6.1 Důchodový a substituční efekt - Sluckého rovnice

Předmětem dalšího výkladu bude odvození vztahů pro poptávkové funkce charakterizující v souladu s přijatým preferenčním chováním mikroekonomického subjektu (spotřebitele) jeho vztah k nákupu potenciálně možných spotřebních statků zajišťujících mu užitek na jemu vyhovující hladině. Každá z těchto poptávkových funkcí vyjadřuje poptávku po (dejme tomu) r-tém statku v závislosti na cenách (obecně všech) komodit a důchodu spotřebitele.

Poptávkové funkce odvodíme z výše uvedených podmínek (3.3A),(3.3B) pro rovnovážnou úroveň:

(6.1A) $$u_r = \lambda \cdot p_r \qquad r = 1,2,\dots,n$$

(6.1B) $$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$$

Jak patrno, jde o celkem $n+1$ vztahů (rovnic), z nichž lze odvodit (derivacemi podle proměnných M a p_r $(r = 1,2,\dots,n)$) výrazy pro změny v poptávce po dané (pevně zvolené) komoditě, jestliže se bude měnit důchod nebo cena některé komodity (měnit se přirozeně mohou i ceny komodit ostatních).

Dále se budeme zabývat tím, jak se vyvíjí poptávka v okolí rovnovážného bodu, jestliže dochází ke změnám v příjmu spotřebitele nebo v některé z cen. Oba případy budeme zkoumat odděleně. Mějme přitom na paměti, že jak poptávky (souřadnice bodu $\boldsymbol{x}$), tak Lagrangeův multiplikátor λ jsou závislé (a lze je tudíž psát jako jejich funkce) na „parametrech" úlohy, tj. na příjmu M a na cenách p_i.[1] Další parametry pak bude obsahovat analytický tvar, který přijmeme pro užitkovou funkci $u(\boldsymbol{x})$. Ty se pak objeví ve vyjádřeních mezních užitků $u_r(\boldsymbol{x})$.

6.2 Růst důchodu při neměnných cenách komodit

Uvažujme nejprve situaci, kdy dojde ke změně (zvolme přírůstek) důchodu, aniž se jakkoliv změní relativní cenové proporce. Výchozí vztahy (6.1A), (6.1B) derivujeme podle důchodu M, u něhož předpokládáme změnu. Dostaneme

(6.2A) $$\frac{\partial u_r(\boldsymbol{x})}{\partial M} = p_r \cdot \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} \qquad \text{pro} \quad r = 1,2,\dots,n,$$

(6.2B) $$\sum_{s=1}^{n} p_s \cdot \frac{\partial x_s}{\partial M} = 1,$$

přičemž po rozvedení výrazu pro derivaci funkce $u(\boldsymbol{x})$ n proměnných získáme levou stranu (7A) v součtovém tvaru

(6.2B*) $$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_r(\boldsymbol{x})}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial M} = p_r \cdot \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} \qquad \text{pro} \quad r = 1,2,\dots,n.$$

---

[1] S ohledem na podmínky (6.1A) , kladnost cen i mezních užitků, musí být i multiplikátor $\lambda > 0$.

Je totiž třeba si uvědomit, že vyjadřujeme parciální derivace funkce $u(\mathbf{x})$, kdy každý z argumentů této užitkové funkce $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sám (jako hodnota poptávky po s-té komoditě) funkcí parametrů naší optimalizační úlohy $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a M.

Nyní nahradíme p_r ve výrazech (6.2A), (6.2B) podílem $\dfrac{u_r}{\lambda}$. Dostaneme vztahy

(6.3A)
$$u_r \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda(\mathbf{p}, M)}{\partial M}\right) + \sum_{s=1}^{n} u_{rs} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial M} = 0 \qquad (r = \ ,2,\ldots,n),$$

(6.3B)
$$\sum_{s=1}^{n} u_s \cdot \frac{\partial x_s}{\partial M} = \lambda .$$

Touto úpravou jsme se oprostili od parametrů p_n a přešli jsme k vyjádření, ve kterém se uplatňují parciální derivace (a to jak první u_r, tak druhé u_{rs}) užitkové funkce $u(\mathbf{x})$.

Systém rovnic (6.3A), (6.3B) představuje tedy soustavu, ve které k vyjádření (výpočtu) $n+$ neznámých

$$-\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda(\mathbf{p}, M)}{\partial M} \quad \text{a} \quad \frac{\partial x_s}{dM} \qquad (s = \ ,2,\ldots,n)$$ slouží právě $n+$ vztahů.

(v pořadí první uvedenou neznámou určujeme víceméně pro úplnost, aniž nás sama o sobě nějak interpretačně zajímá). Všimněme si dále, že při maticovém rozpisu levé strany této soustavy jsme se nyní dostali k dříve zavedené matici $\boldsymbol{U}$ sestávající z prvních a druhých parciálních derivací užitkové funkce.

Řešení této soustavy získáme nejsnáze ***Cramérovým pravidlem***: matice koeficientů soustavy je (*při znalosti užitkové funkce* $u(\mathbf{x})$) právě dříve zavedená matice U. Hodnotu jejího determinantu označíme $|\boldsymbol{U}|$, příslušné algebraické doplňky k prvkům u_r, u_{rs} pak $|\boldsymbol{U}_r|$, $|\boldsymbol{U}_{rs}|$.

