8 Konzistentní výdajové systémy

V této části uvedeme několik příkladů schémat s konkrétními funkčními tvary, které mohou dobře sloužit nejen jako ilustrace, nýbrž také jako konkrétní modelové specifikace pro reálné ekonometrické využití - modelování spotřebitelské poptávky. Nejprve uvedeme - v částech 8.1 - 8.3 - schémata vycházející z (prosté) užitkové funkce, poté - v částech 8.4 - 8.8 připojíme několik dalších, jejichž východiskem je nepřímá užitková funkce nebo výdajová funkce. V jednotlivých - vesměs empiricky vícekrát prověřených - modelových formulacích půjde kromě prezentace výchozího funkčního tvaru zejména o odvození příslušného systému poptávkových funkcí.

8.1 Rozšířená kvadratická užitková funkce (dvoukomoditní)

Další funkční tvar, který bude předmětem vyšetření vhodnosti uplatnění jako užitková funkce, je **kvadratická funkce obsahující křížový člen**. Mezní užitky jsou v tomto případě lineárními funkcemi obou komodit. Volba kvadratická funkce však není vhodná, protože, jak ukážeme, nelze najít žádnou „konstelaci" parametrů, která by byla všestranně přijatelná vzhledem k obvyklým požadavkům kladeným na užitkovou funkci.

Uvažujme dvoukomoditní kvadratickou užitkovou funkci s křížovým členem $x_1 x_2$

(8.1) $$u(x) = \frac{1}{2}\left(a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2\right), \text{ kde } x_1 > 0,\ x_2 > 0 \text{ [1]}$$

jejíž (známé) parametry a_{11}, a_{12}, a_{22} zatím nepodrobíme žádným restrikcím.

Funkce zapsaná v **(8.1)** je spojitá a dvakrát spojitě diferencovatelná při jakékoliv volbě parametrů. Další její vlastnosti však, jsou však hodnotami parametrů silně ovlivněny.

Funkci budeme nyní maximalizovat standardním způsobem, tj. použijeme k kritérium

(8.2) $$Max\ u(x) - \lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M\right)$$

s Lagrangeovým multiplikátorem λ.

Výpočtem parciálních derivací a jejich následným anulováním získáme *nutné* podmínky pro lokalizaci rovnovážného bodu, v němž nastává maximum :

(8.3A) $$u_1 = \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

(8.3B) $$u_2 = \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \quad .$$

Máme tedy soustavu tří rovnic se třemi neznámými x_1, x_2 (a λ) :

(8.4A) $$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = \lambda p_1$$

(8.4B) $$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 = \lambda p_2$$

(8.4C) $$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M,$$

kterou pro tyto neznámé řešíme.

Zvolíme-li kteroukoliv z metod řešení soustav lineárních rovnic (např. komparační metodu s eliminací multiplikátoru λ), dostaneme řešení pro obě Marshallovské poptávky

(8.5A) $$M_{x_1} = \frac{M\left(a_{22} p_1 - a_{12} p_2\right)}{a_{11} p_2^2 + a_{22} p_1^2 - 2 a_{12} p_1 p_2}$$

(8.5B) $$M_{x_2} = \frac{M\left(a_{11} p_2 - a_{12} p_1\right)}{a_{11} p_2^2 + a_{22} p_1^2 - 2 a_{12} p_1 p_2}$$

(8.5C) $$\lambda = \frac{M\left(a_{11} a_{22} - a_{12}^2\right)}{a_{11} p_2^2 + a_{22} p_1^2 - 2 a_{12} p_1 p_2} \quad ,$$

---

[1] V případě připuštění nulových hodnot proměnných by již funkce nebyla dvoukomoditní.

přičemž pro úplnost je uveden i výraz **(8.5C)** pro neznámou λ. Tímto jsme získali dvojici Marshallovských poptávkových funkcí po komoditách x_1, x_2, které, jak vidíme, jsou přímo úměrné příjmu M a klesají s růstem ceny vlastní komodity p_i. Potud je vše v pořádku.

Kvadratická funkce **(8.1)** a z ní odvozené poptávkové funkce **(8.5A)**, **(8.5B)** by měly splňovat podmínky, které vyplývají z ekonomického kontextu. Tak např. (vedle podmínky $u(0)=0$, která zřejmě platí) musí být užitková funkce ***nezáporná pro všechny kladné hodnoty statků*** x_1, x_2. Dále má mít ***kladné oba mezní užitky*** a být ***kvazikonkávní***. ***Poptávkové funkce musí být*** **rovněž** ***nezáporné*** a měly by splňovat požadavek, *aby byly* ***klesající s cenou vlastní komodity***. Ukážeme, že v případě kvadratické funkce (8.1) jsou tyto požadavky vzájemně v rozporu a nelze nalézt žádný přípustný obor parametrických hodnot (a_{11}, a_{12}, a_{22}), ve kterém by byly všechny podmínky splněny.

A1. Nejprve vyšetříme podmínky pro ***nezápornost*** samotné ***kvadratické funkce***. Lze je vyjádřit jako požadavek, aby kvadratická forma s maticí koeficientů (a_{11}, a_{12}, a_{22}) byla v (nezáporných) proměnných x_1, x_2 kladně semidefinitní. To lze zapsat jako

(8.6) $$(x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Tento požadavek je – *jak známo z teorie kvadratických forem* – splněn právě tehdy, jestliže současně platí podmínky :

(8.7) $$a_{11} \geq 0, \quad a_{22} \geq 0, \quad a_{11}a_{22} \geq a_{12}^2 .$$ [2]

V jiných situacích nelze (*přinejmenším ne pro všechny nezáporné hodnoty komodit* x_1, x_2) nezápornost zaručit.

A2. Dále připojíme podmínky, za kterých jsou ***kladné oba mezní užitky*** v **(8.3A,B)** : Dostaneme

(8.8A) $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 > 0 \quad \text{neboli} \quad a_{11}x_1 > -a_{12}x_2$$

(8.8B) $$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 > 0 \quad \text{neboli} \quad a_{22}x_2 > -a_{12}x_1$$

Pro další rozbor uvažujme dva v úvahu přicházející případy (pro kladná x_1, x_2) :

a) $a_{11} > 0, \; a_{22} > 0$: Pak $\dfrac{x_1}{x_2} \geq -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ a současně $\dfrac{x_2}{x_1} \geq -\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$

Je zřejmé, že pokud $a_{12} > 0$ pak obě nerovnosti vzhledem k nezápornosti komoditních množství platí vždy (pravé strany jsou totiž záporné). Jestliže však máme $a_{12} < 0$ pak z **(8.8A)**, **(8.8B)** vyplývá, že množina komoditních kombinací, při kterých jsou tyto nerovnosti splněny, je vymezena takovou oblastí komoditního prostoru, ve které (ve vztahu k trojici parametrů) platí

$$-\frac{a_{12}}{a_{11}} \leq \frac{x_1}{x_2} \leq -\frac{a_{22}}{a_{12}}$$

---

2 *Pozitivní semidefinitnost* je ekvivalentní s *nezápornými hlavními minory matice kvadratické formy*.

b) $a_{11}<0, a_{22}<0$: Pak naopak $\frac{x_1}{x_2} \le -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, a podobně $\frac{x_2}{x_1} \le -\frac{a_{12}}{a_{22}}$.

Nyní je zřejmé, že pokud $a_{12}<0$ nemůže platit ani jedna z nerovností vzhledem k nezápornosti komoditních množství, zatímco jestliže $a_{12}>0$ je množina přípustných komoditních množství vymezena nerovnostmi $-\frac{a_{22}}{a_{12}} \le \frac{x_1}{x_2} \le -\frac{a_{12}}{a_{11}}$.

Odtud vyplývá, že **obor přípustných hodnot x_1, x_2 není omezen pouze tehdy, jsou-li všechny parametry kvadratické funkce a_{11}, a_{12}, a_{22} kladné.**

A3. Jako další vyšetříme (*postačující*) ***podmínky stability/kvazikonkávnosti***: Pro tento účel se vyjádříme příslušný determinant matice U obsahující obě komodity. Dostaneme

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{11} & a_{12} \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda p_1 & \lambda p_2 \\ \lambda p_1 & a_{11} & a_{12} \\ \lambda p_2 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$ [3]

Přímým výpočtem tohoto determinantu dospějeme k podmínce

(8.11) $$\det U = \lambda^2 . [2a_{12}p_1p_2 - p_2^2 a_{11} - p_1^2 a_{22}] > 0$$

což je zřejmě ekvivalentní s podmínkou

(8.12A) $$p_2^2 a_{11} + p_1^2 a_{22} - 2a_{12}p_1p_2 < 0$$

Zapíšeme-li dále tento výraz jako kvadratickou formu (tentokrát s proměnnými p_1, p_2 a s koeficienty a_{11}, $-a_{12}$ a a_{22}), dostaneme nerovnost

(8.12B) $$(p_2\ p_1) \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} < 0 ,$$

v níž je vyjádřen požadavek na ***negativní definitnost*** této kvadratické formy, neboť **(8.12B)** musí platit pro libovolná kladná p_1, p_2 . Jak je známo z teorie kvadratických forem - viz **[Matematický Dodatek č.1]** - bude matice kvadratické formy v **(8.6B)** ***negativně definitní*** právě tehdy, bude-li platit

(8.13) $a_{11}<0$ a současně také $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$ [4]

neboť jde o dva hlavní minory matice A, z nichž první musí být kladný, druhý záporný. Z druhé podmínky plyne $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ tj. $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$. Poněvadž pořadí komodit lze zaměnit, vyplývá odtud (z analogie k $a_{11}<0$) podmínka $a_{22}<0$. *Kvazikonkávní dvoufaktorová kvadratická funkce* musí tedy mít záporná znaménka u ryze kvadratických členů. Aby tato funkce byla (aspoň někde) nezáporná, musí nutně platit $a_{12}>0$. Přijatelný tvar takové funkce by z tohoto hlediska mohl být např. $u(\mathbf{x}) = [\text{illegible}] . [-[\text{illegible}]^2 + [\text{illegible}]x_2 - [\text{illegible}]^2]$,

---

[3] K nahrazení mezních užitků výrazem $u_i = \lambda p_i$ jsme oprávněni, neboť *kvazikonkávnost* vyhodnocujeme v rovnovážném bodě.

