Obecný problém dekompozice - Divisiův přístup a řešení

Odlišný způsob k problematice indexních čísel uplatnil v polovině 20.let 20.století francouzský matematik **Francois Divisia**[1]. Formuloval úlohu nalezení agregátního indexu tak, že hledal - pro libovolné časové období t - multiplikativní rozklad „makroagregátu“ $P(t).Q(t)$ reprezentujícího součin cenového a kvantového indexního čísla do tvaru

(4.1)
$$P(t).Q(t)=\sum_{i=1}^{N} p_i(t).q_i(t),$$

tj. tak , aby ve všech okamžicích spojitě uvažovaného času platila aditivní dekompozice agregátu na dílčí součiny příslušné ***cenové a kvantové „mikrofunkce“*** všech komodit. Funkce $P(t)$ jako indikátor všeobecné cenové úrovně má přitom co nejlépe vystihovat pohyb cenové hladiny, podobně funkce $Q(t)$ jako reprezentant souhrnného fyzického objemu vývoj množstevního indexu.

O „mikrofunkcích“ cen a kvantit $p_i(t)$, resp. $q_i(t)$ Divisia předpokládal, že mají:

- spojité první derivace (podle času),
- kladné hodnoty na celém uvažovaném intervalu $\langle 0,T \rangle$,
- konečnou variaci na každém podintervalu $\langle t-1,t \rangle$ spadajícího do $\langle 0,T \rangle$.

Takto obecně formulovaná úloha však není bez dalšího jednoznačně řešitelná, což snižuje její uplatnitelnost pro reálné potřeby. Je zřejmé, že spolu s funkcemi $P(t)$ a $Q(t)$ je řešením úlohy také každá dvojice tvaru $c.P(t)$ a $\frac{Q(t)}{c}$ pro nějakou kladnou konstantu c.

4.1 Spojitý přístup

Vzhledem k derivovatelnosti funkcí $P(t)$ a $Q(t)$, můžeme derivaci (4.1) zapsat jako (4.2)

$$Q(t)\cdot\frac{\partial P(t)}{\partial t}+P(t)\cdot\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t).q_i(t)}\cdot\frac{\partial p_k(t)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t).q_i(t)}\cdot\frac{\partial q_k(t)}{\partial t}.$$

Předpokládáme-li kladnost funkcí $P(t)$ a $Q(t)$ na celém intervalu $\langle 0,T \rangle$, můžeme dělit součinem $P(t).Q(t)$. Dostaneme (4.3)

$$\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{\partial P(t)}{\partial t}+\frac{1}{Q(t)}\cdot\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t).q_i(t)}\cdot\frac{\partial p_k(t)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t).q_i(t)}\cdot\frac{\partial q_k(t)}{\partial t}.$$

Dále samostatně uvažujeme aditivní rozklad cenové změny v (4.3) na

(4.4A)
$$\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{\partial P(t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t).q_i(t)}\cdot\frac{\partial p_k(t)}{\partial t},$$

resp. kvantové změny v témže výrazu na

[1] Divisia, F.: L´indice monétaire et la Theorie de la monnaie-revue d´Economie politique (1925)

(4.4B) $$\frac{1}{Q(t)}\cdot\frac{dQ(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t).q_i(t)}\cdot\frac{dq_k(t)}{dt} .$$

Aditivním rozkladem změny cenové a kvantové situace a dále úpravami využívajícími aparátu Stieltjesova integrálu *(pro funkce s konečnou variací)* lze dospět k aproximativnímu tvaru

(4.5) $$\frac{1}{P(t^*)}\cdot\left[P(t)-P(t-1)\right] = \sum_{i=1}^{N} g_k(t_k^*)\cdot\left[p_k(t)-p_k(t-1)\right]$$

pro nějaké body t^*, t_k^* z intervalu $\langle t-1, t\rangle$ a nějakou váhovou funkci g_k, např. tvaru

(4.6A) $$g_k(t_k^*) = \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t).q_i(t)} .$$

Pokud za oba tyto body vezmeme levý krajní bod intervalu, tj. $t^* = t_k^* = t-1$ a podobně dosadíme za funkci $g_k(t_k^*) = g_k(t-1)$ výraz

(4.6B) $$g_k(t_k^*) = \frac{q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1).q_i(t-1)} ,$$ obdržíme po úpravě vztah