Vyjádříme-li soustavu rovnic (6.3A), (6.3B) detailně pomocí maticového zápisu, dostaneme

(6.4)
$$\begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\lambda \cdot \partial \lambda(\mathbf{p}, M) / \partial M \\ \partial x_1 / \partial M \\ \partial x_2 / \partial M \\ \partial x_3 / \partial M \\ \vdots \\ \partial x_n / \partial M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podle ***Cramérova pravidla*** pak v pořadí i-tou proměnnou získáme jako podíl determinantu $|V_i|$, odvozeného z $|\boldsymbol{U}|$ tak, že v něm i-tý sloupec nahradíme pravou stranou soustavy (6.4) a (nezměněného) determinantu $|\boldsymbol{U}|$. Tedy např. pro v pořadí ($s+\ $) proměnnou $\frac{\partial\ _s}{\partial\ 1}$

$$\begin{array}{c} s+1\text{-tý sloupec} \\ \frac{\partial\ _s}{\partial\ 1}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & \lambda & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & 0 & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & \cdots & 0 & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{U}|}=\lambda\frac{|\boldsymbol{U}_s|}{|\boldsymbol{U}|} \end{array}$$

pro všechna $s=\ ,2,\ldots,n$.

Zde jsme, jak patrno, provedli rozvoj upraveného determinantu v čitateli podle ($s+\ $) sloupce, přičemž jsme jako $|\boldsymbol{U}_s|$ označili algebraický doplněk prvku u_s nacházejícího se na ($s+\ $) pozici prvního sloupce matice $\boldsymbol{U}$.

Ukázali jsme tedy, že řešením této soustavy pro $\frac{\partial\ _s}{\partial\ 1}$ je výraz

(6.5) $$\frac{\partial\ _s}{\partial\ 1}=\lambda\frac{|\boldsymbol{U}_s|}{|\boldsymbol{U}|}$$ a to pro všechna $s=\ ,2,\ldots,n$.

Podobný výraz můžeme odvodit (aniž ho však nutně potřebujeme) pro zbývající (resp. v pořadí první) neznámou $\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda\ (p,M)}{\partial\ 1}$.

Jak patrno, výraz (6.5) (jako násobek podílu dvou determinantů) není vůbec interpretačně průhledný. Nelze totiž nic říci ani o jeho znaménku: to znamená, že s růstem příjmu M může u některých komodit v systému poptávka po nich růst, u jiných naopak klesat.

Abychom rozlišili oba tyto v principu protikladné směry chování poptávky po komoditách při změně příjmu M, definujeme dva základní typy komodit:

Konvence 6.1 Jestliže pro s-tou komoditu platí

(6.6A) $\frac{\partial x_s}{\partial M}>\ $, řekneme, že jde o ***standardní (dobrou, běžnou)*** komoditu

(poptávka po dobrém statku tedy roste s důchodem).

V opačném případě, tj. při platnosti

(6.6B) $\frac{\partial x_s}{\partial M}<\ $, budeme o ní mluvit jako o ***podřadné (inferiorní)*** komoditě.

Jak je z předchozích závěrů patrné, v uvažovaném systému mohou být obsaženy jak komodity standardní, tak komodity inferiorní.

6.3 Růst ceny při neměnném příjmu spotřebitele

Nyní vyšetříme druhý případ, kdy cena jednoho statku (bez újmy na obecnosti např. p_1) roste, aniž se změní důchod M a aniž dojde ke změnám cen ostatních statků.

V takovémto případě budeme tedy předpokládat pouze vzrůst či pokles ceny p_1.
Stejně jako dříve nejprve budeme derivovat vztahy (6.1A), (6.1B) podle p_1 .
Dostaneme

(6.7A) $$\frac{\partial u_1(x)}{\partial p_1} = \lambda + p_1 \cdot \frac{\partial \lambda(M,p)}{\partial p_1} \quad \text{pro} \quad r = 1$$

(6.7B) $$\frac{\partial u_r(x)}{\partial p_1} = p_r \cdot \frac{\partial \lambda(M,p)}{\partial p_1} \quad \text{pro} \quad r = 2,\ldots,n$$

(6.7C) $$x_1 + \sum_{r=1}^{n} p_r \cdot \frac{\partial x_r}{\partial p_1} = 0$$ jako poslední ($n+1$) vztah.

Podobnou úpravou (tzn. s využitím důsledku pro rovnovážný stav $p_r = \frac{u_r}{\lambda}$)
dostáváme dále

(6.8A) $$\sum_{s=1}^{n} u_{1s} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial p_1} + u_1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda(M,p)}{\partial p_1} \right) = \lambda \quad \text{pro} \quad r = 1$$

(6.8B) $$\sum_{s=1}^{n} u_{rs} \cdot \frac{\partial x_s}{\partial p_1} + u_r \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda(M,p)}{\partial p_1} \right) = 0 \quad \text{pro} \quad r = 2,\ldots,n .$$

(6.8C) $$x_1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{u_r}{\lambda} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial p_1} = 0$$ jako poslední vztah, který lze dále

upravit na tvar

(6.8C*) $$\sum_{r=1}^{n} u_r \cdot \frac{\partial x_r}{\partial p_1} = -\lambda \cdot x_1 .$$

Soustavu stejně jako v Případě 1 vyřešíme nejsnáze *Cramérovým pravidlem*: matice koeficientů soustavy je stejně jako dříve právě matice U, hodnota příslušného determinantu $|U|$, přičemž stejně jako předtím označíme algebraické doplňky k prvkům u_r , u_{rs} po řadě $|U_r|$ resp. $|U_{rs}|$.