[4] *Negativní definitnost* je ekvivalentní se *střídajícími se hlavními minory matice kvadratické formy*.

nezáporný v oboru $x_2 < \quad < \quad 2$ který však na druhé straně nemá všude kladné mezní užitky: $u_1(x) = \quad + \quad 2$, $u_2(x) = 1 - \quad 2$.

A4. *Poptávkové funkce* odvozené v **(8.5.A)** a **(8.5.B)** ***musí být*** zřejmě dále ***nezáporné***, kterážto vlastnost ovšem nutně neplatí pro libovolnou volbu parametrů a_{11}, a_{12}, a_{22} : Jmenovatel obou výrazů **(8.5.A)** , **(8.5.B)** lze zapsat jako kvadratickou formu tvaru

(8.14) $$(p_2, p_1)\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} , \quad p_1 > \quad p_2 >$$

která v případě, že jsou čitatele ve výrazech **(8.5.A)** , **(8.5.B)** kladné, musí být *pozitivně definitní*, naopak v případě, že tyto čitatele jsou záporné, musí být *negativně definitní*. Pozitivní i negativní definitnost implikují nerovnost $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 >$ neboli $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$, v prvém případě za souběžných podmínek $a_{11} >$, $a_{22} >$, ve druhém za opačných podmínek $a_{11} <$ $a_{22} <$ Vyšetříme tedy všechny možnosti ve vztahu k těmto omezením : Nejprve uvažujme

případ A) $a_{11} >$, $a_{22} >$: Čitatel výrazu **(8.5.A)** je kladný právě tehdy, když platí $a_{22}p_1 - a_{12}p_2 >$, neboli jestliže $a_{22}\frac{p_1}{p_2} > a_{12}$ čili $a_{22}^2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 > a_{12}^2$. (Podmínka má význam toliko v případě, že $a_{12} >$, neboť v opačné situaci platí vždy.)

Čitatel v **(8.5.B)** je kladný právě tehdy, když platí $a_{11}p_2 - a_{12}p_1 >$ neboli jestliže $a_{11}\frac{p_2}{p_1} > a_{12}$ čili $a_{11}^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 > a_{12}^2$.Podmínka má opět význam jen v případě $a_{12} >$,

Trojici předchozích podmínek lze tedy sloučit do jediné

(8.15) $$a_{12} < Min\left[a_{11}\left(\frac{p_2}{p_1}\right); a_{22}\left(\frac{p_1}{p_2}\right); \sqrt{a_{11}a_{22}}\right]$$

případ B) $a_{11} <$, $a_{22} <$: Čitatel v **(8.5A)** je záporný právě tehdy, když platí $a_{22}p_1 - a_{12}p_2 <$ neboli jestliže $a_{22}\frac{p_1}{p_2} < a_{12}$. Zde má podmínka význam pouze v případě, že $a_{12} <$, jinak je splněna automaticky.

Čitatel **(8.5B)** je záporný právě tehdy, když platí $a_{11}p_2 - a_{12}p_1 <$, tj.jestliže $a_{11}\frac{p_2}{p_1} < a_{12}$ neboli $a_{11}^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 < a_{12}^2$. Zde má, naopak, podmínka význam jen v případě, že $a_{12} <$, neboť v opačné situaci platí vždy.

Sloučením všech tří požadovaných omezení dostaneme

(8.16) $$|a_{12}| > Max\left[a_{11}\left(\frac{p_2}{p_1}\right); a_{22}\left(\frac{p_1}{p_2}\right); \sqrt{a_{11}a_{22}}\right] ,$$

tedy pravý opak podmínky **(8.15)**.

A5. Poslední úlohou, kterou se budeme zabývat, bude vyšetření podmínek nutných k tomu, **aby** Marshallovské **poptávkové funkce**, které jsem odvodili v **(8.5 A,B)**, **byly při rostoucí ceně vlastní komodity klesající**. Znamená to vyšetřit znaménka derivací $\frac{\partial}{\partial}$ a podobně $\frac{\partial}{\partial}$. Pro první parciální derivaci po úpravách dostaneme :

(8.17) $$\frac{\partial}{\partial} = \frac{M(a_{11}a_{22}p_2^2 - \ 2p_1 - \ _1 p_2 + \ _1 a_{22} p_1 p_2)}{(p_2 a_{11} + \ a_{22} - \ _1 p_1 p_2)^2}$$

Vzhledem ke kladné hodnotě jmenovatele a kladnému M je zřejmé, že znaménko derivace (a tedy směr vlivu ceny p_1) bude určeno znaménkem výrazu $(a_{11}a_{22}p_2^2 - \ 2p_1 - \ _1 p_2 + \ _1 a_{22} p_1 p_2)$, který lze dále poněkud přehledněji zapsat jako kvadratickou formu v proměnných p_1, p_2

(8.18) $$(p_2, p_1)\begin{pmatrix} a_{11}a_{22} & 2a_{12}^2 \ a_{12}a_{22} \\ a_{12}a_{22} & -a_{22}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Z ***nutných podmínek pro negativní definitnost kvadratické formy*** vyplývají dva požadavky:[5]

Jednak $a_{11}a_{22} - \ _{12}^2 <$ s důsledkem $a_{11}a_{12}/2 < \ _2^2$

a dále $(a_{11}a_{22} - \ _{12}^2)(- \ _2^2) - \ _{12}a_{22})^2 >$,

z čehož po jednoduché úpravě dostaneme podmínku

(8.19) $$a_{12}^2 > \ a_{22}$$

Znamená to tedy, že $\frac{\partial}{\partial} <$ platí právě tehdy, když bude platit **(8.19)**, neboť tato podmínka pokrývá rovněž podmínku $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 <$, pokud mají a_{11} i a_{22} shodná znaménka. Stejnou úvahou bychom – *mutatis mutandis* - obdrželi podmínku pro zápornost $\frac{\partial}{\partial}$.

Na druhé straně však je podmínka **(8.19)** protikladná třetí podmínce **(8.7)** vyžadované pro globální ***nezápornost kvadratické funkce*** a rovněž podmínce vyplývající z druhého vztahu v **(8.7)** nutné pro to, ***aby byla kvadratická funkce kvazikonkávní***. Souhrnně lze tedy konstatovat, že **neexistuje žádná konstelace parametrů** a_{11}, a_{12}, a_{22} **kvadratické funkce, při které by tato funkce vyhovovala všem požadovaným vlastnostem.** V takovém případě říkáme, že ***příslušný nelineární funkční tvar není globálně teoreticky konzistentní .***

---

[5] Třetí podmínka $-a_{22}^2 <$ je zřejmě splněna vždy.

