

# 1. Klasická indexní čísla

## 1.1. Průměry jako prostředek formulace indexních čísel

Vůbec první "indexní číslo" zavedl **Charles Dutot [1738]** jako prostý **podíl zprůměrovaných cen komodit v běžném a v základním období**, tj. výraz

$$\frac{\sum p_i(I)}{N} / \frac{\sum p_i(0)}{N}$$

Tři klasičtí představitelé moderní formalizované ekonomie **Stanley W. Jevons [1865]**, **Francis Y. Edgeworth [1881]** a **Alfred Marshall [1887]** se snažili nalézt objektivní hlediska, jak řešit formulovaný problém rigorózně, s použitím nemnoha tehdy známých výsledků statistické analýzy. Několik v té době známých konstruktů bylo založeno na prostých nebo vážených průměrech (*aritmetickém* či *geometrickém*) a úlohou bylo vyšetřit, které vlastnosti přisoudit indexnímu číslu jako nutné a pokusit se zdůvodnit návrhy IČ čísel ve světle chování ekonomické reality.

Byla přitom vyslovena úvaha: **Za normálního stavu by se cenový vývoj ekonomického komplexu měl odehrávat tak, že změna (obvykle vzestup) ceny jedné z uvažovaných komodit mezi dvěma obdobími by měl být postupně provázen analogickou změnou (vzestupem) cen ostatních komodit.** Tím by mělo dojít (připustíme malé časové zpoždění) k (téměř) proporční změně cen všech uvažovaných komodit mezi těmito obdobími. **Edgeworth a Jevons usuzovali, že nepravidelnosti, které v realitě u (nestejného) vývoje cen komodit pozorujeme, jsou způsobeny (kromě zpoždění) především chybami v pozorování hodnot (cen) příslušného statistického souboru\*.**

Tehdy zastávaný názor vycházel z úvahy, že **na vektor podílových změn cen**

$$x_i = \frac{p_i(I)}{p_i(0)} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

lze pohlížet jako na konečnou množinu realizací náhodné veličiny  $X$  "**všeobecná cenová změna**", a že každý konkrétně vyšetřovaný soubor podílových cenových změn  $p_i(I)/p_i(0)$  má charakter náhodného výběru, jehož prvky jsou vzájemně nezávislé a stejně rozdělené. Přitažlivost tohoto nazírání byla podložena statistickými vývody, neboť platí, že:

**a) jsou-li složky náhodného vektoru  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  nezávisle a stejně normálně rozděleny  $N(\mu; \delta^2)$ , pak nestrannou odhadovou funkcí (získanou např. metodou maximální věrohodnosti) střední hodnoty  $\mu$  je aritmetický průměr prvků výběrového souboru**

$$\bar{x}^A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

**b) jsou-li složky náhodného vektoru  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  nezávisle a stejně rozděleny logaritmicke-normálně  $LN(\mu, \sigma^2)$ , pak nestrannou odhadovou funkcí (získanou metodou maximální věrohodnosti) střední hodnoty  $\mu$  je prostý geometrický průměr prvků výběrového souboru**

$$\bar{x}^G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N x_i}$$

V **Edgeworthově pohledu** (nazývaném **varianta stochastického standardního přístupu**) lze zaznamenat snahu po vyjádření přesnosti měření individuálních cenových změn adekvátním váhovým vektorem. Na druhé straně je však tímto přesnosti měření přikládán význam nesouvisející s tím, jaká je významnost komodity v analyzovaném spotřebním koši (vyjádřená např. objemem její spotřeby).