Vyjádříme-li tentokrát soustavu rovnic (6.8A) - (6.8C) maticovým zápisem, dostaneme vztahy:

$$(6.9)\qquad \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\lambda \cdot \partial\lambda(M,p)/\partial p_1 \\ \partial x_1/\partial p_1 \\ \partial x_2/\partial p_1 \\ \vdots \\ \partial x_n/\partial p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x_1 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Na základě ***Cramérova pravidla*** pak i-tou proměnnou získáme jako podíl determinantu $|U_s|$, odvozeného z $|U|$ tak, že v něm s-tý sloupec nahradíme pravou stranou soustavy (6.9) a původního determinantu $|U|$. Tedy např. pro v pořadí ($s+$) proměnnou $\frac{\partial\ _s}{\partial\ _s}$ obdržíme

$$\frac{\partial\ _s}{\partial\ _1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & -\lambda x_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & \lambda & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 & \cdots & u_{2n} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & \ddots & 0 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & 0 & 0 & u_{nn} \end{vmatrix}}{|U|} = -\lambda \cdot x_1 \cdot \frac{|U_s|}{|U|} + \lambda \cdot \frac{|U_{1s}|}{|U|}$$

pro $s = \ ,2,....,n$.

I v tomto případě jsme provedli rozvoj modifikovaného determinantu podle ($s+$) sloupce, přičemž jsme kromě algebraického doplňku $|U_s|$ uplatnili dále algebraický doplněk $|U_{1s}|$ k prvku u_{1s}, tj. k prvku, který se nalézá na průsečíku 2. řádku a ($s+$) sloupce matice U.

Nalezli jsme tedy řešení soustavy pro $\frac{\partial\ }{\partial\ _1}$ jako výraz

$$(6.10)\qquad \frac{\partial\ _s}{\partial\ _1} = -\lambda \cdot x_1 \cdot \frac{|U_s|}{|U|} + \lambda \cdot \frac{|U_{1s}|}{|U|} \qquad \text{pro } s = \ ,2,....,n$$

a - *pokud bychom to z nějakých důvodů potřebovali* - stejným postupem bychom odvodili i hodnotu neznámé $-\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial\lambda(M,p)}{\partial\ _1}$.

6.4 Hicksovy podmínky stability - kvazikonkávnosti

V rovnovážné situaci (kdy se poptávka po jednotlivých komoditách ustálí) v souladu s principem

$$Max\ u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \text{ za podmínky } \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$$ [2]

platí pro poměry mezních užitků a cen všech komodit vztahy:

(6.11) $$\frac{u_r}{p_r} = const. \quad r = 1,2\ldots,n$$

Tato soustava podmínek je pro existenci extrému (maxima) nutná. Sama o sobě však nestačí k tomu, aby o každém stacionárním bodě, tj. bodě, v němž vypočtené hodnoty mezních užitků splňují vlastnost (6.11) bylo možno říci, že v něm má užitková funkce maximum.

Postačující podmínky zajišťující maximalizaci užitkové funkce v příslušném bodě odvodil **sir John R.Hicks [1904-1989]** a tyto po něm se také nazývají. Lze je formulovat v několika vyjádřeních, přičemž výchozí formulací je obecná extremalizace druhého diferenciálu užitkové funkce $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za podmínky, kterou představuje anulovaný první diferenciál rozpočtového omezení $\sum p_i x_i = M$, tedy

(6.12A) $$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} u_{rs}\, dx_r\, dx_s < 0$$

za vedlejší podmínky

(6.12B) $$du = \sum_{r=1}^{n} p_r\, dx_r = 0\,.$$

Vzhledem k tomu, že ověření splnění podmínek (6.12A), (6.12B) není právě pohodlné, lze za tímto účelem uplatnit některou z jejich modifikací. Uvedeme alespoň některé:

1. tvar Hicksových podmínek stability

S ohledem na platnost (6.11) lze postačující podmínku vyjádřit též jako

(6.13A) $$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} u_{rs}\, dx_r\, dx_s < 0$$ za

podmínky

(6.13B) $$du = \sum_{r=1}^{n} u_r\, dx_r = 0\,.$$

---

[2] Nejde ani tak o nebezpečí, že by stacionární bod byl minimem, jako daleko spíše o možnost, že stacionární bod bude sedlovým bodem užitkové funkce, tj. bodem, ve kterém jsou sice všechny parciální derivace rovny nule, ale řezné nadroviny vedené ve směru souřadnicových os budou v některých směrech konvexní, v jiných směrech konkávní funkce.