Nepřímá užitková funkce pro kvadratickou funkci

Zabývejme se nyní otázkou, jak vypadá k ***přímé užitkové funkci tvaru***

(8.1) $$u(x)=\frac{1}{2}\left(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\right),\ \text{pro } x_1>0,\ x_2>0\ [6]$$

s *Marshallovskými poptávkami* získanými přímým výpočtem

(8.5A,B) $$Mx_1=\frac{M(a_{22}p_1-a_{12}p_2)}{a_{11}p_2^2+a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2}\qquad Mx_2=\frac{M(a_{11}p_2-a_{12}p_1)}{a_{11}p_2^2+a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2}$$

příslušná **nepřímá užitková funkce.**

Jak známo, výraz pro $\psi(p)$ získáme dosazením **(8.5A,B)** do **(8.1).** Takto máme

(8.21) $$\psi(p_1,p_2)=\frac{1}{2}a_{11}\left(\frac{M(a_{22}p_1-a_{12}p_2)}{a_{11}p_2^2+a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2}\right)^2+a_{12}\left(\frac{M(a_{22}p_1-a_{12}p_2)}{a_{11}p_2^2+a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2}\right)\left(\frac{M(a_{11}p_2-a_{12}p_1)}{a_{11}p_2^2+a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2}\right)+\frac{1}{2}a_{22}\left(\frac{M(a_{11}p_2-a_{12}p_1)}{a_{11}p_2^2+a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2}\right)^2$$ neboli

(8.22) $$\psi(p_1,p_2)=\frac{M^2}{2(a_{11}p_2^2+a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2)^2}\left[a_{11}(a_{22}p_1-a_{12}p_2)^2+2a_{12}(a_{22}p_1-a_{12}p_2)(a_{11}p_2-a_{12}p_1)+a_{22}(a_{11}p_2-a_{12}p_1)^2\right]$$

Algebraickými úpravami výrazu v hranaté závorce postupně obdržíme

$$\left[a_{11}(a_{22}p_1-a_{12}p_2)^2+2a_{12}(a_{22}p_1-a_{12}p_2)(a_{11}p_2-a_{12}p_1)+a_{22}(a_{11}p_2-a_{12}p_1)^2\right]=$$
$$a_{11}(a_{22}^2p_1^2+a_{12}^2p_2^2-2a_{12}a_{22}p_1p_2)+a_{22}(a_{11}^2p_2^2+a_{12}^2p_1^2-2a_{11}a_{12}p_1p_2)+$$
$$2a_{12}(a_{11}a_{22}p_1p_2+a_{12}^2p_1p_2-a_{12}a_{22}p_1^2-a_{11}a_{12}p_2^2)$$

Po roznásobení výrazů v závorkách a eliminaci shodných členů dostaneme

$$a_{11}a_{22}^2p_1^2-2a_{11}a_{12}a_{22}p_1p_2+2a_{12}^3p_1p_2-a_{12}^2a_{22}p_1^2-a_{11}a_{12}^2p_2^2+a_{11}^2a_{22}p_2^2$$

Po seřazení členů a vytknutí máme

$$a_{11}a_{22}(a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2+a_{11}p_2^2)-a_{12}^2(a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2+a_{11}p_2^2)\ \text{tj.}$$
$$(a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2+a_{11}p_2^2)\cdot(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$$

Dosazením do **(8.21)** konečně **máme**

(8.23) $$\psi(p_1,p_2)=\frac{M^2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}{2(a_{11}p_2^2+a_{22}p_1^2-2a_{12}p_1p_2)}.$$

[6] V případě připuštění nulových hodnot proměnných by již funkce nebyla dvoukomoditní.

Na první pohled je patrné, že ***nepřímá užitková funkce*** je ***kvadratická v příjmu, klesající s cenou každé z obou komodit*** a ***homogenní stupně nula v*** obou ***cenách a příjmu spotřebitele simultánně. Nezápornost*** **vyžaduje vyšetření vztahů mezi jejími koeficienty obdobně jako tomu bylo u přímé kvadratické užitkové funkce. Spojitost je podmíněna platností nerovnosti** $a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 - 2a_{12} p_1 p_2 \neq 0$ **, v těch bodech cenového prostoru, kde platí** $a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 = 2a_{12} p_1 p_2$ **spojitá není. Jde body, kde**

$$a_1 p_2^2 - 2\sqrt{a_1 a_2}\, p_1 p_2 + a_2 p_1^2 = 2a_{12} p_1 p_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}\, p_1 p_2$$

$$\left(\sqrt{a_1}\, p_2 - \sqrt{a_2}\, p_1\right)^2 = 2 p_1 p_2 \left(a_{12} - \sqrt{a_1 a_2}\right).$$

Pokud platí $a_{12} - \sqrt{a_1 a_2} < 0$ **tj.** $a_{12} < \sqrt{a_1 a_2}$, žádný takový **případ nastat nemůže a funkce je cenách spojitá všude.**

Výdajovou funkci **dostaneme již snadno z (8.23) dosazeními** $M = E(^0u, p)$ a $^0u = V(M, p)$**. Odtud**

$$^0u = \frac{E(^0u,p)^2 \left(a_1 a_2 - a_{12}^2\right)}{a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 - 2a_{12} p_1 p_2} \quad \text{a tedy}$$

(8.24) $$E(^0u,p) = \sqrt{\frac{^0u \left(a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 - 2a_{12} p_1 p_2\right)}{a_1 a_2 - a_{12}^2}}. \qquad \square .$$

Je okamžitě patrné, že *výdajová funkce* je *odmocninná v příjmu, rostoucí s cenou každé z komodit* a *lineárně homogenní v cenách. Přípustnost definice* *(kladnost výrazu v odmocnině)* **vyžaduje vyšetření vztahů mezi jejími koeficienty** obdobně jako tomu bylo u přímé kvadratické užitkové funkce. ***Spojitost*** je podmíněna platností nerovnosti $a_1 a_2 - a_{12}^2 \neq 0$, **vylučujeme** tedy **koeficienty, pro něž platí** $\sqrt{a_1 a_2} = a_{12}$.

Jednou z možností získání *Hicksovských poptávek je dosazení výdajové funkce* (8.24) do *poptávkových funkcí Marshallovských* (8.5A,B)

$$M x_1 = \frac{\sqrt{\dfrac{^0u \left(a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 - 2a_{12} p_1 p_2\right)}{a_1 a_2 - a_{12}^2}}\left(a_2 p_1 - a_{12} p_2\right)}{a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 - 2a_{12} p_1 p_2}$$

(8.25) $$M x_1 = \sqrt{\frac{^0u \left(a_2 p_1 - a_{12} p_2\right)^2}{\left(a_1 a_2 - a_{12}^2\right)\cdot\left(a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 - 2a_{12} p_1 p_2\right)}}$$

K témuž výrazu dospějeme **aplikací *Shephardova lemmatu* na *výdajovou funkci* (8.24).**

$$H x_1 = \frac{\partial E(^0u,p)}{\partial p_1} = \sqrt{\frac{^0u}{a_1 a_2 - a_{12}^2}} \cdot \frac{1}{2}\left(a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 - 2a_{12} p_1 p_2\right)^{-1/2} \cdot \left(2a_2 p_1 - 2a_{12} p_2\right)$$

Po drobné úpravě $$H x_1 = \frac{\partial E(^0u,p)}{\partial p_1} = \sqrt{\frac{^0u \left(a_2 p_1 - a_{12} p_2\right)^2}{\left(a_1 a_2 - a_{12}^2\right)\cdot\left(a_1 p_2^2 + a_2 p_1^2 - 2a_{12} p_1 p_2\right)}}.$$

8.2 Mocninná (Cobb-Douglasova) užitková funkce (n-komoditní)

Mocninná funkce - s nezbytnými omezeními na parametry - představuje další užitečný funkční tvar - použitelný přímo jako (prostá) užitková funkce. Přestože historicky jde o funkci (tzv. **Cobbovu-Douglasovu**), která nalezla v mikroekonomii využití nejprve při modelování chování výrobce (odtud též její druhý název spojený s oběma jmény autorů), má příznivé vlastnosti i z pohledu užitkové funkce. Zde **uvedeme jen její** stručnou **prezentaci a odvození jí odpovídající soustavy poptávkových funkcí**. Dalšími jejími charakteristikami se budeme zabývat v textu věnovaném teorii produkce.

Cobb-Douglasova užitková funkce $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má mocninný tvar

(8.21) $$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \nu \cdot x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n},$$

kde ν **je kladná konstanta a** $\beta_i, i = 1, \ldots, n$ **jsou mocninné parametry**, zpravidla hodnotami omezené na interval $(0, 1)$ - vyjadřující pro každou komoditu tendenci, s jakou užitek vzrůstá při zvyšování množství této komodity. Z funkčního tvaru je patrné, že **rostoucí užitek přináší** jakkoliv **malý přírůstek množství komodity**. Z multiplikativního tvaru **(8.21)** je rovněž zřejmé, že přítomné statky působí na celkový užitek spotřebitele ve vzájemných interakcích.

Jak je patrné, tato **funkce splňuje všechny vlastnosti, kterou jsme pro užitkovou funkci přijali** definicí 2.8. Jde o **konečnou nezápornou funkci, pro niž platí** $u(0) = 0$, **spojitou v celém definičním oboru, která je** - při daných omezeních na parametry - dále **rostoucí a kvazikonkávní**. Jak lze ihned vidět, **mezní míra substituce mezi dvěma komoditami je dána podílem** $\frac{\beta_i x_j}{\beta_j x_i}$, tzn. **není v celém komoditním prostoru konstantní**. Okamžitě je patrné, že **všechny statky jsou** při takto zvolené mocninné specifikaci **podstatné** (*essential*) .

