

Walshův postup

C.M. Walsh navrhl postup, kterým lze jakékoliv "klasické" indexní číslo převést na konstrukt, který bude zaručeně splňovat axiom záměny faktorů (F2). Stačí k tomu, abychom k libovolné dvojici cenového a kvantového indexního čísla P_{01} , Q_{01} zavedli příslušné "**Walshovy modifikace**" P_{01}^W , Q_{01}^W takto:

$$P_{01}^W = \sqrt{\frac{P_{01}}{Q_{01}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}}$$

$$Q_{01}^W = \sqrt{\frac{Q_{01}}{P_{01}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}}$$

Ilustrace: Laspeyresovo indexní číslo Vytvořme Walshovy modifikace P_{01}^W a Q_{01}^W výše zmíněnou úpravou. Po dosazení a vykrácení $\prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}$ dostaneme

$$P_{01}^W = \sqrt{\frac{P_{01}}{Q_{01}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}} = \sqrt{\frac{P_{01}}{Q_{01}} \cdot 1} = \sqrt{\frac{P_{01}}{Q_{01}}}$$

a podobně pro kvantové Q_{01}^W

$$Q_{01}^W = \sqrt{\frac{Q_{01}}{P_{01}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}} = \sqrt{\frac{Q_{01}}{P_{01}} \cdot 1} = \sqrt{\frac{Q_{01}}{P_{01}}}$$

Dostaneme dvojici **Fisherových indexních čísel** P_{01}^F , Q_{01}^F . Lze se přesvědčit, že k témuž výsledku dospějeme, pokud místo Laspeyresových vezmeme za výchozí **Paascheho indexní čísla** P_{01}^P , Q_{01}^P .

Poznámka 1 K dosažení platnosti testu (F2) bychom nemuseli operovat s podílem P_{01}^*/Q_{01}^* , nýbrž by stačilo vzít podíl jakýchkoliv dvou výrazů, které by byly interpretovatelné jako cenové a kvantové indexní číslo. Obecná volba

$$P_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}}$$

$$Q_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{B_{01}}{A_{01}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}}$$

zaručující splnění (F2) se obvykle ukáže jako nevhodná ve světle potřeby splnění jiných testů. Pro příklad lze uvést test proporcnosti (F7), kde požadujeme, aby platilo

$$P_{01}^{AF} = \text{avšak obecně } P_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}} = c \cdot \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{p_i \cdot q_i}{p_i \cdot q_i}}$$

a ničím není zaručeno, že výraz v poslední odmocnině je aspoň blízký hodnotě \sqrt{c} .

U Walshem navrženého postupu naproti tomu dostáváme

$$R_{01}^W = \sqrt{\frac{c \sum_{i=1}^N \rho_i \cdot \rho_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i \cdot \rho_i}} = \sqrt{\frac{1 \sum_{i=1}^N \rho_i \cdot \rho_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i \cdot \rho_i}}$$

pokud P_{01}^* vyhovuje testu (F7), což např. platí pro P_{01} nebo P_{01} , přičemž pravděpodobnost (aspoň přibližného) splnění toho, že výraz v odmocnině je roven 1, může být vysoká. Pokud za Q_{01}^* vezmeme Q_{01} , pak rovnost platí přesně.

von Bortkiewiczova relace

Pruský matematik a ekonom **Ladislaus Josefovíč von Bortkiewicz** odvodil užitečnou strukturální relaci mezi Laspeyresovým a Paascheho indexním číslem, která může napomoci vzájemnému porovnání jejich číselných hodnot:

$$B = \frac{E_{pl}^l}{E_{ql}^l} = \frac{S_{pl}^l}{S_{ql}^l} \cdot \frac{r_{pl\ ql}^{pl\ ql}}{p_0^l \cdot q_0^l}$$

V ní přítomné symboly mají následující význam:

- 1) E_{pl}^l označuje **vážený aritmetický průměr cenových poměrových změn** $\frac{p_i^l}{p_0^l}$ s

vahami tvaru $w_j = \frac{p_j^l \cdot q_j^l}{\sum_{j=1}^N p_j^l \cdot q_j^l}$. E_{pl}^l je tedy **Laspeyresův cenový index** R_{01}^l .

- 2) E_{ql}^l označuje **vážený aritmetický průměr změn kvantit** $\frac{q_i^l}{q_0^l}$ s týmiž vahami, tzn. tento výraz je **Laspeyresovým kvantovým indexním číslem** Q_0^l .