Znamená to tedy, že (v bodě, v němž uvažujeme možnost nabytí maxima) musí platit pro jakoukoliv n-tici (malých) hodnot dx_r $(r = 1,2,....,n)$ splňující (6.13A) - při známých hodnotách koeficientů této lineární formy, totiž hodnot u_r - že hodnota kvadratické formy (6.13A) - rovněž při známých jejích koeficientech u_{rs}, $r,s = 1,2,....,n$ - je vždy záporná. Tato „definiční verze" *Hicksových podmínek* však není právě výhodná pro ověřování skutečného stavu. Proto se užívá jejich verifikovatelnější verze.

2. tvar Hicksových podmínek stability

lze získat z interpretace (6.12A) jako kvadratické formy v proměnných dx_r, dx_s, která má být zřejmě negativně definitní při splnění vedlejší podmínky (6.12A). Takovouto podmínku lze formulovat - viz Matematický dodatek 1 - jako požadavek na střídající se znaménka hlavních minorů matice U.

(6.14)
$$(-1)^k \cdot \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_k & u_{1k} & u_{2k} & \cdots & u_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{pro } k = 2,3,....,n$$

tj. např. $\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} > 0$ pro $k = 2$. (výraz pro $k = 1$ není pro náš účel zajímavý[3]).

Konečně zmiňme

3. tvar Hicksových podmínek stability

můžeme formulovat pomocí negativní definitnosti kvadratické formy, která má matici inverzní k matici $\boldsymbol{U}$ tj. $\boldsymbol{U}^{-1}$. V tomto případě mají podmínky vyjádření

(6.15)
$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{|\mathbf{U}_{rs}|}{|\mathbf{U}|} \cdot \xi_r \cdot \xi_s < 0 \qquad \text{pro libovolná } \xi_r, \ \xi_s \text{ ne všechna nulová.}$$

Zde $|\boldsymbol{U}_{rs}|$ označuje algebraický doplněk k prvku u_{rs} ležícímu na místě $r+1$ -ho řádku a $s+1$ -ho sloupce matice $\boldsymbol{U}$.

---

[3] Výraz pro k=1 je splněn vždy (pro jakoukoliv užitkovou funkci), neboť má tvar $-u_1^2$ a je tedy vždy záporný

Komentář k Hicksovým podmínkám

Na základní formulaci *Hicksových podmínek stability* bychom měli pohlížet takto:

(6.12A) $$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} u_{rs}\, dx_r dx_s < 0$$

Tento výraz přepsaný do maticového vyjádření nebude podobu kvadratické formy

$$\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & \dots & dx_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} < 0,$$

jejímiž koeficienty jsou prvky *Hessovy matice* (matice druhých parciálních derivací) užitkové funkce a proměnnými jednotlivé diferenciální členy dx_r. Podobně výraz

(6.13B) $$du = \sum_{r=1}^{n} u_r dx_r = 0.$$

je zápisem anulované lineární formy $(u_r).dx = 0$, jejímiž koeficienty jsou jednotlivé mezní užitky a proměnnými diferenciální hodnoty dx_r. Jde o skalární součin tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} = 0$$

a představuje diferencovaný vztah rozpočtového omezení $\sum {}_i x_i = M$, kde diferencujeme jednotlivá x_i, přičemž po tomto diferencování je pravá strana nulová, protože příjem M není nijak závislý na komoditních množstvích x_i.

Vyšetřovat platnost podmínek nerovnosti (6.12A) pro všechna dx_r provázaná podmínkou (6.12B) přímo není nijak pohodlné: V podstatě bychom museli prověřit, zda pro libovolnou n-tici „malých“ hodnot $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, která nejsou všechna nulová a která splňují vztah (6.12B) platí podmínka (6.12A). Na hodnoty prvních i druhých derivací užitkové funkce přitom pohlížíme jako na známé, neboť analytický tvar užitkové funkce $\boldsymbol{u(x)}$ máme předem dán a existence derivací je zajištěna příslušným předpokladem. V některých situacích může být podmínka (6.12A) splněna ve všech bodech komoditního prostoru – tzn. pro všechna $u_i(x), u_{ij}(x)$ - jindy jen v některých jeho bodech..

Naproti tomu k ověření ekvivalentního vyjádření (6.14) postačuje prověřit znaménka hlavních minorů determinantu $|U|$ a zjistit, zda se tato střídají s přidáním každé komodity[4]. Střídání těchto znamének je typické pro negativně definitní kvadratickou formu a negativní definitnost lze – aspoň v principu snadno- vyšetřit pomocí znamének vlastních čísel matice U[5] .

---

[4] Chování znamének hlavních minorů matice U nijak nezávisí na pořadí, ve kterém komodity postupně „nabíráme“, jakákoliv permutace pořadí výsledek nijak neovlivní.

[5] Matice koeficientů negativně definitní kvadratické formy(zde matice U) má všechna charakteristická čísla záporná)

6.5 Důsledky pro uzavřený komoditní systém, Sluckého rovnice

Jako přímý důsledek třetího tvaru *Hicksových podmínek stability* můžeme vyslovit

Tvrzení 1 Pro libovolné $r = 1,2,\ldots,n$ platí vztah

(6.16) $$\frac{|U_{rr}|}{|U|} < 0$$

Ověření Platnost (6.16) lze vyvodit ze vztahu (6.15), zvolíme-li za proměnné kvadratické formy $\xi_r = \xi_s$ vektory tvaru $\xi_r = \xi_s = (0,0,\ldots,\xi_r^*,\ldots,0)$, kde ξ_r^* je jediný nenulový prvek tohoto vektoru (nacházející se na r-tém místě). Potom zřejmě jediným nenulovým členem dvojné sumace zůstane výraz $\frac{|U_{rr}|\xi_r\xi_r}{|U|}$ který musí být podle podmínek (6.15) záporný pro libovolné r. Odtud zřejmě již vyvodíme $(\xi_r^2 > 0)$ platnost ověřovaného tvrzení. □.