Přes inspirativnost byl nicméně záhy tento přístup odmítnut pro zřetelné znásilnění ekonomické reality ve prospěch uvedeného teoreticko-statistického schématu. Jak později ukázali **A.L.Bowley** a **J.M.Keynes**, odporují tomuto pohledu jak empirické tak teoretické důvody: **Empirická šetření nedala za pravdu domněnkám o normalitě ani logaritmické normalitě rozdělení cenových poměrů** (až snad na ojedinělé případy). Podobně, **reálné projevy cenového vývoje různých komodit jsou charakteristické tím, že vývoj cen určité skupiny komodit se zpravidla (v krátkém či delším horizontu) systematicky liší od vývoje cen jiné skupiny** (v závislosti např. na substitučních aspektech) a **ke sblížení trendů nemusí dojít ani po velmi dlouhém období**. Zde hraje zřejmou úlohu provázanost cen se spotřebou charakteristická pro prostředí všeobecné ekonomické rovnováhy : **ceny či jejich podíly nejsou v ekonomickém prostředí rozděleny náhodně**.

**Edgeworthův přístup** udává nicméně základní motivaci pro racionální konstrukci indexního čísla tím, že usiluje o **vystižení "střední cenové změny"** nějakým

**průměrováním podílů**  $\frac{p_i}{p_i}$

Přirozeným způsobem, jak zlepšit vlastnosti průměrování podílů  $\frac{p_i}{p_i}$ , je **použití**

**vážených typů průměrů**. Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah  $\alpha$ , které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) na celkovém agregátním vyjádření.

Máme-li **čtyři základní typy průměrů** (aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický), lze dospět ke čtyřem použitelným agregujícím konstruktům :

**A. Indexní čísla založená na aritmetickém průměru:**

$$P_{01}^A = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \frac{p_i}{p_i}}{\sum_{i=1}^N \alpha_i}$$

**B. Indexní čísla založená na geometrickém průměru:**

$$P_{01}^G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N \left( \frac{p_i}{p_i} \right)^{\alpha_i}}$$

**C. Indexní čísla vycházející z harmonického průměru:**

$$\frac{1}{P_{01}^H} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \left( \frac{p_i}{p_i} \right)}{\sum_{i=1}^N \alpha_i}$$

**D. Indexní čísla založená na kvadratickém průměru:**

$$P_{01}^Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \left( \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^2}{\sum_{i=1}^N \alpha_i}}$$

Prosté průměry, z nichž se některým též dostalo specifického pojmenování (při operování

s podílovými cenovými změnami), dostaneme z vážených volbou rovnoměrných vah tj. při  $\alpha_i = 1/N$ . Kvadratický průměr se oproti ostatním používá v prostředí indexních čísel řídčejí.

**Pro váhy  $\alpha_i$  budeme předpokládat standardní omezení spočívající v jejich nezápornosti** (s ohledem na nezápornost kvantit a kladnost cen) a dále **v tom, že jejich součet (uvažovaný přes všech N komodit) je jedničkový**, tzn.

$$\alpha_i \geq 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$$

Použitelnými způsoby vyjádření odlišnosti váhového podílu každé komodity na celkovém agregátním komplexu jsou např. volby vah následujícího typu :

$$\alpha_i = \frac{q_i^{(*)}}{\sum_{i=1}^N q_i^{(*)}} \quad \alpha_i = \frac{p_i^{(0)} \cdot q_i^{(*)}}{\sum_{i=1}^N p_i^{(0)} \cdot q_i^{(*)}} \quad \alpha_i = \frac{p_i^{(1)} \cdot q_i^{(*)}}{\sum_{i=1}^N p_i^{(1)} \cdot q_i^{(*)}}$$

**Z obecné teorie středních hodnot vyplývá, že pro libovolnou n-tici nezáporných čísel platí nerovnosti pro vztahy mezi průměry ( prostými i váženými )**

$$P_{0I}^H \leq P_{0I}^G \leq P_{0I}^A \leq P_{0I}^Q$$

Všechny tyto průměry lze totiž zapsat jako zvláštní formy obecného výrazu pro střední hodnotu řádu  $\rho$ .