Nyní **pro Cobb-Douglasovu** (přímou) **užitkovou funkci odvodíme** příslušný **systém poptávkových funkcí.** Obvyklý způsob odvození předpokládá nalezení rovnovážného bodu tak, že se položí všechny mezní užitky u_i rovny λp_i, kde p_i je *cena i-té komodity* a λ *Lagrangeův multiplikátor*. Po tomto úkonu **dostaneme soustavu vztahů**

(8.22) $$u_i = \beta_i \cdot \frac{u(x)}{x_i} = \lambda p_i \qquad \text{pro } i = 1, \ldots, n.$$

kde $u(x)$ má tvar **(8.21)**. **Rozpočtové omezení má** obvyklý tvar $\sum_i p_i x_i = I$.

Postup vedoucí k **vyvození tvarů pro systém poptávkových funkcí** vede přes vydělení jednotlivých rovnic v soustavě **(8.22)** (a zbavení se tak multiplikátoru λ a funkčního tvaru $u(x)$). Dostaneme

(8.23) $$\frac{\beta_i x_j}{\beta_j x_i} = \frac{p_i}{p_j} \qquad \text{pro } i, j = 1, \ldots, n$$

a po převedení členů na protilehlé strany rovnic $p_i x_i = p_j x_j \cdot \left(\frac{\beta_i}{\beta_j}\right)$

Nyní **sečteme** (pro pevné i) **tyto vztahy pro všechna** $j = 1, 2, \dots, n$ **včetně** $i =$ **a dostaneme**

(8.24)
$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j}{\beta_i} p_i x_i = M$$

a **poptávku po** i**-té komoditě můžeme vyjádřit poptávkovou funkcí ve tvaru**

(8.25)
$$x_i = \frac{\beta_i \sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{p_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j} = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j}\left(\frac{M}{p_i}\right)$$

Pokud přijmeme restrikci $\sum \beta_j = 1$, vztah **(8.25)** se dále zjednoduší na

(8.26)
$$x_i = \beta_i \left(\frac{M}{p_i}\right)$$

Odvodili jsme tedy soustavu poptávkových funkcí, které mají tu vlastnost, že poptávka je lineární funkcí příjmu spotřebitele M, přičemž konstanta příslušné úměrnosti je rovna $\frac{\beta_i}{p_i}$.

Cobb–Douglasova funkce je zřejmě **konečná, nezáporná a spojitá funkce s vlastností** $u(0) = 0$. **Je v daném parametrickém oboru rostoucí, což je okamžitě patrné z kladných hodnot mezních užitků** **(8.22)**. Vyšetříme ještě, zda je u této funkce rovněž splněna ***podmínka negativní semidefinitnosti Sluckého substituční matice*** definované v **části 2.6** resp. ***kvazikonkávnosti***.

K tomuto účelu sestavíme nejprve matici U sestávající z prvních a druhých parciálních derivací užitkové funkce. Mezní užitky jsme již uvedli v **(8.22)**, po dosazení za $u(x)$ dostaneme

(8.27A)
$$u_i = \gamma\left(\frac{\beta_i}{x_i}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j}\right)$$

Stejně snadno **sestavíme matici druhých parciálních derivací**

(8.27B)
$$u_{ii} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \beta_i(\beta_i - 1)\frac{u(x)}{x_i^2} \qquad u_{ij} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \beta_i \beta_j \frac{u(x)}{x_i x_j}$$

Tyto hodnoty nyní dosadíme do matice U a spočteme její determinant $|U|$. Postupně dostáváme: (Protože každý prvek obsahuje $u(x)$, vytýkáme tento společný člen před determinant.)

$$\left|U^{CD}\right| = x_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & \beta x_1 & \beta x_2 & \beta x_3 & \cdots & \beta x_n \\ \beta x_1 & \beta(1-x_1^2) & -\beta x_1x_2 & -\beta x_1x_3 & \cdots & -\beta x_1x_n \\ \beta x_2 & -\beta x_1x_2 & \beta(1-x_2^2) & -\beta x_2x_3 & \cdots & -\beta x_2x_n \\ \beta x_3 & -\beta x_1x_3 & -\beta x_2x_3 & \beta(1-x_3^2) & \cdots & -\beta x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta x_n & -\beta x_1x_n & -\beta x_2x_n & -\beta x_3x_n & \cdots & \beta(1-x_n^2) \end{vmatrix}$$

V dalším označíme výrazem $\left|U^{*CD}\right|$ podíl $\dfrac{\left|U^{CD}\right|}{u_{x(n+1)}}$. Abychom ho $\left|U^{*CD}\right|$ spočetli, rozložíme ho na součet (nejprve) dvou determinantů podle druhého sloupce. Dostaneme :

$$\left|U^{*CD}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta x_2 & \cdots & \beta x_n \\ \beta x_1 & -\beta x_1^2 & -\beta x_1x_2 & \cdots & -\beta x_1x_n \\ \beta x_2 & -\beta x_1x_2 & \beta(1-x_2^2) & \cdots & -\beta x_2x_n \\ \beta x_3 & -\beta x_1x_3 & -\beta x_2x_3 & \cdots & -\beta x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta x_n & -\beta x_1x_n & -\beta x_2x_n & \cdots & \beta(1-x_n^2) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \beta x_1 & \beta x_2 & \cdots & \beta x_n \\ \beta x_1 & -\beta x_1^2 & -\beta x_1x_2 & \cdots & -\beta x_1x_n \\ \beta x_2 & 0 & \beta(1-x_2^2) & \cdots & -\beta x_2x_n \\ \beta x_3 & 0 & -\beta x_2x_3 & \cdots & -\beta x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta x_n & 0 & -\beta x_2x_n & \cdots & \beta(1-x_n^2) \end{vmatrix}$$

Jak je vidět, první z obou determinantů součtu má druhý sloupec, který je násobkem prvního sloupce. Uvedené dva sloupce jsou tedy lineárně závislé a tento první determinant je nulový. Druhý z determinantů součtu podrobíme stejnému rozkladu na dva dílčí determinanty podle třetího sloupce a dostaneme

$$\left|U^{**CD}\right| = \begin{vmatrix} 0 & \beta x_1 & 0 & \cdots & \beta x_n \\ \beta x_1 & -\beta x_1^2 & -\beta x_1x_2 & \cdots & -\beta x_1x_n \\ \beta x_2 & 0 & -\beta x_2^2 & \cdots & -\beta x_2x_n \\ \beta x_3 & 0 & -\beta x_2x_3 & \cdots & -\beta x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta x_n & 0 & -\beta x_2x_n & \cdots & \beta(1-x_n^2) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \beta x_1 & \beta x_2 & \cdots & \beta x_n \\ \beta x_1 & -\beta x_1^2 & 0 & \cdots & -\beta x_1x_n \\ \beta x_2 & 0 & -\beta x_2^2 & \cdots & -\beta x_2x_n \\ \beta x_3 & 0 & 0 & \cdots & -\beta x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta x_n & 0 & 0 & \cdots & \beta(1-x_n^2) \end{vmatrix}$$

Opět vidíme, že u prvního z obou determinantů součtu je třetí sloupec β_{x_2}-násobkem prvního sloupce, v důsledku čehož **první je determinant nulový**. **Druhý determinant lze aditivně rozložit podle třetího sloupce na dva dílčí determinanty**. Výsledkem procesu, při kterém je vždy první z dvojice součtu determinantů anulován, je **jediný determinant**

$$|U^{CD}| = x^{n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{x_1} & \frac{\beta_2}{x_2} & \frac{\beta_3}{x_3} & \cdots & \frac{\beta_n}{x_n} \\ \frac{\beta_1}{x_1} & -\frac{\beta_1}{x_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{x_2} & 0 & -\frac{\beta_2}{x_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_3}{x_3} & 0 & 0 & -\frac{\beta_3}{x_3^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_n}{x_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\beta_n}{x_n^2} \end{vmatrix}$$

Hodnoturesp.**znaménko determinantu** $|U^{ADI}|$ **nyní určíme tak, že užijeme výraz pro determinant symetrické matice, která má nenulové prvky pouze v 1. řádku a 1. sloupci a na hlavní diagonále**, u níž navíc prvek v průsečíku všech tří uvedených nenulových řad je roven nule. Obecně můžeme zapsat

$$|U^{CD}| = x^{(n+1)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \\ w_1 & w_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ w_2 & 0 & w_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ w_3 & 0 & 0 & w_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{nn} \end{vmatrix}$$

Rozvojem podle hlavní diagonály a Indukcí lze ukázat, že determinant $|U^{CD}|$ nabývá velikost

(8.28) $$|U^{CD}| = \sum_{i=1}^{n} w_i^{2} \left(n - 1\right) \prod_{i=1}^{n} w_{ii},$$

což pro ***případ Cobb-Douglasovy funkce*** a výrazů substituovaných za w_i a w_{ii} dává

(8.29) $$|U^{CD}| = (n-1)!\,u\,x^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{x_i}\right)^2 \cdot \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{\left(-\frac{\beta_j}{x_j^2}\right)}{\left(-\frac{\beta_i}{x_i^2}\right)}\right]$$

tzn. po úpravě vykrácením

(8.30A) $$|U^{CD}| = (n-1)!\,u\,x^{n+1} \sum_{i=1}^{n} -\beta_i \left[\prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{\beta_j}{x_j^2}\right)\right]$$

Protože $w_i > 0$, dále $w_{ii} < 0$, budou členy v sumaci záviset na znaménku $\prod$.