Poznámka 6.1 Stejný závěr lze odvodit z podílu posledních dvou nerovností soustavy (6.14), neboť je zřejmé, že právě jeden z podílových členů musí být kladný a druhý záporný ($|\boldsymbol{U}_{rr}|$ resp. $|\boldsymbol{U}_{r-1,r-1}|$).

Vraťme se nyní zpět a připomeňme, že řešení soustavy rovnic (6.7A) - (6.7C) má tvar

(6.17) $$\frac{\partial x_s}{\partial p_1} = -\lambda \cdot x_1 \cdot \frac{|U_{0s}|}{|U|} + \lambda \cdot \frac{|U_{1s}|}{|U|} \quad \text{pro libovolné} \quad s = 1,2,\ldots,n.$$

Zřejmě, zvolíme-li místo ceny p_1 libovolnou cenu p_r, bude možno výsledek zapsat ve tvaru

(6.18) $$\frac{\partial x_s}{\partial p_r} = -x_r \cdot \frac{\partial x_s}{\partial I} + X_{rs} \qquad \text{pro libovolná} \quad r,s = 1,2,\ldots,n.$$

Oprávněnost vyjádření, v němž X_{rs} je použito pro zkrácení zápisu $X_{rs} = \lambda \frac{|U_{rs}|}{|U|}$, je patrná z (6.17), do něhož jsme dosadili $\frac{\partial x_s}{\partial I}$ z výrazu (6.5).

Rovnice (6.18) je v literatuře známá jako ***Sluckého rovnice*** – Ruský ekonom **Jevgenij Sluckij**[6] ji formuloval v roce 1915, později podali její exaktnější odvození **J. Hicks a R. G. D. Allen [1934].**

Je z ní patrné, že účinek cenové změny na změnu poptávky (obecně po jiné komoditě) se projevuje dvěma směry: jednak přes „důchodový“ člen $\frac{\partial x_s}{\partial I}$ charakterizující změnu poptávky (po uvažované komoditě) při změně příjmu spotřebitele, jednak přes tzv. „substituční“ člen X_{rs}, jehož vlastnosti přiblížíme níže.

---

[6] V anglosaské literatuře psán jako **Eugen Slutsky.**

Konvence 6.2

a) ***Jestliže*** platí, že ***při růstu ceny*** p_r (kdy poptávka po x_r zpravidla klesá) ***poptávka po*** x_s ***klesá***, řekneme, že ***komodity*** ζ_r ***a*** ζ_s ***jsou v komplementárním vztahu*** (jsou vzájemně ***komplementární***).

b) ***Jestliže*** naopak platí, že ***při růstu ceny*** p_r ***poptávka po*** x_s ***roste***, řekneme, že ***komodity*** ζ_r ***a*** ζ_s ***jsou v substitučním vztahu (jsou vzájemně substituční).***

Z výše uvedené konvence (ostatně dobře známé z mikroekonomie) je patrné, že vzájemná povaha komodit (*substituční-komplementární*) je charakterizována protisměrností resp. stejnosměrností vývoje poptávky při změně ceny některé z dvojice porovnávaných komodit. Jedním z nejtypičtějších příkladů substitučních komodit je vztah individuální osobní a veřejné dopravy (růst ceny jízdného veřejné dopravy povede ke zvýšení poptávky po osobních vozidlech a vice versa), zatímco např. vztah poptávky po obuvi a po leštících prostředcích na boty má typicky komplementární charakter.

Množství dalších, více či méně ekonomickou realitou zdůvodněných analogií nalezneme v literatuře k základnímu kursu mikroekonomie.

Jestliže v této souvislosti zaměříme pozornost na důchodový člen v (6.18), mohou nastat v podstatě jen dva případy (vyloučíme-li třetí případ inertnosti vůči změně ceny vůbec):

a) ***Jestliže*** $\dfrac{\partial x_s}{\partial M} > 0$ - což je právě případ standardního statku - ***pak při růstu ceny*** p_r***, poptávka po*** x_s ***klesá.*** Vzhledem k tomu, že je oprávněné předpokládat, že s růstem ceny poklesne také poptávka po x_r, lze pozorovat, že obě komodity vykazují souběžný směr vývoje poptávky při růstu ceny p_r. (V případě poklesu ceny p_r nastane naopak pro oba statky vzestup poptávky.)

b) *Jestliže* naopak nastane případ $\dfrac{\partial x_s}{\partial M} < 0$, což je případ inferiorního (podřadného) statku, ***potom při růstu ceny*** p_r***, poptávka po*** x_s ***poklesne***. Za této situace, kdy lze oprávněně předpokládat, že poptávka po x_r naopak vzroste, lze vyvodit, že obě komodity vykazují protichůdnou tendenci ve vývoji poptávky. (V případě poklesu ceny p_r nastane - *mutatis mutandis* - v obou případech pokles poptávky po komoditách x_r, x_s.)