Tuto **obecnou střední hodnotu lze pro průměry prostého typu vyjádřit výrazem**

$$P^{\rho} P_{0I} = \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i(I)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}$$

resp. **pro průměry váženého typu** ji lze zapsat analogicky jako

$$\alpha P^{\rho} P_{0I} = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \left( \frac{p_i(I)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}$$

**Aritmetický průměr je zvláštním případem obecné střední hodnoty při volbě  $\rho = 1$ , kvadratický průměr při volbě  $\rho = 2$ , harmonický průměr obdržíme při dosazení  $\rho = -1$ . Geometrický průměr je limitním případem obecné střední hodnoty řádu  $\rho$ , pokud se hodnota  $\rho$  limitně blíží k 0. Vzorce platí jak pro prosté, tak pro vážené průměry, pokud váhy splňují podmínky  $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$  –platnost nerovností se zachovává i při určitém uvolnění podmínek.**

**Pro jakékoliv dvě střední hodnoty řádů  $r, s$  pro které platí nerovnost řádů, tj. např.  $r < s$ , vždy platí tzv. Schlömilchova nerovnost**

$$P_{0I}^r < P_{0I}^s \quad \text{resp.} \quad \alpha P_{0I}^r < \alpha P_{0I}^s$$

## 1.2 Klasická (statistická) indexní čísla

Vůbec nejjednodušší případ "rozumného indexního čísla" představuje

**1. CARLI/SAUERBECKovo indexní číslo** [Gian-Ricardo Carli 1764, Augustus M.Sauerbeck 1885]

$$P_{01}^S = \frac{I}{N} \frac{\sum_{i=1}^N p_i}{\sum_{i=1}^N p_i},$$

kteřé je **prostým aritmetickým průměrem podílových cenových změn**. Jde o nejjednodušší možný přístup k agregaci podílových změn  $p_i(1)/p_i(0)$  bez možnosti (průměr je nevážený) uplatnit jakákoliv hlediska k vyjádření rozdílné významnosti jednotlivých komodit v celkovém agregátním vyjádření.

Nahradíme-li aritmetické průměrování geometrickým, lze formulovat jednoduchý výraz nazývaný

**2. JEVONSovo indexní číslo** [William Stanley Jevons 1865]

$$P_{01}^J = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^N \left( \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)}$$

Tento indexní konstrukt je pojmenován po anglickém ekonomu **Stanley W. Jevonovi**. Tvoří ho **prostý geometrický průměr podílových cenových změn**. Jak plyne ze Schlömilchovy nerovnosti, **Jevonsův index poskytuje vždy nižší (nanejvýš stejnou) hodnotu než Carliho/Sauerbeckův index – rovnost nastává jen pro netypický případ, kdy by byly všechny podílové cenové změny  $p_i(1)/p_i(0)$  shodné**. Jinými slovy řečeno to znamená, že **geometrický průměr "střední hodnotu" těchto cenových změn podhodnocuje, zatímco aritmetický ji nadhodnocuje**.

Jak **Carliho/Sauerbeckovo** tak **Jevonsovo indexní číslo** vykazují určité slabiny, které je znehodnocují vzhledem k možnosti praktického použití:

- Nutnost výskytu shodných komodity zařazené do příslušných spotřebních košů (to může činit problém v situacích, kdy jsou obě období časově značně vzdálená),
- Vyloučení přítomnosti volných statků (komodit s nulovými cenami) v základním období, u Jevonsova indexu – nemá-li být index identicky nulový – i v běžném období.
- Nemožnost odlišit rozdílnost vlivu cenových podílů různých komodit k hodnotě souhrnného indexu v praktických situacích. (Změna ceny chleba i ceny pepře se v indexu uplatní stejnou vahou navzdory diametrálně odlišné spotřebě obou komodit u všech spotřebitelů). Stejnou slabinou by ostatně trpěl i harmonický či kvadratický průměr.

Přirozeným způsobem, jak zlepšit vlastnosti prostého průměrování podílů  $p_i$  a  $p_i$ , je proto použití vážených typů průměrů. Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah  $\alpha_i$ , které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) na celkovém agregátním indexním vyjádření.