S ohledem na zápornost všech w_{ii} bude výraz $\left(\prod x_j^{\beta_j}\right)$ jako součin n záporných hodnot kladný pro sudé n a záporný pro liché n. Následně **bude každý z n členů sumace $(-\beta_i)\left(\prod x_j^{\beta_j}\right)$ kladný pro liché n a záporný pro sudé n a konečně celý výraz $|U^{CD}|$ kladný pro sudé n a záporný pro liché n.** Dochází tedy ke střídání znamének tohoto determinantu při postupném růstu počtu komodit. Tímto je ověřeno, že **Cobb-Douglasova** funkce použitá jako **přímá užitková funkce je kvazikonkávní.**

8.3 Stone-Gearyho (n-komoditní) užitková funkce - lineární výdajový systém

Tento výdajový systém se odvodí z užitkové funkce $u(x_1,x_2,\dots,x_n)$, která má tvar

(8.31) $$u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_i)^{\beta_i}$$

kde α je vektor n nezáporných parametrů (konstant) charakterizujících „prahové úrovně“ užitečnosti každé komodity; β je obdobně vektor kladných parametrů charakterizujících míru (degresivní) tendence individuální užitečnosti i-té komodity při zvyšování jejího množství. Pro užitek přinášející množství i-té komodity je zapotřebí, aby platilo $x_i > \alpha_i$ pro všechna $i = 1,2,\dots,n$. Uvedený výdajový systém byl poprvé použit Kleinem a Rubinem [1947-48].

Má-li být $u(x)$ rostoucí v každé proměnné, musí platit

(8.32) $$u_i(x) = \prod_{j \neq i}^{n} (x_j - \alpha_j)^{\beta_j} \cdot \beta_i (x_i - \alpha_i)^{\beta_i - 1} = \frac{\beta_i}{x_i - \alpha_i} \cdot u(x) ,$$

z čehož mj. plyne $\beta_i > 0$ pro všechna i. Dále platí:

$$u_{ij}(x) = \frac{\beta_i \beta_j}{(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)} \cdot u(x) \text{ pro } i \neq j \quad \text{resp. } u_{ii}(x) = \frac{\beta_i(\beta_i - 1)}{(x_i - \alpha_i)^2} \, u(x)$$

Je zřejmé, že má-li být $u(x)$ konkávní v jednotlivých komoditách, musí platit $\beta_i < 1$.

Abychom mohli odvodit rovnovážný bod, musíme položit všechny mezní užitky u_i rovny λp_i, kde p_i je cena i-té komodity a λ Lagrangeův multiplikátor, tedy

(8.33) $$\beta_i \cdot \frac{u(x)}{x_i - \alpha_i} = \lambda p_i \qquad \text{pro } i = 1,2,\dots,n$$

Dostaneme soustavu vztahů:

(8.34) $$\begin{aligned} \beta_1 \cdot \frac{u(x)}{x_1 - \alpha_1} &= \lambda p_1 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n \cdot \frac{u(x)}{x_n - \alpha_n} &= \lambda p_n \end{aligned}$$

kde $u(x)$ má tvar (8.28), spolu s rozpočtovým omezením $\sum p_i x_i = I$.
Vzájemným vydělením rovnic v soustavě (8.31) dostaneme vztahy

(8.35) $$\frac{(x_i - \alpha_i)\, p_i}{\beta_i} = \frac{(x_j - \alpha_j)\, p_j}{\beta_j} ,$$

Sečteme-li (při pevné i) tyto vztahy pro všechna $j = 1,\ldots,n$ (včetně $i = j$), dostaneme

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\right)\frac{x_i-\alpha_i}{\beta_i}\cdot p_i = \sum_{j=1}^{n}(x_j-\alpha_j)p_j = xp-\alpha p = M-\alpha p$$

tedy poptávku po i-té komoditě můžeme vyjádřit poptávkovou funkcí ve tvaru

(8.36) $$x_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\beta_j}\cdot\frac{\beta_i}{p_i}\left(M-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j p_j\right)+\alpha_i .$$

V případě, že jednotlivá $\beta_j, j = 1,\ldots,n$ dávají jedničkový součet[7], vztah **(8.36)** se dále zjednoduší na

(8.37A) $$x_i = \frac{\beta_i}{p_i}\left(M-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j p_j\right)+\alpha_i .$$

Jak je patrné, ***poptávka je lineární funkcí příjmu spotřebitele*** M, přičemž konstanta příslušné úměrnosti je rovna $\frac{\beta_i}{p_i}$ (popř. $\frac{\beta_i}{p_i \sum \beta_j}$)

Poznámka: Výraz pro poptávku po x_i je zaručeně kladný, protože při přijatých omezeních $0 < \alpha_i < x_i$ je obsah závorky v (8.33), resp. (8.34A) vždy kladný.

Dále vyšetříme podmínky nutné k tomu, aby poptávka po x_i byla klesající, jestliže cena této komodity p_i poroste. Derivujme **(8.37A)** podle p_i. Dostaneme:

(8.38) $$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \beta_i\frac{p_i(-\alpha_i)-\left(M-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j p_j\right)}{p_i^2} = \frac{\beta_i}{p_i^2}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\alpha_k p_k - M\right) .$$

Poptávka po i-tém statku je s růstem ceny p_i klesající, protože hodnota derivace v **(8.38)** je nutně záporná: při kladných α_j, p_j a předpokladu $0 < \alpha_i < x_i$ platí vždy nerovnost.

$$M > \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\alpha_k p_k$$

Příklad 2 Mějme 4-komoditní poptávkový systém popsaný užitkovou funkcí

(8.39) $$u(x) = (x_1-\alpha_1)^{\beta_1}\cdot(x_2-\alpha_2)^{\beta_2}\cdot(x_3-\alpha_3)^{\beta_3}\cdot(x_4-\alpha_4)^{\beta_4}$$

Příslušné mezní užitky jsou

---

[7] Tento předpoklad je docela realistický pro případ, že užitková funkce (mocninného tvaru) obsahuje všechny v úvahu přicházející statky poskytující pro danou situaci spotřebiteli užitek. Jak víme z rozboru Cobb-Douglasova tvaru (podrobně analyzovaného v teorii produkce), může být v tomto případě užitek (vyjádřený lineárně homogenní užitkovou funkcí) rozložit na součet n výdajových účastí beze zbytku.

$$u_1 = \frac{u}{x_1}; \quad u_2 = \frac{u}{x_2}; \quad u_3 = \frac{u}{x_3}; \quad u_4 = \frac{u}{x_4}$$

Vyčíslíme podíly

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \right) = \sum_{i=1}^{4} \cdot K$$

z čehož plyne

$$x_1 = p \cdot \sum K = p \cdot \sum K$$

a po zderivování

Analogické výrazy bychom získal i pro

$$\frac{\partial}{\partial} = \sum \frac{1}{x_i} = \frac{\sum_{}^{4} p_j}{\sum x_i^2} \qquad \frac{\partial}{\partial} \quad \text{pro } j = 3, 4$$

Jak je z výsledného výrazu patrné, poptávka po 1. komoditě je nepřímo úměrná čtverci ceny této komodity.

Vyšetření vlastností funkce typu (8.26) vede ke stejným závěrům jako u Cobb-Douglasovy funkce, neboť (až na omezení přípustných hodnot komoditního prostoru podmínkami $x_i >$) oba tyto funkční tvary jsou zcela analogické .

8. 4 Výdajový (n-komoditní) systém „přímý/nepřímý ADDILOG" (Houthakker H.)

Počátkem 60.let vyšetřoval **Hendrik Houthakker [1960]** nepřímou užitkovou funkci ve tvaru součtu mocnin, která je nazývána též "***nepřímý ADDILOG***" . Tuto funkci můžeme zapsat ve tvaru

(8.41) $$u = \psi\left(\frac{M}{p_1}, \frac{M}{p_2}, \ldots, \frac{M}{p_n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\beta_j} \cdot \left(\frac{M}{p_j}\right)^{\beta_j}$$ [8] při $\alpha, \beta > 0$, $j = 1, \ldots, n$

Soustavu poptávkových funkcí po jednotlivých komoditách odvodíme vcelku snadno na základě logaritmického tvaru ***Royovy identity.*** Postupně dostáváme

(8.42) $$x_i = \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_j}\right)} = \frac{\alpha_i \cdot \left(\frac{M}{p_i}\right)^{\beta_i + 1}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{M}{p_j}\right)^{\beta_j + 1}}$$

odkud vyplývá výraz pro podíl poptávek po i-té a j-té komoditě jako

(8.43A) $$\frac{x_i}{x_j} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right) \frac{\left(\frac{M}{p_i}\right)^{\beta_i + 1}}{\left(\frac{M}{p_j}\right)^{\beta_j + 1}} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right) M^{\beta_i - \beta_j} \cdot p_j^{\beta_j + 1} \cdot p_i^{-\beta_i - 1}$$

Ten můžeme alternativně zapsat v logaritmovaném tvaru

(8.43A) $$\log x_i - \log x_j = \log\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right) + (\beta_i + 1) \log\left(\frac{M}{p_i}\right) - (\beta_j + 1) \log\left(\frac{M}{p_j}\right)$$

Jak je patrné z (8.38), k tomu, aby poptávkové funkce klesaly s rostoucí cenou vlastní komodity p_i, je právě nutné, aby platily podmínky $\alpha_i > 0$, $\beta_i > -1$. Vůči příjmu M jsou tyto poptávkové funkce (při daných omezeních na parametry) rostoucí.