- 3) S_{pl}^l označuje výběrovou **směrodatnou odchylku cenových poměrových změn**

$\frac{p_i^l}{p_0^l}$ s vahami $w_j = \frac{p_j^l \cdot q_j^l}{\sum_{j=1}^N p_j^l \cdot q_j^l}$: $S_{pl}^l = \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{p_j^l}{p_0^l} - 1 \right)^2 \cdot w_j}$

- 4) S_{ql}^l vyjadřuje **směrodatnou odchylku změn kvantit** $\frac{q_i^l}{q_0^l}$ se stejnými vahami, tj.

$$S_{ql}^l = \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{q_j^l}{q_0^l} - 1 \right)^2 \cdot w_j}$$

- 5) Výraz $r_{pl\ ql}^{pl\ ql}$ značí **vážený párový korelační koeficient** mezi poměrově vyjádřenými

cenovými a kvantovými změnami. Formálně zapsáno: $r_{pl\ ql}^{pl\ ql} = \frac{co\left(\frac{p}{p_0}, \frac{q}{q_0}\right)}{S_{pl}^l \cdot S_{ql}^l}$, přičemž

výraz pro **váženou kovarianci** v čitateli zlomku je

$$\text{cov}\left(\frac{p_1}{p}, \frac{q_1}{q}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{p} \cdot \frac{q_i}{q} - \left(\frac{p_1}{p} - E\left[\frac{p_1}{p}\right]\right) \left(\frac{q_1}{q} - E\left[\frac{q_1}{q}\right]\right)$$

Poznámka 2 Podíl směrodatné odchylky a příslušné střední hodnoty je **variační koeficient**, takže dva výrazy v součinu pro B jsou **variačními koeficienty** $V_{\frac{p_1}{p}}, V_{\frac{q_1}{q}}$. Oba jsou zřejmě v důsledku kladných cen a nezáporných kvantit vždy nezáporné.

Ověření platnosti Bortkiewiczova poměru

vyvodíme ze vztahů užívaných v popisné statistice. Prvním z nich je relace

$$(1) \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right) + \rho_{xy}$$

kteřá je obdobou výpočtového vzorce pro výběrový rozptyl $\text{var}_{xy} = \dots$

ověření (1) Rozvedením vztahu pro kovarianci dvou vektorů dostaneme

$$\frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right] = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) y_i - \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \bar{y} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) y_i \right) - \bar{y} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \right)$$

následně převedením x, y na opačnou stranu získáme hledanou relaci. \square

Analogicky bychom odvodili platnost obdobného vztahu pro vážené charakteristiky:

$$(2) \quad \frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i = \left(\frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=1}^n w_i x_i \right) \left(\frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=1}^n w_i y_i \right) + \rho_{xy}^w$$

kde $w_i, i=1, \dots, n$ jsou nezáporné váhy normované jedničkovým součtem: $\sum w_i = 1$.

Označíme-li

$$\bar{x}^w = \frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=1}^n w_i x_i, \quad \bar{y}^w = \frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=1}^n w_i y_i, \quad \text{cov}^w(x, y) = \frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^w) (y_i - \bar{y}^w)$$

můžeme předchozí výraz zapsat ve tvaru

$$(2^*) \quad \text{cov}^w(x, y) = \bar{x}^w \bar{y}^w + \rho_{xy}^w$$

Identitu (2*) dále upravíme tak, že ji vydělíme výrazem $\bar{x}^w \bar{y}^w$. Dostaneme

$$\frac{I_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i}$$

a druhý výraz pravé strany doplníme vložení směrodatných odchylek. Tím získáme vyjádření s variačními koeficienty veličin x_i a y_i a jejich korelační koeficient r_{xy} .

$$\frac{I_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i} = \frac{s_x s_y r_{xy}}{\bar{x}}$$

Stejně bychom získali analogické vyjádření pro vážené veličiny x^w, y^w, s_x^w, s_y^w a r^w_{xy} , pokud by byly všechny vážené stejnými vahami $w_i, i = 1, \dots, N$. Vážená obdoba by vypadala následovně

$$\frac{\sum_{i=1}^N w_i y_i}{\sum_{i=1}^N w_i x_i} = \frac{s_x^w s_y^w r^w_{xy}}{\bar{x}^w}, \quad \text{kde máme}$$

$$\bar{x}^w = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i}, \quad \bar{y}^w = \frac{\sum_{i=1}^N w_i y_i}{\sum_{i=1}^N w_i}, \quad s_x^w = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x}^w)^2}{\sum_{i=1}^N w_i}}$$

$$s_y^w = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N w_i (y_i - \bar{y}^w)^2}{\sum_{i=1}^N w_i}}, \quad \text{cov}^w_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x}^w)(y_i - \bar{y}^w)}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

s nějakým vektorem nezáporných a jedničkovým součtem normovaných vah $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$. Sledovaného cíle dosáhneme, ukážeme-li, že levá strana výrazu, může přejít vhodnou konkretizací veličin x_i, y_i a $w_i, i = 1, \dots, N$ ve **výraz vyjádřitelný jako podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla**.