Příkladem indexů “váženého typu” je dvojice indexních čísel: **Laspeyresovo a Paascheho**, která využívají aritmetický popř. harmonický způsob vážení:

### 3. LASPEYRESovo indexní číslo [Ernst Louis Etienne Laspeyres 1871]<sup>1</sup>

$$P_{01}^L = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

tzn. jde o **vážený aritmetický**

průměr cenových změn, s vahami  $\alpha_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}$ .

Je to vidět z následujícího vyjádření

$${}_{\alpha} P_{01}^A = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)} = P_{01}^L$$

**Laspeyresův index** obdržíme také jako **vážený harmonický průměr**, pokud zvolíme

$$\beta_i = \frac{p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}, \text{ neboť } \frac{1}{\beta P_{01}^H} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(1) \cdot q_j(0)} \left( \frac{p_i(0)}{p_i(1)} \right) = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)} = \frac{1}{P_{01}^L}$$

Index uplatnil v roce 1871 německý ekonom **E. Laspeyres** k analýze cenových relací **při zbožních výměnách v Německu**. Laspeyresovo indexní číslo je využíváno v české (stejně jako dříve v československé) **statistické praxi**, zejména k měření vývoje **inflace (CPI - index spotřebitelských cen, PPI – index cen průmyslových výrobců) a indexů životních nákladů** (souhrnně, i u různých sociálních kategorií).

Záměnou cen za kvantitty a *vice versa* získáme **Laspeyresovo kvantové (množstevní, objemové) indexní číslo** ve tvaru

$$Q_{01}^L = \frac{\sum_{i=1}^N q_i(1) \cdot p_i(0)}{\sum_{i=1}^N q_i(0) \cdot p_i(0)}$$

ve kterém se uplatňují opět tři z vektorů, tentokrát  $p(0), q(0), q(1)$ .

Vezmeme-li místo spotřeb  $q_i(0)$  spotřeby z běžného období  $q_i(1)$ , dostaneme

### 4. PAASCHEho indexní číslo [Hermann von Paasche 1874]<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laspeyres, E.L.E.: Die Berechnung einer mittleren Warenpreissteigerung. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 16, s.296-314.

$$P_{01}^P = \frac{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i}$$

Jde o obdobu předchozího, avšak váhy  $\gamma_i$  jsou zde dány jako

$$\gamma_i = \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i}$$

Uplatníme-li tyto váhy ve **váženém aritmetickém průměru**, dostaneme

$$\gamma P_{01}^A = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_i(0)q_i(1)}{\sum_{j=1}^N p_j(0)q_j(1)} \cdot p_i}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^N p_j \cdot q_j} = P_{01}^P$$

$P_{01}^P$  lze ale vyjádřit i jako **vážený harmonický průměr** s vahami  $\delta_i = \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i}$

Index nese jméno po německém ekonomu **H. von Paaschem**, který jej použil při **analýze vývoje cenových kursů na hamburské burze**. Paascheho indexní číslo je (zejména v anglosaské jazykové oblasti a v Japonsku) často užíváno k charakterizaci **vývoje burzovních indexů** na kapitálových trzích.

Záměnou cen za kvantita a *vice versa* získáme **Paascheho kvantové (množstevní, objemové) indexní číslo** ve tvaru

$$Q_{01}^P = \frac{\sum_{i=1}^N q_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^N q_i \cdot p_i}$$

**Poznámka:** Údajně první osobou, která uvedla a rozvinula postupy vedoucí k definicím **Paascheho a Laspeyresova indexního čísla** byl (rovněž v roce 1871) německý matematik/filosof **Wilhelm Moritz Drobisch [1802-1896]**. Jeho jméno bylo ale o mnoho později vztaheno k indexu jiného tvaru.

