Řešené příklady

1. Firma Karkulka, s.r.o šije červené čepečky. Produkční funkce firmy má tvar $Q = 41.L + 20.L^2 - (1/3).L^3$. Kde L jsou hodiny práce za den.

a) Určete, kolik firma ušije denně čepečků, pokud najme 6 hodin práce
b) Zapište mezní a průměrný produkt práce
c) Určete, při jakém objemu zapojené práce je mezní, průměrný a celkový produkt maximální
d) Určete, kolik hodin práce denně bude firma pravděpodobně najímat (ekonomické pole výroby)

a) Do produkční funkce firmy dosadíme počet jednotek práce, pro něž máme určit dosazený objem produkce

$Q = 41.L + 20.L^2 - (1/3).L^3 \quad \rightarrow L=6$
$Q = 41.6 + 20.6^2 - (1/3).6^3 = 246 + 720 - 72 = \underline{894\ ks}$

Firma při zapojení 6 hodin práce vyrobí 894 ks čepečků denně

b)
Mezní produkt dostaneme jako derivaci produkční funkce
$MP_L = \partial TP/\partial L$
$MP_L = \partial(41.L + 20.L^2 - (1/3).L^3)/\partial L = \underline{41+40.L - L^2}$

Průměrný produkt dostaneme tak, že produkční funkci podělíme L

$AP_L = TP/L$
$AP_L = (41.L + 20.L^2 - (1/3).L^3)/L = \underline{41+20.L - (1/3).L^2}$

c)
Mezní produkt je maximální tehdy, je-li směrnice tečny funkce mezního produktu rovna nule. První derivaci funkce mezního produktu položíme rovnu nule

$\partial MP_L/\partial L = 0$
$MP_L = 41+40.L - L^2$
$\partial(41+40.L - L^2)/\partial L = 0$
$40 - 2L = 0$
$\underline{L = 20}$

Mezní produkt je maximální při zapojených 20 jednotkách práce.

Průměrný produkt je maximální tehdy, je-li směrnice tečny funkce průměrného produktu rovna nule. První derivaci funkce průměrného produktu položíme rovnu nule. Nebo můžeme postupovat tak, že mezní produkt práce položíme rovno průměrnému a řešíme rovnici. Zde je ukázán první z postupů

$\partial AP_L/\partial L = 0$
$AP_L = 41+20.L - (1/3).L^2$
$\partial(41+20.L - (1/3).L^2)/\partial L = 0$

$20 – (2/3).L = 0$
$\underline{L = 30}$

Průměrný produkt je maximální při zapojených 30 jednotkách práce.

Maximum celkového produktu zjistíme tak, že mezní produkt práce položíme rovno nule (je derivací celkového produktu)

$MP_L = 0$
$MP_L = 41+40.L – L^2$
$41+40.L – L^2 = 0$
$– L^2+40.L + 41= 0$

Hledáme kořeny kvadratické rovnice
$L = \dfrac{-40 \pm\sqrt{(1600 +164)}}{- 2}$
$L_1 = \underline{41}$ *...zajímá nás vyšší kořen*
$L_2 = -1$

Celkový produkt je maximální při zapojení 41 jednotek práce.
1d) Ekonomické pole výroby je množství práce od maxima průměrného produktu do situace, kdy je mezní produkt roven nule (celkový produkt je maximální).

Předešlým výpočtem jsme zjistili, že AP_L je maximální při zapojení 30 jednotek práce a celkový produkt je maximální při zapojení 41 jednotek. Ekonomické pole výroby je v rozmezí 30 a 41 jednotek práce.

2. Bábinka provozuje pekařství. Peče výborné tvarohové mini koláčky, které jsou oblíbené v celém okolí. Produkční funkce Bábinčina pekařství má tvar $Q =(1/1000).K^3.L^2$. Hodinu práce Bábinka najímá za 2 penízky a hodina práce stroje ji stojí 1 penízek.

a) Kolik najme Bábinka hodin práce a kolik kapitálu, pokud chce upéct 2700 koláčků?
b) Jaká bude výše nákladů na tento objem produkce?

a) V nákladovém optimu Bábinky platí: MRTS =-w/r, zároveň chce bábinka upéct 2700 koláčků. Dosadíme hodnotu do produkční funkce a řešíme soustavu rovnic