Jestliže použijeme odlišné definice ***nepřímého ADDILOGu*** (pro jednotkový objem výdajů, tj. $M = 1$, a ceny vyjádříme v přímém tvaru), dostaneme jednodušší specifikaci

(8.44) $$u = \psi(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\beta_j} p_j^{\beta_j}$$ opět při $\alpha_j > 0$, $0 < \beta_j$

Parametry α, β budou mít zde však odlišný význam, než u modelu (8.xx) .

---

[8] Podílový tvar pro parametry $\frac{\alpha}{\beta}$ je použit toliko za účelem zjednodušení následných výrazů, ve kterých vystupují mezní užitky jako parciální derivace užitkové funkce .

Royova identita pak generuje soustavu poptávkových funkcí příslušných této verzi ***nepřímého ADDILOG***u

(8.45) $$x_i = \frac{\alpha \; \frac{1}{1}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha}$$

a obdobnou cestou jako předtím lze získat rovnice pro rozpočtové účasti jako

(8.46) $$\frac{p_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j} = p_i x_i = \frac{\alpha}{\sum_{i=1}^{n} \alpha}$$

neboť z (8.42) plyne, že $M = \sum p_j x_j = 1$. Pokud bychom chtěli - např. pro ekonometrické účely - využít z (8.xx) vyvozený podílový tvar $\frac{x_i}{x_j}$, nebude jeho přímé použití výhodné, neboť jde o výraz nelineární v parametrech. Problém nicméně lze zmírnit vzetím logaritmovaného podílu $\log\left(\frac{x_i}{x_j}\right)$, pro který lze snadno odvodit

(8.47) $$\log\left(\frac{x_i}{x_j}\right) = \log\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right) \ldots \log p_i + \ldots \log p_j$$

což je již tvar lineární v parametrech.

Pokud bychom uvažovali funkční typ ***přímý ADDILOG*** jako přímou užitkovou funkci, vyšli bychom z tvaru

(8.48) $$u(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\beta_j} x_j^{\beta_j}$$

S ohledem na vlastnosti požadované od užitkové funkce omezujeme hodnoty parametrů opět na α, $0 < \beta$ pro všechna $j = 1, \ldots n$.

Odvození příslušných poptávkových funkcí bude však nyní podstatně obtížnějším úkolem než v předešlém případě :

Mezní užitky u tohoto tvaru sice snadno získáme jako

(8.49) $$u_i = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \alpha$$

Podmínky vymezující rovnováhu vypadají takto

(8.50 $$\frac{u_i}{p_i} = \frac{\alpha}{\mu} = \frac{\alpha}{\mu} = \ldots \quad \text{pro} \quad i, j = 1, \ldots n$$

Jejich řešení pro x_i, popř. pro podíly $\frac{x_i}{x_j}$ je však bez dalších silných restrikcí položených na parametry (např. typu $\beta_1 : \beta_2 = \dots = \beta_n$ konst.) analyticky neodvoditelné a poptávkové funkce nelze tedy obecně získat v explicitním tvaru. Úpravou obou stran (8.46) sice dostaneme

(8.47) $$\frac{x_i^{\beta_i - 1}}{x_j^{\beta_j - 1}} = \dots \qquad \text{pro } i, j = 1, \dots n$$

ovšem individuální ani podílové vyjádření pro x_i resp. x_i odtud není možné.

Aby nedošlo k nedorozumění, zdůrazněme, že ***přímý ADDILOG*** jako (prostá) užitková funkce reprezentuje jinou strukturu preferenčních relací než tentýž funkční tvar vzatý jako nepřímá užitková funkce.

Přes zmíněný vážný problém s ***přímý ADDILOG***em jako s (prostou) užitkovou funkcí vyšetřeme ještě, do jaké míry by (prostá) užitková funkce tohoto typu splňovala teoretické vlastnosti kladené na tuto ekonomickou funkci.

Funkce ***přímý ADDILOG*** je zřejmě reálná, konečná, nezáporná a spojitá s vlastností $u(0) = \dots$. Funkce je v daném parametrickém oboru rovněž rostoucí, což je okamžitě patrné z hodnot mezních užitků. Kvazikonkávnost (a současně vlastnosti Sluckého substituční matice) ověříme následovně.
Nejprve určíme matici druhých parciálních derivací. Dostaneme

(8.48) $$u_{ii} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \alpha_i \dots x_i^{\beta_i \dots}, \qquad u_{ij} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \dots$$

Tyto hodnoty nyní dosadíme do matice U a spočteme její determinant. Postupně dostáváme :

$$|U^{ADD}| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \dots & \alpha \dots & \alpha \dots & \cdots & \alpha \dots \\ \alpha \dots & \alpha \dots x^{\beta \dots} & \dots & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha \dots & \dots & \alpha \dots x^{\beta \dots} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha \dots & 0 & \dots & \alpha \dots x^{\beta \dots} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \dots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \dots x^{\beta \dots} \end{vmatrix}$$

Hodnotu, resp. znaménko determinantu $|U^{ADD}|$ je třeba nyní určit. Použijeme k tomu výraz pro determinant symetrické matice, která má nenulové prvky pouze v 1. řádku a 1. sloupci a na hlavní diagonále, přičemž prvek v průsečíku všech tří zmíněných nenulových řad je roven nule. Obecně můžeme zapsat

$$
|U^*| = \begin{vmatrix}
0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\
u_1 & u_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
u_2 & 0 & u_{22} & 0 & \cdots & 0 \\
u_3 & 0 & 0 & u_{33} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
u_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn}
\end{vmatrix}
$$

Rozvojem podle hlavní diagonály a Indukcí lze ukázat, že tento determinant nabývá hodnotu

(8.49) $$|U^*| = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \left(-1\right) \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} u_{jj}}{u_{ii}} \right) ,$$

resp. při vyjádření výrazů substituovaných za u_i a u_{ii} pro případ mocninné funkce

(8.50) $$|U^{ADD}| = \left(n-1\right)! \sum_{i=1}^{n} \alpha \ldots \beta^{2} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha \ldots \left(\beta - 1\right) x^{\beta - 2} \right)$$

Vzhledem ke skutečnosti, že $u_i >$, dále $u_{ii} <$, budou členy v sumaci záviset na znaménku $\prod$ S ohledem na zápornost všech u_{ii} bude výraz $\prod$ jako součin n záporných hodnot kladný pro sudé n a záporný pro liché n . Ze stejného důvodu bude podíl $\frac{\prod}{u_{jj}}$ kladný pro liché n a záporný pro sudé n . Odtud vyplývá, že – při kladných hodnotách u_i^2 a $n-$ - bude determinant $|U^{*ADD}|$ záporný pro sudé n a kladný pro liché n, dochází tedy ke střídání jeho znamének při přidávání dalších komodit. Tímto je ověřeno, že pro tento funkční tvar jsou splněny Hicksovy podmínky stability – viz část 2.4 – a rovněž, že funkce typu ***přímý ADDILOG*** vzatá jako přímá užitková funkce je kvazikonkávní.

8.5 Výdajový (n-komoditní) systém typu TRANSLOG
[Christensen L., Jorgenso D.W, Lau L.]

Od počátku 70.let se v matematické ekonomii i ekonometrii setkáváme s tzv. flexibilními funkčními tvary, jejichž nápadným rysem je přítomnost interakčních členů jako vysvětlujících proměnných, s čímž souvisí též poměrně značný počet parametrů jakéhokoliv flexibilního tvaru. Jedním a možná nejtypičtějším představitelem flexibilních tvarů je právě tzv. transcendentní logaritmická funkce (zkráceně TRANSLOG). Lze se s ní setkat jak v prostředí modelování spotřebitelské poptávky, tak i v produkčních schématech. O jejím motivačním vyvození a teoretických vlastnostech pojednáme v oddílu věnovaném této otázce v teorii produkce. Zde se omezíme pouze na zavedení funkčního typu v kontextu modelování spotřebitelské poptávky a na přiblížení jejich vlastností v tomto ohledu.