Obě tato indexní čísla tvoří určité rozmezí (s dolní hranicí  $P_{01}^P$  a horní hranicí  $P_{01}^L$ ), v rámci něhož lze považovat posouzení vývoje poměrů sledovaných veličin (cen, kvantit) za realistické. **Hodnoty převyšující  $P_{01}^L$  a hodnoty menší než  $P_{01}^P$  za realistické považovat nelze** a případný výsledek (získaný jiným indexním číslem) je třeba posuzovat již jako zřetelné nadhodnocení, resp. podhodnocení skutečného stavu.

**Nevýhodou obou těchto indexních čísel** (kromě jiných teoretických vad) je skutečnost, že **nezacházejí symetricky s informacemi získanými v základním a v běžném období**.

<sup>2</sup> Paasche, von H.: Über der Preisentwicklung der Letzte Jahre nach den Hamburger Börsennotirungen. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 23, s.168-178.

Tuto nevýhodu odstraňují jiná indexní čísla, která váží cenové podíly  $p_i(1)/p_i(0)$  vahami, operujícími s kvantitami základního nebo běžného období “neutrálně”. Jde o **5. MARSHALL-EDGEWORTHovo indexní číslo** [Alfred Marshall, Francis Y. Edgeworth 1887]

$$P_{01}^E = \frac{\sum_{i=1}^N p_i \cdot v_i + q_i}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot v_i + q_i}$$

V něm jsou váženy jednotlivé cenové poměry aritmetickým průměrem kvantit vzatých ze základního a běžného období. Také toto indexní číslo může být interpretováno jako vážený aritmetický průměr s vahami

$$\alpha_i^E = \frac{p_i \cdot v_i + q_i}{\sum_{j=1}^N p_j \cdot v_j + q_j}$$

**6. WALSHovo indexní číslo** [Correa Moylan Walsh 1921]

$$P_{01}^W = \frac{\sum_{i=1}^N p_i \cdot \sqrt{q_i \cdot q_i}}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot \sqrt{q_i \cdot q_i}}$$

ve kterém jsou s kvantitami neutrálně průměrovány geometricky. C.M. Walsh argumentoval pro tento návrh právě potřebou zacházet „symetricky“ s informacemi převzatými ze základního a běžného období, nejsou-li jiná vodítka, kterému z těchto období dát přednost. I jeho index je speciálním případem váženého aritmetického průměru, pokud za váhy  $\alpha_i$  vezmeme výrazy

$$\alpha_i^W = \frac{p_i \cdot \sqrt{q_i \cdot q_i}}{\sum_{j=1}^N p_j \cdot \sqrt{q_j \cdot q_j}}$$

Ve snaze dospět k “optimálnímu” indexnímu konstrukt, byl mj. uveden návrh známý jako

**7. FISHERovo (ideální) indexní číslo** [Irving Fisher 1922]  $P_{01}^F = \sqrt{P_{01}^L \cdot P_{01}^P}$ ,

Index je definován jako (prostý) geometrický průměr **Laspeyresova a Paascheova indexního čísla**. Je pojmenován po Američanovi Irvingu Fisherovi, ač byl již dříve zmiňován **Arthurem Leonem Bowleyem [1899]** a **Arthurem Cecilem Pigouem [1912]**. Z konstrukce tohoto indexního čísla je zřejmé, že **jeho hodnota se musí nacházet mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem**.

Jak se při praktickém uplatnění ukazuje, **hodnoty Fisherova, Edgeworthova a Walshova indexního čísla** jsou zpravidla velmi blízké a všechna mohou dobře vyjadřovat “neutrální” hodnocení vývoje či územního srovnání stavů posuzovaného komplexu.