Kompenzovaná změna poptávky

Před dalšími úvahami vyslovíme dočasný doplňující předpoklad:
***Nechť je přírůstek dp_r ceny r-té komodity provázen přírůstkem důchodu, který růst této ceny kompenzuje*.** Zapsáno v přírůstcích:

(6.19) $$dM = x_r \cdot dp_r \qquad \text{(zapsáno také jinak : } x_r = \frac{dM}{dp_r}\text{)}$$

Potom odpovídající změnu poptávky po s-té komoditě (neuvažujeme-li jiné změny než p_r a M) lze zapsat (pomocí *Eulerova vztahu*)

(6.20) $$dx_s = \frac{\partial x_s}{\partial p_r} \cdot dp_r + \frac{\partial x_s}{\partial M} \cdot dM \,.$$

Vydělením tohoto vztahu přírůstkem dp_r dostaneme

(6.21) $$\frac{dx_s}{dp_r} = \frac{\partial x_s}{\partial p_r} + \frac{\partial x_s}{\partial M} \cdot x_r$$ a následně porovnáním se vztahem

(6.22) $$\frac{\partial x_s}{\partial p_r} = -x_r \cdot \frac{\partial x_s}{\partial M} + X_{rs}$$ dostáváme rovnost $$\frac{dx_s}{dp_r} = X_{rs} \,.$$

Znamená to tedy, že člen X_{rs} lze interpretovat jako kompenzovanou změnu poptávky po s-té komoditě při změně ceny r-té komodity. Na znaménku faktoru X_{rs} tedy závisí, zda:

a) při zvýšení ceny r-té komodity se zvýší poptávka po s-té komoditě, tzn.
 jestliže $X_{rs} > 0$, potom komodity ζ_r a ζ_s jsou v substitučním vztahu.

b) při zvýšení ceny r-té komodity se sníží poptávka po s-té komoditě, tzn.
 jestliže $X_{rs} < 0$, potom komodity ζ_r a ζ_s jsou v komplementárním vztahu.

Připomeňme, že substituční efekt lze charakterizovat jako výsledek změny vzájemného poměru cen a z této změny vyplývající substituce komodit ve spotřebě (při jinak stejném výsledném užitku dá spotřebitel přednost nákupu většího množství té komodity, která relativně zlevnila).

Dále uvedeme několik tvrzení, která vyplývají z předchozích závěrů:

Tvrzení 6.2 ***Substituční vztah mezi dvěma komoditami je vždy symetrický.***

Ověření Jelikož U je symetrická matice, platí v důsledku toho $u_{rs} = u_{sr}$ a tedy také symetrie determinantů $U_{rs} = U_{sr}$, z čehož následně plyne $X_{rs} = X_{sr}$. □.

Dále uvedeme několik tvrzení, která vyplývají z předchozích závěrů:

Tvrzení 6.3 Obecně platí, že „symetrický“ ***faktor $X_{rr} < 0$ pro všechna $r = 1,2,\ldots,n$.***

Ověření Vrátíme se k Hicksovým podmínkám stability, konkrétně ke vztahu (6.15).

Z nerovnosti $\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{|U_{rs}|}{|U|}\xi_r\xi_s < 0$ plyne $\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{|U_{rs}|}{|U|}\xi_r\xi_s < 0$ (při $\lambda > 0$) a dále tedy

$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} X_{rs}\xi_r\xi_s < 0$. Stačí proto vzít $\xi_r = \xi_s$ pro jedno pevné $r^* = s^*$ a zvolit ostatní $\xi_t = 0$ pro $t \neq r \neq s$. Celý řetězec sumací se tak redukuje na jediný člen X_{rr}, ξ_r^2, z čehož zřejmě plyne relace $X_{rr} < 0$. □.

Poznámka 6.2 ***Pro kompenzovaný růst ceny*** tj. růst provázený adekvátním růstem důchodu platí, že ***je přímý účinek cenové změny záporný***, tj.

(6.23) $\frac{dx_r}{dp_r} = X_{rr} < 0$ tzn. poptávka po ζ_r klesá, roste-li cena p_r tohoto zboží.

Ověření Vztah (6.23) okamžitě plyne z (6.22), volíme-li shodně indexy $r = s$. □.

Tvrzení 6.4 Obecně ***platí, že***

(6.24) $$\sum_{s=1}^{n} X_{rs}\cdot p_s = 0 \quad \textbf{\textit{pro všechna}}\ r = 1,2,\ldots,n.$$

Ověření Levou stranu vyjádříme postupně dosazením za X_{rs} a náhradou p_s z podmínky rovnováhy

Dostaneme $$\sum_{s=1}^{n} X_{rs}\cdot p_s = \sum_{s=1}^{n} \lambda\cdot\frac{|U_{rs}|}{|U|}\cdot\frac{u_s}{\lambda} = \frac{1}{|U|}\sum_{s=1}^{n} u_s |U_{rs}|.$$

Výraz má nulovou hodnotu z toho důvodu, že $\sum_{s=1}^{n} u_s \cdot |U_{rs}|$ vyjadřuje násobení prvků u_s obsažených v prvém řádku matice U (nevlastními) algebraickými doplňky $(r+1)$-řádku stejné matice. Jak je z teorie matic známo, takovýto součet je vždy nulový. □.