Vyjádřeme tedy nejdříve podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla jako:

$$(3) \quad \frac{P_{01}}{L_{01}} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^1 q_i^0}{\sum_{i=1}^N p_i^0 q_i^0} \frac{\sum_{i=1}^N p_i^0 q_i^1}{\sum_{i=1}^N p_i^0 q_i^0}$$

Na základě předchozího a tvaru pravé strany Bortkiewiczova poměru vyšetříme, zda podíl zmíněných indexních čísel lze vyjádřit jako výraz korespondující se zápisem (3), jehož levá strana by měla podobu vážené kovariance dělené součinem stejně vážených středních hodnot dvou vektorů vyjadřujících cenové a množstevní změny s vhodně volenými vahami. Ukazuje se, že toto vyjádření je možné, a to při následující

volbě veličin: $x_i = \frac{p_i^t \cdot q_i^t}{p_i^0 \cdot q_i^0}$, $y_i = \frac{p_i^0 \cdot q_i^t}{p_i^0 \cdot q_i^0}$ a vah $w_i^* = \frac{p_i^0 \cdot q_i^0 \cdot q_i^t}{\sum_{j=1}^N p_j^0 \cdot q_j^0 \cdot q_j^t}$. Tyto

konkretizace pro x_i a y_i lze vzhledem k symetrii výrazů přirozeně zaměnit. Dosadíme-li totiž zmíněné veličiny do (2), dostaneme

$$\frac{\sum_{i=1}^N p_i^t \cdot q_i^t \cdot \frac{p_i^t \cdot q_i^t}{p_i^0 \cdot q_i^0}}{\sum_{i=1}^N p_i^t \cdot q_i^t \cdot \frac{p_i^0 \cdot q_i^t}{p_i^0 \cdot q_i^0}} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^t \cdot q_i^t \cdot \frac{p_i^t \cdot q_i^t}{p_i^0 \cdot q_i^0}}{\sum_{i=1}^N p_i^t \cdot q_i^t \cdot \frac{p_i^0 \cdot q_i^t}{p_i^0 \cdot q_i^0}}$$

což po dalším vykrácení součtem $\sum_{i=1}^N p_i^t \cdot q_i^t$ zřejmě dává výraz vyjadřující podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla. □

Záměnou cen za kvantify a opačně bychom dospěli tímto způsobem k vyjádření

$$\frac{Q_1^L}{Q_1^P} = \frac{p_1^0}{p_1^t} \cdot \frac{y_1}{x_1} \quad (\text{tzn. s prohozením obsahu } x_i \text{ a } y_i)$$

z něhož je mj. patrná platnost "křížového" splnění rovnosti $P_0^L \cdot Q_1^L = P_1^L \cdot Q_0^L$. □

Z vlastností (vážených) středních hodnot a směrodatných odchylek lze dále dovodit, že "neutrální hodnota" 1 von Bortkiewiczova podílu nastane v případech, kdy :

(1) všechny ceny se změni ve stejném poměru, tj. $\frac{p_i^t}{p_i^0} = k$ pro všechny komodity.

Tento analyticky ideální případ je ovšem výjimečný.

(2) všechny kvantify se změni ve stejném poměru tj. $\frac{q_i^t}{q_i^0} = k$ pro všechny statky.

Tato eventualita je při užití reálných hodnot stejně vzácná jako předchozí případ.

(3) vektory cenových a kvantových změn jsou vzájemně nekorelované.

Tento případ zasazený do obvyklého ekonomického prostředí znamená situaci, kdy poptávka po komoditách zařazených do zkoumání není v zásadě ovlivněna změnami v jejich cenách mezi základním a běžným obdobím.

Ve všech situacích (1), (2), (3) tedy dojde ke shodě hodnot P_{01}^L a P_{01}^P .

Podobné úvahy nás přivedou k těmto závěrům:

Má-li být hodnota P_{01}^P větší než P_{01}^L , musí být (při nezápornosti ostatních prvků dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $\frac{r_{p1q1}}{p0q0}$ kladná, tzn.

mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat kladná korelace.

Má-li být P_{01}^P menší než P_{01}^L , musí být (při nezápornosti ostatních členů dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $\frac{r_{p1q1}}{p0q0}$ záporná, tzn. **mezi**

vektory cenových a kvantových změn musí existovat korelace negativní.

To odpovídá situaci, kdy **nadprůměrný růst cen některých komodit** (oproti průměrnému růstu či poklesu cen jiných komodit) **provází zpravidla podprůměrný růst** (popř. pokles) **poptávky po těchto komoditách**. Právě tato situace je v ekonomické realitě obvyklá. S ohledem na interpretaci korelačních vztahů (v prostředí spíše růstových tendencí cen a kvantit) lze konstatovat, že P_{01}^L index bude poskytovat vyšší hodnotu než P_{01}^P , protože “nadprůměrně” vysokým cenovým pohybům skutečně v ekonomickém prostředí odpovídají “podprůměrné” růsty či poklesy v poptávaných množstvích. Dále je zřejmé, že jak **Marshallovo-Edgeworthovo**, tak **Fisherovo** i **Walshovo** indexní číslo budou ležet v intervalu vymezeného zdola P_{01}^P a shora P_{01}^L .