Oproti Laspeyresovu a Paascheho indexním číslům operují, jak patrně, **Walshův, Edgeworthův a Fisherův index** s celou čtveřicí vektorů  $p(0), p(1), q(0), q(1)$ ,

### 1.3 Některá další statistická indexní čísla

Další indexní číslo, kterému se dostalo značné teoretické pozornosti, je

#### 8. TÖRNQUISTovo indexní číslo [Leo Törnquist 1936]<sup>3</sup>

$$P_{01}^T = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{w_i}}, \text{ kde}$$

$$w_i = 0,5 \cdot \left( \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^n p_j \cdot q_j} \right) + 0,5 \cdot \left( \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^n p_j \cdot q_j} \right),$$

což je **vážený geometrický průměr cenových poměrů**  $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ , v němž jsou váhy  $w_i$

vytvořeny jako prosté **aritmetické průměry výdajových účastí**  $i$ -té kvantity (na peněžním agregátu) v základním a v běžném období.

Ke klasickým indexním číslům můžeme přiřadit ještě dva návrhy, které lze vyjádřit jako vážené průměry. Jedná se o

#### 9. PALGRAVEovo indexní číslo [R.H.Inglis Palgrave kolem 1910]

$$P_{01}^{PL} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^n p_j \cdot q_j} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^n p_j \cdot q_j} \cdot p_i(0)}$$

#### 10. Harmonický LASPEYRESův index [Yrjö Vartia 1976]<sup>4</sup>

$$\frac{I}{P_{01}^{HL}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^n p_j \cdot q_j} \cdot \frac{p_i(0)}{p_i(1)}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^n p_j \cdot q_j} \cdot p_i(0)}$$

Obě tato indexní čísla se vyznačují tím, že se v jejich konstrukci objevují opět váhy v podobě výdajových účastí („**expenditure shares**“) mající

u **Palgraveova indexu** tvar

$$\alpha_i^{PL} = \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^n p_j \cdot q_j}$$

u **harmonického Laspeyresova indexu** tvar

$$\alpha_i^{HL} = \frac{p_i \cdot q_i}{\sum_{j=1}^n p_j \cdot q_j}$$

Indexní čísla **Laspeyresovo**, **Paascheho** a některá další lze zařadit do kategorií **indexů tzv. Löweova typu**. Tato indexní čísla lze vyjádřit ve tvaru

<sup>3</sup>Törnquist, L.: The Bank of Finland's consumption price index. Bank of Finland Monthly Bulletin 10/ 1936

<sup>4</sup>Vartia Y: Ideal Log-Change Index Numbers. Scandinavian Journal of Statistics 3/1976



## 11. LÖWEŮV (cenový) index [Joseph Loewe 1823]

$$P_{01}^{LW} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^* \cdot q_i^*}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i}$$

kde hvězdičky v závorce vyjadřují situování do nějakého pevného časového období nebo jde prostě o nějakým způsobem stanovené kvantitě (u **Edgeworthova** či **Walshova čísla** se vezmou průměry kvantit ze základního a běžného období). Obvykle se předpokládá, že období vyjádřené hvězdičkou nepředchází základnímu období „0“.

Obecnost **Löweovy formulace** nazývané **přístupem pevného koše [fixed basket approach]** přináší s sebou na druhé straně stupeň neurčitosti, máme-li rozhodnout o nejhodnějším naplnění hvězdiček v závorkách.

Ještě jednomu obecnému tvaru, jímž je možno řadu klasických indexních čísel zapsat, se dostalo pozornosti. Jde o indexy vyjádřitelné jako

„obecná střední hodnota řádu  $r$ “ 
$${}_s P_{01}^t(r) = \left( \sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot \left( \frac{p_i^*(t)}{p_i} \right)^r \right)^{1/r} \text{ pro } r \neq 0$$

nebo výrazem 
$${}_s P_{01}^t(0) = \prod_{i=1}^N \left( \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{s_i(t)} \text{ limita pro } r \rightarrow 0$$

přičemž váhy 
$$s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t)q_i(t)}$$

představují **výdajové účasti [expenditure shares]**  $i$ -té komodity na hodnotě celkového spotřebního koše. Hodnoty těchto účastí se přebírají zpravidla buď ze základního nebo běžného období. Z uvedených indexních čísel lze za speciální případy **obecné střední hodnoty s vahami charakteru výdajových účastí** vyjádřit