Důsledek 6.1 Z tvrzení **6.4** bezprostředně vyplývá jedno omezení pro charakter komodit v úplném (uzavřeném) komoditním systému: ***V úplném komoditním systému nemohou být všechny statky komplementární.***

Ověření: Levou stranu (6.24) rozepíšeme následovně

(6.24a) $$\sum_{s=1}^{n} X_{rs}\cdot p_s = \sum_{s=1, s\neq r}^{n} X_{rs}\cdot p_s + X_{rr}\cdot p_r = 0 \quad \text{pro všechna } r = 1,2,\ldots,n.$$

a následně vyjádříme jako

(6.24a) $$\sum_{s=1\ s\neq r}^{n} X_{rs}\cdot p_s = -X_{rr}\cdot p_r$$

Nyní je zřejmé, že při zápornosti členu X_{rr} a kladnosti ceny p_r musí být pravá strana (6.24a) kladná. To ovšem vylučuje, aby (při kladnosti ostatních cen) byly všechny členy X_{rs} na levé straně záporné. □.

Příklad 1 Ilustrujme předchozí *Tvrzení 6.4* na situaci se 2 a 3 statky:

V případě 2 statků zřejmě máme: $p_1 X_{11} + p_2 X_{12} = 0$ a odtud $X_{12} = -p_1/p_2 \, X_{11}$, což při kladných cenách a záporné hodnotě substitučního členu X_{11} vede ke kladnému členu X_{12} a tedy **substitučnímu vztahu obou statků**. Stejný závěr získáme z podmínky $p_1 X_{21} + p_2 X_{22} = 0$ a zápornosti X_{22}, kde zřejmě $X_{21} = -p_2/p_1 \, X_{22}$.

Případ 3 komodit nabízí poněkud pestřejší možnosti:

Napišme trojici podmínek (6.24) z *Tvrzení 6.4*:

(6.24A) $$p_1 X_{11} + p_2 X_{12} + p_3 X_{13} = 0$$

(6.24B) $$p_1 X_{21} + p_2 X_{22} + p_3 X_{23} = 0$$

(6.24C) $$p_1 X_{31} + p_2 X_{32} + p_3 X_{33} = 0$$

Z Tvrzení 3 přitom plyne, že $X_{11} < 0, X_{22} < 0, X_{33} < 0$ a podobně z *Tvrzení 2* vyplývá, že $X_{12} = X_{21}, X_{13} = X_{31}, X_{23} = X_{32}$.

Nyní je zřejmé, že z podmínky (6.24A) vyplývá, že aspoň jeden z členů X_{12}, X_{13} musí být kladný, dále z podmínky (6.24B) vyplývá, že aspoň jeden z členů X_{12}, X_{23} musí být kladný a obdobně z podmínky (6.24C) vyplývá, že aspoň jeden z členů X_{13}, X_{23} musí být kladný.

Znamená to, že **přípustné jsou pouze 4 následující možnosti**:

$X_{12} < 0, X_{13} > 0, X_{23} > 0$ **3.statek je vůči 1. a 2. substitutem, 1. a 2. statek jsou komplementy.**

$X_{12} > 0, X_{13} < 0, X_{23} > 0$ **2.statek je vůči 1. a 3. substitutem, 1. a 3. statek jsou komplementy.**

$X_{12} > 0, X_{13} > 0, X_{23} < 0$ **1.statek je vůči 2. a 3. substitutem, 2. a 3. statek jsou komplementy.**

$X_{12} > 0, X_{13} > 0, X_{23} > 0$ tj. **všechny tři statky jsou vzájemně substituční**.

Podmínky (6.24A,B,C) tedy vylučují nejen možnost „vzájemné komplementarity" všech tří statků, ale též eventualitu existence pouze jedné substituční komodity v trojici (substituční vztah je zřejmě vždy vztah dvoustranný).

Poznámka 6.2 **Nekompenzovaný růst ceny** (tzn. není-li změna ceny p_r provázena úměrnou změnou důchodu) **nemusí nutně vést k poklesu poptávky po „vlastní“ komoditě**. Platí totiž

$$\frac{\partial x_r}{\partial p_r} = x_r \cdot \left(- \frac{\partial x_r}{\partial I} \right) + K_{rr} . \tag{6.25}$$

Zatímco druhý výraz na pravé straně je vždy záporný (viz *Tvrzení 6.3*), nelze totéž jednoznačně říci o prvním členu. Pokud je r-tá komodita standardní, je výraz $\frac{\partial x_r}{\partial I}$ kladný, a tedy $\frac{\partial x_r}{\partial p_r}$ je záporná. Pokud však je r-tá komodita inferiorní, pak je hodnota $\frac{\partial x_r}{\partial I}$ záporná a v závislosti na velikosti x může v absolutní hodnotě převýšit druhý člen. Za jistých okolností tedy může platit $\frac{\partial x_r}{\partial p_r} > 0$, což znamená, že s růstem ceny by poptávka po r-té (inferiorní) komoditě rovněž rostla.