TRANSLOG, který je charakterizován interakcemi v podobě součinů logaritmovaných komodit, může být chápán též jako zobecnění Cobb-Douglasova tvaru. Nejčastěji bývá specifikován v podobě nepřímé užitkové funkce, jejíž tvar je následující :

(8.51) $$u^0 = \psi(p_1, p_2, \ldots, p_n, M) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log\left(\frac{p_i}{M}\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \log\left(\frac{p_j}{M}\right) \log\left(\frac{p_k}{M}\right)$$

s těmito omezujícími podmínkami na parametry :

Požadavek na homogenitu stupně 0 implikuje podmínku :

Jestliže TRANSLOG užijeme v jednodušším tvaru (jako jednotkovou výdajovou funkci), dostaneme poněkud jednodušší vyjádření

(8.52) $$u^0 = \psi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log(p_i) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \log(p_j) \cdot \log(p_k)$$

se stejnými podmínkami pro parametry. Uplatněním Royovy identity obdržíme pro TRANSLOG nepřímou užitkovou funkci soustavu poptávkových funkcí (v zápisu pro rozpočtové účasti)

(8.53) $$u^0 = \psi(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log(p_i) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \log(p_j) \cdot \log(p_k)$$

(8.54) $$w_i = \frac{p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} = p_i x_i = \frac{\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \log(p_j)}{\sum_{j=1}^{n}\left(\beta_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \log(p_k)\right)}$$

8.6 Rotterdamský (n-komoditní) výdajový systém (*H.Theil – A.Barten*)

Toto modelové schéma poprvé použili v krátkém rozmezí po sobě H.Theil [1965] a A.P.Barten [1966]. Přístup, který zvolili, je v mnoha směrech podobný Stoneově specifikaci (8.28), liší se však tím, že místo zacházení s logaritmy (jak to učinil R. Stone) operují s diferenciály.

Logaritmická poptávková funkce (zapsaná jako logaritmovaná mocninná funkce) má tvar

(8.55) $$\log x_i = \beta_i + e_i \log M + \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \log p_k$$

odpovídající mocninné specifikaci

(8.56) $$x_i = b_i M^{e_i} \prod_{k=1}^{n} p_k^{e_{ik}}$$

kde e_i je příjmová pružnost poptávky ($e_i = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i}$) a e_{ik} jsou křížové cenové pružnosti poptávky ($e_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \cdot \frac{p_k}{x_i}$) pro $i,k = 1,\ldots,n$. Jako β_i jsme označili $\log b_i$.

Jestliže tuto specifikaci vyjádříme v totálních diferenciálech, získáme tvar

(8.57) $$d\log x_i = e_i \, d\log M + \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \, d\log p_k$$

V tomto případě netrváme na předpokladu, že elasticity e_i a e_{ik} jsou konstantní. Podobně jako v původní Stoneově analýze se uplatní pro vyjádření e_{ik} Sluckého dekompozice s kompenzovanými křížovými cenovými elasticitami e^*_{ik} (v zápisu $e_{ik} = e^*_{ik} - e_i w_k$), takže (8.57) přejde na tvar

(8.58) $$d\log x_i = e_i \left(d\log M - \sum_{k=1}^{n} w_k \, d\log p_k \right) + \sum_{k=1}^{n} e^*_{ik} \, d\log p_k \; ,$$

kde w_k označuje komoditní rozpočtové účasti $w_k = p_k x_k / M$.

Zápis (8.48) tak odpovídá diferenciálu Stoneovy rovnice tvaru

(8.59) $$\log x_i = \beta_i + e_i \log \frac{M}{P} + \sum_{k=1}^{n} e^*_{ik} \log p_k$$

kde P vyjadřuje nějaký obecný cenový index.
Avšak v (8.49) nelze uplatnit symetrii, protože díky relaci

(8.60) $$w_i e^*_{ik} = w_k e^*_{ki}$$

restrikce také obsahují proměnné rozpočtové účasti.

Tento problém lze obejít násobením (8.35) rozpočtovými účastmi w_i, takže nakonec dostaneme

$$w_i d\log q_i = b_i \left(d\log \bar{M} + \sum_{k=1}^{n} c_{ki}^{*} d\log p_k \right), \qquad \text{kde} \tag{8.61}$$

$$d\log \bar{M} = d\log M - \sum_{k=1}^{n} w_k d\log p_k = \sum_{k=1}^{n} w_k d\log q_k \tag{8.62}$$

$$b_i = a_i = p_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial M} \tag{8.63}$$

$$c_{ik} = a_{ij}^{*} = p_j \frac{s_{ij}}{M}, \tag{8.64}$$

kde s_{ij} je i,j-tý prvek Sluckého substituční matice. První rovnost v (8.64) představuje definici $d\log \bar{M}$, druhá plyne z rozpočtového omezení. Veličinu $d\log \bar{M}$ bychom mohli chápat jako index reprezentující proporční změnu ve skutečných celkových výdajích. Dá se ukázat, že může být považována za míru změny užitku takže - stejně jako ve Stoneově rovnici - (8.x) reprezentuje Hicksovy poptávkové funkce. Rovnice (8.63) ukazuje, že $b_i = a_i$ je mezní sklon ke spotřebě i-tého statku.

8.7 Výdajový (n-komoditní) systém typu AIDS (*Deaton A., Muellbauer J.*)

Před více než 60 lety se zabýval **Holbrook Working [1943]** odhadem ***Engelovy křivky*** **specifikované** jako **logaritmický vztah udávající závislost veličiny účast statku na rozpočtu** w_i **na výdajích** M **:**

(8.71) $w_i = \alpha_i + \beta_i \log M$, kde $w_i = \frac{p_i x_i}{M}$ a α_i, β_i jsou parametry.

Tato specifikace je již několik desetiletí konvenčně nazývána ***Working-Leserovým modelem.***

Abychom mohli uplatnit tuto statickou specifikaci v analýze časových řad, je třeba ji doplnit o účinky cenových změn (během sledovaného období). **Parametry** α_i, β_i dříve chápané jako konstantní **je** proto **účelné uvažovat jako funkce cen** (nejlépe v podobě nějakého cenového indexu) .

Dále popisovaný ***AIDS*-model** uvedeme specifikací výdajové funkce tvaru

(8.72) $$\log E(u,p) = \log a(p) + u\, b(p)$$

kteréžto vede k soustavě poptávkových funkcí pro w_i právě ve tvaru **(8.71)**. To snadno ověříme uplatněním Shephardova lemmatu na tvar **(8.66*)**, tj. derivacemi $\frac{\partial \log E(u,p)}{\partial \log p_i}$ pro $i = 1,2,\dots,n$.

Z dále zřejmých důvodů se ukazuje za nejvhodnější volit pro parametry $a(p)$ a $b(p)$ interpretované jako cenové agregáty tyto konstrukty (indexy) :

(8.73a) $$\log a(p) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \log p_j \log p_k$$

tedy **cenovou indexní funkci typu *TRANSLOG***

(8.73b) $$b(p) = \beta_0 \prod_{j=1}^{n} p_j^{\beta_j}$$

tedy **cenovou indexní funkci typu *Cobb-Douglas* .**

kde $\alpha_0, \alpha_j, \alpha_{kj}, \beta_0 > 0$ a β_j jsou parametry[9]. Aby výdajová funkce $E(u,p)$ byla lineárně homogenní v cenách p, musí tyto parametry - jak lze bez obtíží ukázat - splňovat podmínky

(8.74) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$$

Nyní zvolené cenové agregáty - parametry $a(p)$, $b(p)$ z **(8.73a.)** - dosadíme do **(8.72)**. Poté, co odvodíme rozpočtové účasti w_i pomocí vztahů $\frac{\partial \log E(u,p)}{\partial \log p_i}$, dostaneme po následné substituci za u vztahy[10]

[9] Jak patrno, indexní cenová funkce $a(p)$ je tvaru **TRANSLOG**, zatímco indexní funkce $b(p)$ je **Cobb-Douglasova**.
[10] Jde o **Marshallovské poptávkové funkce**.

(8.75) $$w_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \log(p_j) + \beta_i \log\left(\frac{M}{P}\right),$$ kde

cenový index P je definován jako indexní funkce typu *TRANSLOG*

(8.76) $$\log P = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log(p_j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \log(p_j)\log(p_k)$$

kde "neohvězdičkované" parametry α_{ij} jsou zprůměrované hodnoty "ohvězdičkovaných" :

(8.77) $$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left(\alpha^*_{ij} + \alpha^*_{ji}\right) = \alpha_{ji}$$ (a tudíž jsou zesymetrizovány)

Model reprezentovaný vztahy (8.71) a (8.72) se nazývá model ***AIDS*** (zkratka vytvořená z anglického ***Almost Ideal Demand System*** = **téměř ideální poptávkový systém**).

Zvláštností a **předností tohoto modelu je, že zachovává obecnos**t jak ***modelu Theilova-Bartenova*** (***Rotterdamského***) modelu tak ***TRANSLOG modelu***. Jeho **základní rovnice** (8.71)) **může být považována za aproximaci 1. řádu** obecně **neznámé relace mezi** w_i na jedné straně **a** veličinami $\log M$ **a** $\log(p_j)$ na straně druhé.

