „Makroökonomie“, 4te, aktualisierte und erweiterte Auflage, Pearson Studium, 2006.

Cuaresma, J.C., “Okun’s Law Revisited”, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **65**(4), S.439-451, 2003.

Greene, W.H., „Econometric Analysis“, 4th edition, Prentice Hall, 2000.

Lazarsfeld, P.F., Jahoda M., Zeisel H., „Die Arbeitslosen von Marienthal. Ein soziographischer Versuch“, Leipzig, 1933 (Neudruck Suhrkamp Verlag, Frankfurt, 1975).

Maddala, GS, „Introduction to Econometrics“ , 3rd edition, Wiley, 2001.

Morgan, M., „The History of Econometric Ideas”, Cambridge University Press, 1990-95.

Okun, A.M., “Potential GNP: Its measurement and significance“, Cowles Foundation Paper 190, 1962.

Pearl, J., „Causality; Models, Reasoning, and Inference“, Cambridge University Press, 2000.

Sögner, L., Stiassny, A., „An analysis on the structural stability of Okun’s law – a cross-country study“, *Applied Economics*, **14**, 1775-1787, 2002.

Virén, M., „The Okun curve is non-linear“, *Economics Letters*, **70**, S.253-257, 2001.

Weisberg, S., „Applied Linear Regression“, 2nd edition, Wiley, 1985.