**Laspeyresovo cenové indexní číslo** 
$$P_{01}^L = \sum_{i=1}^N p_i(0) \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = P_{01}^0(1)$$

**Paascheho cenové indexní číslo** 
$$P_{01}^P = \left( \sum_{i=1}^N p_i(1) \frac{p_i(0)}{p_i(1)} \right)^{-1} = P_{01}^1(-)$$

**Palgraveův cenový index** 
$$P_{01}^{PL} = \sum_{i=1}^N p_i(1) \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = P_{01}^1(1)$$

**Harmonický Laspeyresův index** 
$$P_{01}^H = \left( \sum_{i=1}^N p_i(0) \frac{p_i(0)}{p_i(1)} \right)^{-1} = P_{01}^0(-)$$

**Törnquistův cenový index**

$$P_{01}^T = \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{p_i(0) + p_i(1)}{p_i(0) + p_i(1)}} = P_{01}^{0+}$$

**Fisherovo cenové indexní číslo** může být zapsáno jako

$$P_{01}^F = (P_{01}^0(1))^{1/2} (P_{01}^1(-))^{1/2}$$

Podobně bychom mohli nejrůznější volbou vah a průměrů různých typů dospět k mnoha dalším tvarům, které by dohromady vytvořily početný soubor více nebo méně užitečných typů souhrnných indexů. Většina nahodile konstruovaných výrazů ovšem nepřesvědčila z hlediska svých vlastností, popř. i podmínek praktického užití, takže se do teoretického povědomí dostaly jen málokteré z nich.

Předchozí soubor cenových (případně kvantových) indexů je už sám o sobě dost početný, aby nás postavil před otázku, **volba jakého typu cenového nebo kvantového indexu je pro daný případ nebo obecně optimální ?**

Jak rozlišit mezi vhodností a použitelností mnoha možných návrhů navzájem ? Přitom musíme mít na zřeteli, že vedle čistě matematických vlastností je ještě důležitější **posuzovat index z hlediska účelu zasazení do ekonomického prostředí.**

**Otázka vhodnosti určitého indexu** pro konkrétní použití je nicméně vždy **arbitrární.**

Na konci 19. a v průběhu celého 20.století bylo věnováno značné úsilí, **jak formulovat soubor kritérií, podložených zdůvodněnými teoretickými požadavky, které do určité míry dovolují posoudit "kvalitu" toho- kterého návrhu tvaru konkrétního indexního čísla,** byť - jak dále uvidíme - nelze aspirovat na stanovení "všestranně nejlepšího" indexního čísla.

Doplňme ještě dva jednoduché indexy, se kterými se lze setkat v aktuální literatuře a které svou konstrukcí nevybočují z konceptu statistických indexních čísel. Jde o

**12. Bowley-Sidgwick-Drobishův cenový index** [A.L.Bowley,H. Sidgwick<sup>5</sup>,W.M.Drobisch]

daný jako aritmetický průměr Laspeyresova a Paascheho cenového indexu, tedy

$$P_{01}^{BSD} = \frac{1}{2} (P_{01}^L + P_{01}^P), \quad a$$

**13. Carruthers-Sellwood-Ward-Dalénův cenový index** [xxxx]

definovaný jako prostý geometrický průměr prostých aritmetického a harmonického průměru

$$P_{01}^{CSWD} = \sqrt{P_{01}^A \cdot P_{01}^H}$$

Z konstrukcí obou je zřejmé, že platí

$$P_{01}^P \leq P_{01}^F \leq P_{01}^{BSD} \leq P_{01}^L \quad a$$

$$P_{01}^H \leq P_{01}^{CSWD} \leq P_{01}^A$$

<sup>5</sup> Henry Sidgwick [1938-1900] byl významný britský filosof a politický ekonom (názorově blízký J.S.Millovi), mj. zakladatel a první prezident *Society for Psychical Research.*