(4.7) $$\frac{P(t)}{P(t-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_k(t).q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N} p_k(t-1).q_k(t-1)} ,$$

neboli Laspeyresovo cenové indexní číslo vztažené k bodům $t-1$, t intervalu. Cenové indexní číslo pro celé uvažované období $\langle 0, T\rangle$ pak získáme zřetězením, tedy

(4.8) $$P_{0T}^{D} = \bar{I}_T = \bar{I}_1 . \bar{I}_2 . \ldots . \bar{I}_T .$$

Nahrazením $t^* = t_k^* = t$ a dosazením $g_k(t_k^*) = g_k(t)$ výrazu

(4.9) $$g_k(t) = \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t).q_i(t)}$$

odvodíme tímto postupem *zřetězené Paascheho cenové indexní číslo* P^{P}_{0}. Podobně lze jinými speciálními volbami získat i jiná zřetězená indexní čísla, např. *Edgeworthovo*.

Kvantová indexní čísla bychom získali obdobně z rozkladu kvantové změny v (4.4B). Dosazením $t^* = t_k^* = t-1$ obdržíme Q^{L}_{t-1} a již popsaným následným zřetězením Q^{L}_{0T}.

4.2 Diskrétní přístup

Postup lze obdobně použít také na diskrétní případ, kdy v intervalu $\langle 0,T \rangle$ uvažujeme množinu ekvidistantních izolovaných bodů $t = 1,2,\ldots,T$. Opět uvažujeme rozklad agregátu

(4.10) $$P(t).Q(t) = \sum_{i=1}^{N} p_i(t).q_i(t) \qquad t = 1,2,\ldots,T \text{ v } T \text{ okamžicích.}$$

Nejprve vyjádříme levou stranu změny agregátu mezi obdobími $t-1$ a t (libovolnými následujícími): $P(t).Q(t) - P(t-1).Q(t-1)$ v podílovém vyjádření (4.11)

$$\frac{[P(t)-P(t-1)].Q(t)}{P(t-1).Q(t)} + \frac{[Q(t)-Q(t-1)].P(t-1)}{P(t-1).Q(t)} = \frac{P(t)-P(t-1)}{P(t-1)} + \frac{Q(t)-Q(t-1)}{Q(t)}$$

Odpovídající souhrnnou změnu N dílčích změn cen a kvantit napravo vyjádříme jako

(4.12) $$\sum_{k=1}^{N} \frac{[p_k(t)-p_k(t-1)].q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1).q_i(t)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{[q_k(t)-q_k(t-1)].p_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1).q_i(t)}.$$

Přijmeme-li, že se cenová a množstevní změna hodnotového komplexu odehrávají nezávisle na sobě, můžeme porovnat "stejnolehlé" cenové a kvantové složky samostatně.

Pro relativní cenovou složku dostaneme rozklad tvaru

(4.13) $$\frac{P(t)-P(t-1)}{P(t-1)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} [p_k(t)-p_k(t-1)].q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1).q_i(t)} = P^P_{t-1,t} - 1,$$

Kde $P^P_{t-1,t}$ představuje Paascheho cenové indexní číslo pro změnové období $t-1,t$.

Obdobně odvodíme pro relativní kvantovou změnovou komponentu vyjádření

(4.14) $$\frac{Q(t)-Q(t-1)}{Q(t-1)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} [q_k(t)-q_k(t-1)].p_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1).q_i(t-1)} = Q^L_{t-1,t} - 1, \qquad \text{kde}$$

$Q^L_{t-1,t}$ zastupuje Laspeyresovo kvantové indexní číslo pro změnové období $t-1,t$.

(Po odstranění -1 na obou stranách dostaneme $\frac{P(t)}{P(t-1)} = P^P_{t-1,t}$ a $\frac{Q(t)}{Q(t-1)} = Q^L_{t-1,t}$) .

Sestavíme-li řetězové indexy $\frac{P(1)}{P(0)}, \frac{P(2)}{P(1)}, \ldots, \frac{P(T-1)}{P(T-2)}, \frac{P(T)}{P(T-1)}$ a tyto vynásobíme, dostaneme vyjádření $\frac{P(T)}{P(0)} = P^P_{0,1}.P^P_{1,2}.\ldots.P^P_{T-2,T-1}.P^P_{T-1,T} = P^P_{0T}$, což je zřetězené Paascheho cenové indexní číslo P^P_{0T}. Podobně bychom získali pro $\frac{Q(T)}{Q(0)}$ zřetězené Laspeyresovo kvantové indexní číslo Q^L_{0T}.