Konvence 6.3

Jestliže pro některou komoditu v souboru ***platí nerovnost*** $\frac{\partial x_r}{\partial p_r} > 0$, pak takovou komoditu ***budeme nazývat Giffenovou komoditou (Giffenovým statkem)***.

Uvedený úkaz (zápornost levé strany (6.25)) je již dlouhou dobu znám jako ***Giffenův paradox (efekt)***. Stoupne-li cena inferiorního zboží, je možné, že se tohoto zboží bude nakupovat (zejména v nízkých příjmových skupinách) více, nikoliv dle očekávání méně. U inferiorního zboží, kde zvýšení příjmu znamená pokles poptávky a u něhož je úroveň spotřeby relativně vysoká (chléb, základní potraviny, levné ošacení), znamená zdražení (bez možnosti substituce, tj. přechodu na jiný statek) případně i růst poptávky. Jev indikoval poprvé anglický ekonom a statistik **Robert Giffen [1837-1910]** sledováním vývoje poptávky po chlebu při hladomoru v Irsku.[7]

Důsledek 6.2 vyplývající ze Sluckého rovnice, podle níž platí

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r} = - x_r \cdot \frac{\partial x_s}{\partial I} + K_{rs} \quad \text{pro libovolná} \quad r,s = 1,2,\ldots,n . \tag{6.18}$$

Vyjádříme-li tuto rovnici pomocí elasticit (čehož dosáhneme vynásobením podílem p_r / x_s), dostaneme

---

[7] Uvědomme si, že v situacích (viděno očima středoevropana z počátku 21. století) spíše již historických, kdy se zvýší cena základním statků (např. chleba či brambor), aniž mají spotřebitelé možnost přesunout své nákupy na substituční statky (které buď nejsou vůbec dostupné, nebo jejichž ceny rovněž vzrostly), omezí spotřebitelé (přinejmenším krátkodobě) přednostně spotřebu všech ostatních statků (ne nutně potřebných k užití v nouzové situaci). V těchto (až třeba kritických pro samotné přežití) situacích nedochází ke kompenzaci takto zvýšené ceny inferiorního statku růstem příjmů (ty zůstávají beze změny nebo dokonce klesají), takže předpoklad (6.19) není udržitelný.

(6.26) $\dfrac{\partial x_s}{x_s}\dfrac{p_r}{\partial p_r} = -p_r x_r \cdot \dfrac{\partial x_s}{x_s} \cdot \dfrac{1}{\partial M} + \dfrac{p_r}{x_s} X_{rs}$ pro libovolná $r,s = 1,2,....,n$,

který dále úpravou pravé strany převedeme na

(6.27A) $\dfrac{\partial x_s}{x_s}\dfrac{p_r}{\partial p_r} = -\dfrac{p_r x_r}{M} \cdot \dfrac{\partial x_s}{x_s} \cdot \dfrac{M}{\partial M} + \dfrac{p_r}{x_s} X_{rs}$ pro libovolná $r,s = 1,2,....,n$.

Interpretujme nyní jednotlivé členy: ***na levé straně rovnice máme křížovou pružnost poptávky po s-tém statku při změně ceny r-tého statku***, ***napravo máme*** součet dvou členů: jednak ***součin***u ***záporně vzaté výdajové účasti r-tého statku*** $p_r x_r / M$, jednak ***příjmové pružnosti poptávky po s-tém statku a součinu*** p_r / x_s ***a substitučního členu*** X_{rs} .

Pokud tento vztah napíšeme pro $r = s$, dostaneme

(6.27B) $\dfrac{\partial x_r}{x_r}\dfrac{p_r}{\partial p_r} = -\dfrac{p_r x_r}{M} \cdot \left(\dfrac{\partial x_r}{x_r} \cdot \dfrac{M}{\partial M}\right) + \dfrac{p_r}{x_r} X_{rr}$ pro libovolná $r = 1,2,....,n$.

S ohledem na zápornost členu X_{rr} a záporné znaménko před (kladnou) výdajovou účastí odtud plyne, že **v případě kladné příjmové pružnosti poptávky** je pravá strana výrazu záporná a ***Giffenův paradox*** **se uplatnit nemůže** (zřejmě bude cenová pružnost poptávky po vlastní komoditě vždy záporná).

Alfred Marshall komentuje Giffenův úkaz ve svém díle **Principles of Economics [1895]** takto:

„As Mr.Giffen has pointed out, a rise in the price of bread makes so large a drain on the resources of the poorer labouring families and raise so much the marginal utility of money to them that they are forced to curtail their consumption of meat and the more expensive farinaceous foods“ and, bread being still the cheapest food which they can get and will take, they consume more, and not less of it”.

Robert Giffen byl. mj. předsedou britské statistické společnosti v letech [1882-1884].

Za zmínku možná stojí , že **Robert Jensen a Nolan Miller [2002]** vyslovili v textu ***Giffen Behavior: Theory and Evidence. KSG Faculty Research Working Papers Series RWP02-014, 2002***, domněnku (ne však asi zcela exaktně experimentálně podloženou), že za Giffenův statek lze pokládat v určitých částech Číny stále ještě *rýži* a *nudle.*