Zbývá ještě uvést, **do jaké míry ovlivňují podmínky kladené na obecnou *výdajovou funkci* přípustné *hodnoty AIDS modelu*. *Podmínku homogenity*** jsme již udali skupinou vztahů **(8.74)**, což pro ***symetrizované*** **parametry** α_{ij} **představuje podmínky**

(8.78) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 0$$

Další podmínka, **součtovatelnost** individuálních poptávek do celkových výdajů,přináší restrikce

(8.79) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1,\quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} = 0,\quad j = 1,2,\dots,n,\quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$$

které jsou však již pokryty podmínkami uvedenými v (8.74) a konečně **z podmínek symetrie dostáváme dříve uplatněný požadavek** $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, tj. (8.77).

Za zmínku stojí, že **čtvercová matice, jejímiž prvky jsou hodnoty** α_{ij} **, nemusí být** obecně ***negativně semidefinitní*. Podmínky negativní semidefinitnosti** (***Sluckého substituční matice***) **jsou splněny, jestliže *výdajová matice*** Θ, jejímiž prvky jsou hodnoty ϑ_{ij} **, je definována jako**

(8.80) $$\vartheta_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_i \beta_j \log\left(\frac{M}{P}\right) + \delta_{ij} w_j - w_i w_j$$

kde δ_{ij} je použito pro označení *Kroneckerova* δ.

Z interpretačního hlediska jsou na ***AIDS modelu*** nejzajímavější **parametry** β_i**, na základě nichž lze posoudit, zda jsou příslušné statky nezbytné (** $\beta_i < 0$ **,** w_i **klesá) nebo luxusní. (** $\beta_i > 0$ **,** w_i **roste**). **Parametry** α_{ij} pak **udávají míru změny** j**-té výdajové účasti při jednotkové proporcionální změně** p_j**, pokud se poměr** $\frac{M}{P}$ **nemění.**

alternativní obecnější specifikace AIDS modelu :

Dle **modelu uvažovaného Workingem** tedy platí :

(8.81) $$w_i = \frac{\partial \log E(u,p)}{\partial \log p_i} = \alpha_i(p) + \beta_i(p) \cdot \log E(u,p),$$

který má **obecné řešení pro výdajovou funkci** $E(u,p)$ ve tvaru

(8.82) $$\log E(u,p) = (1-u)\log a(p) + u \log b(p)$$ kde

$$\alpha_i(p) = \frac{a_i(p)\log b(p) - b_i(p)\log a(p)}{\log b(p) - \log a(p)}, \quad \beta_i(p) = \frac{b_i(p) - a_i(p)}{\log b(p) - \log a(p)},$$ přičemž

(8.83) $$a_i = \frac{\partial \log a(p)}{\partial \log p_i} \qquad b_i = \frac{\partial \log b(p)}{\partial \log p_i}$$

Výdajová funkce tedy **představuje užitkem vážený geometrický průměr lineárně homogenních funkcí** $a(p)$ a $b(p)$ reprezentující **výdajové funkce velmi chudého** ($u = 0$) a **výdajové funkce velmi bohatého** ($u = 1$) **spotřebitele**. Celý **systém poptávkových rovnic** tzv. ***Working-Leserovy*** třídy může být generován vhodnou konkretizací funkcí $a(p)$ a $b(p)$. Jestliže zvolíme pro $a(p)$ ***TRANSLOG specifikaci*** **cenové indexní funkce**

(8.84) $$\log a(p) = a_0 + \sum_j \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \log p_j \log p_k$$ a pro $b(p)$

(8.85) $$\log b(p) = a_0 + \sum_j \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \log p_j \log p_k + \beta_0 \prod_j p_j^{\beta_j}$$

s obvykle přijímanými omezeními $\sum a_j = 1$, $\sum \alpha_{jk} = 0$ a $\sum \beta_j = 0$, dostaneme **AIDS-výdajový systém** ("***A****lmost* ***I****deal* ***D****emand* ***S****ystem*") **[Deaton a Muelbauer 1980]**, pro který platí

(8.86) $$w_i = \alpha_i + \beta_i \log\left(\frac{M}{P}\right) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \log p_j,$$

jehož **cenová indexní funkce má** ***TRANSLOG tvar***

(8.87) $$\log P = a_0 + \sum_j \alpha_j \log p_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \log p_j \log p_k$$

8.8 Výdajový (n-komoditní) systém typu PIGL(OG)

Jinou možností, jak zvolit **přijatelný tvar výdajové funkce**, je nahradit geometrický průměr **obecnou mocninou** ρ**-tého řádu**.Touto modifikací dostaneme výdajovou funkci ve tvaru

(8.88) $$E(u,p) = \cdot\, (p)^{\rho} + \; - \; \cdot\, u(p)^{\rho} \;{}^{1/\rho}$$ kde ρ

Tato tzv. **PIGL-třída**[11] **[Muelbauer]** se mj. vyznačuje ***Engelovými křivkami*** *zapsanými* ***v*** ekvivalentním ***Box-Coxově tvaru*** (formulovaném pro w_i)

(8.89) $$w_i = i + i \cdot M ,$$

Uvedenou konkretizaci, nazývanou též „***zobecněný Workingův model***“ prezentovali poprvé **Tran van Hoa [1983]**, **Ironmonger a Manning [1983]**.

[11] **Zkratka pro Price Independent Generalized Linear**

8.7 Exponenciální užitková funkce

Mějme dvoukomoditní užitkovou funkci ve tvaru

$$u(x_1,x_2) = -\alpha_1 e^{-\beta_1 x_1} + \left(-\alpha_2 e^{-\beta_2 x_2}\right)$$

s mezními užitky

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \alpha_1\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} \qquad u_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \alpha_2\beta_2 e^{-\beta_2 x_2}$$

Porovnáním $\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2}$ dostaneme :

$$p_2\alpha_1\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} = p_1\alpha_2\beta_2 e^{-\beta_2 x_2}$$ a odtud $$e^{-\beta_1 x_1} = \frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1} e^{-\beta_2 x_2}$$ neboli

$$x_1 = \frac{-\ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_2.$$

Dosazením do rozpočtového omezení máme:

$$p_1\left(\frac{-\ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)}{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1}x_2\right) + p_2 x_2 = M$$ a tedy

$$x_2\left(p_1\frac{\beta_2}{\beta_1} + p_2\right) = M + \frac{p_1}{\beta_1}\ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)$$ neboli

$$M_{x_2}^* = \frac{\beta_1\left(M + \frac{p_1}{\beta_1}\ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}$$

Analogicky bychom dostali druhou Marshallovskou poptávku

$$M_{x_1}^* = \frac{\beta_2\left(M + \frac{p_2}{\beta_2}\ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}$$

Nepřímá užitková funkce bude mít tvar

$$\Psi(M,p_1,p_2) = -\alpha_1 e^{-\beta_1\frac{\beta_1\left(M + \frac{p_1}{\beta_1}\ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} + \left(-\alpha_2 e^{-\beta_2\frac{\beta_2\left(M + \frac{p_2}{\beta_2}\ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}}\right)$$

$$\Psi(M,p_1,p_2) = -\alpha_1 e^{-\frac{\beta_1^2\left(M + \frac{p_1}{\beta_1}\ln\left(\frac{p_1\alpha_2\beta_2}{p_2\alpha_1\beta_1}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}} + \left(-\alpha_2 e^{-\frac{\beta_2^2\left(M + \frac{p_2}{\beta_2}\ln\left(\frac{p_2\alpha_1\beta_1}{p_1\alpha_2\beta_2}\right)\right)}{\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2}}\right)$$

$$\Psi(M,p_1,p_2) = e^{\frac{\beta_1^2 M - p_1 . \ln\left(\frac{p_1 \alpha_2 \beta_2}{p_2 \alpha_1 \beta_1}\right)}{\beta_2 p_1 + p_2}} + e^{\frac{\beta_2 M - p_2 . \ln\left(\frac{p_2 \alpha_1 \beta_1}{p_1 \alpha_2 \beta_2}\right)}{\beta_2 p_1 + p_2}}$$

Kvazikonkávnost

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1\beta_1 e^{\beta_1 x_1} & \alpha_2\beta_2 e^{\beta_2 x_2} \\ \alpha_1\beta_1 e^{\beta_1 x_1} & \alpha_1\beta_1^2 e^{\beta_1 x_1} & 0 \\ \alpha_2\beta_2 e^{\beta_2 x_2} & 0 & \alpha_2\beta_2^2 e^{\beta_2 x_2} \end{vmatrix} = -\alpha_1^2\alpha_2\beta_1^2\beta_2^2 e^{2\beta_1 x_1+\beta_2 x_2} - \alpha_1\alpha_2^2\beta_1^2\beta_2^2 e^{\beta_1 x_1+2\beta_2 x_2} =$$

$$-\alpha_1\alpha_2\beta_1^2\beta_2^2 e^{2\beta_1 x_1+\beta_2 x_2}\left(\alpha_1 e^{\beta_1 x_1} + \alpha_2 e^{\beta_2 x_2}\right) < 0$$

Funkce tedy není (v souladu s očekáváním) kvazikonkávní.