Poznámka Pokud bychom vycházeli z dekompozice hodnotového makroagregátu způsobem

(4.17) $$P_T Q_T - P_{T-1} Q_{T-1} \,.\, Q_{T-1} + P_T - P_{T-1} \,.\, Q_T \,,$$

obdrželi bychom analogickou cestou dvojici zřetězených indexních čísel P^{*L}_{0T}, Q^{*P}_{0T}.

Postupem podle Divisiova schématu obdržíme pro spojitý i diskrétní případ *zřetězené indexní číslo splňující axiom záměny faktorů.* Nevyhneme se však nejednoznačnosti určení v důsledku neurčitosti volby multiplikativního rozkladu (*diskrétní případ*), resp. odhadu aproximujícího Stieltjesova integrálu *(spojitý případ)*.

Problém spojený s praktickou aplikací Divisiova přístupu je ten, že ceny a kvantity nelze měřit kontinuálně, ale vždy jen v určitých odstupech. Pro praktické užití by musely být Divisiovy indexy se spojitým časem aproximovány diskrétními, přičemž existuje více možností jak takovou aproximaci provést.

E.Diewert [1980] ukázal, že kromě Laspeyresova a Paascheho indexu mohou být získány jako speciální aproximace $P(1)/P(0)$ další indexy, např. Törnquistův index, pokud vezmeme

$$\ln P^T_{01} = 1/2 \sum_{i=1}^{N} \left(s_i(0) + s_i(1) \right) \ln \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \,, \quad \text{kde účasti} \quad s_i(t) = \frac{p_i(t) q_i(t)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(t) q_j(t)}$$

Postup, který použil Divisia v případě indexů se spojitým časem, uplatnil již o něco dříve anglický statistik T.L.Bennet[2] až na to, že neuplatnil v (4.1) dělení výrazem $p(t)q(t)$

T.L.Bennet [1920] navíc navrhl následující diskrétní aproximaci k měření diferencí (nikoliv tedy podílů jako Divisia) na agregátních cenových a množstevních úrovních:

(4.18) $$\Delta P = P(1) - P(0) = 1/2 \sum_{i=1}^{N} \left(q_i(0) + q_i(1) \right) \left(p_i(1) - p_i(0) \right) ,$$

(4.19) $$\Delta Q = Q(1) - Q(0) = 1/2 \sum_{i=1}^{N} \left(p_i(0) + p_i(1) \right) \left(q_i(1) - q_i(0) \right) .$$

Ukázal přitom, že rozdíl výdajů mezi obdobími $\sum_{i=1}^{N} p_i(1) q_i(1) - \sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)$ dává přesně výraz rovný

Λ - , kde Λ a Λ jsou definovány pravými stranami (4.18), (4.19).

Poznámka Obecná definice Divisiova spojitého indexu je čistě matematickou konstrukcí a nemusí mít žádnou souvislost s rozklady indexních čísel, dokonce ani nemusí mít žádný vztah k ekonomickému prostředí.

Jean Villé [1951-52] a **C.R.Hulten** [1973] analyzovali Divisiovy indexy v prostředí cen a spotřebovaných množství za předpokladu, že spotřebitel optimalizuje své chování (z hlediska minimalizace nákladů) a že příslušná užitková funkce je lineárně homogenní [3].

Protože se indexy $P^L_{01}, P^P_{01}, P^T_{01}$ mohou lišit, Divisiův přístup nevede k jednoznačnému návodu, jak řešit problém. Jiné návrhy, jak aproximovat Divisiův index se spojitým časem pomocí diskrétních dat podali **Paul A. Samuelson** a **Subramanian Swamy** [1974].

---

[2] **Bennet,T.L.**: The Theory of Measurement of Changes in Cost of Living. Journal of the Royal Statistical Socierty 83/1920 s.455-462

[3] **Lineárně homogenní funkce N – proměnných** $\mathbf{x} = (x_1,..., x_N)$ splňuje vlastnost $F(\lambda\, \mathbf{x}) = \lambda.F(\mathbf{x})$ pro libovolné skalární $\lambda > 0$.