$MRTS = -w/r,$
$\underline{Q =(1/1000).K^3.L^2}$

Nyní si doplníme dle zadání první rovnici

$MRTS =- MP_L/MP_K$, *kde*
$MP_L = \partial TP/\partial L$
$MP_K =\partial TP/\partial K$

Celkový produkt je vyjádřeno produkční funkcí $Q =(1/1000).K^3.L^2$, tuto funkci parciálně derivujeme podle práce a potom podle kapitálu

$MP_L = \partial TP/\partial L = \partial[(1/1000).K^3.L^2]/ \partial L =(2/1000).K^3.L$
$MP_K =\partial TP/\partial K= \partial[(1/1000).K^3.L^2]/ \partial K =(3/1000).K^2.L^2$

MRTS =- [(2/1000).K^3.L] /[(3/1000).K^2.L^2] =- 2.K/3.L
MRTS =- w/r
2.K/3.L = 2/1

Nyní dosadíme do druhé rovnice ze soustavy rovnic. Bábinka chce vyrobit 2700 ks koláčků. Dosadíme hodnotu do produkční funkce

Q =(1/1000).K^3.L^2.
2700 = (1/1000).K^3.L^2

Nyní řešíme soustavu rovnic

2.K/3.L = 2/1
2700 = (1/1000).K^3.L^2
2.K/3.L = 2/1 / .(3L)
2K=6.L
K=3.L

2700 = (1/1000).$(3.L)^3$.L^2
2700 = 0,027.L^5
100000 = L^5
L =10

K = 3.L = 30

Bábinka potřebuje najmout 10 hodin práce a 30 hodin práce stroje

b) Výši nákladů vypočítáme tak, že sečteme náklady na práci a kapitál

TC = w.L + r.K
TC = 2.10 + 1.30 = 50

Celkové náklady na výrobu 2700 koláčků činí 50 penízků

3. Firma Vlk, s.r.o šije bílé čepečky. Nákladová funkce firmy má tvar TC = 100 + 200.Q - 20.Q^2 + (1/3).Q^3. Kde Q je počet čepečků.

a) Jedná se o krátkodobou či dlouhodobou nákladovou funkci
b) Určete náklady firmy na výrobu 10 čepečků
c) Zapište funkce fixních, variabilních, mezních, průměrných variabilních, průměrných fixních a průměrných nákladů, pokud existují.
d) Určete, při jakém objemu produkce je mezní náklad a průměrný variabilní náklad minimální

a) Jedná se o krátkodobou nákladovou funkci. V nákladové funkci vidíme, že část nákladů je zcela nezávislá na objemu produkce. I když firma nevyrábí (Q=0), musí hradit náklady ve výši 100 peněžních jednotek.

b) Do nákladové funkce firmy dosadíme počet kusů čepečků, pro který náklady zjišťujeme
TC = 100 + 200.Q - 20.Q^2 + (1/3).Q^3 → Q=10

$TC = 100 + 200.10 - 20.10^2 + (1/3).10^3 =$ <u>433,3 peněžních jednotek</u>

10 kusů produkce firma vyrobí s náklady 433,3 peněžních jednotek.

c)
Fixní náklady jsou tou částí nákladů, která je nezávislá na objemu produkce
$FC = \underline{100}$

Variabilní náklady jsou částí nákladů závislou na objemu produkce
$VC = \underline{200.Q - 20.Q^2 + (1/3).Q^3}$

Mezní náklady dostaneme jako derivaci nákladové funkce
$MC = \partial TC/\partial Q$
$MC = \partial(100 + 200.Q - 20.Q^2 + (1/3).Q^3)/\partial Q = 200 – 40Q + Q^2$

Průměrné variabilní náklady dostaneme tak, že variabilní náklady podělíme Q
$AVC = VC/Q$
$AVC = (200.Q - 20.Q^2 + (1/3).Q^3)/L = \underline{200 - 20.Q + (1/3).Q^2}$

Průměrné fixní náklady získáme tak, že fixní náklady podělíme Q
$AFC = FC/Q$
$AFC = 100/Q$

Průměrné náklady získáme tak, že celkové náklady podělíme Q
$AC = TC/Q$
$AC = (100 + 200.Q - 20.Q^2 + (1/3).Q^3)/L = \underline{(100/Q) + 200 – 20.Q + (1/3).Q^2}$

d)
Mezní náklady jsou minimální tehdy, je-li směrnice tečny funkce mezních nákladů rovna nule. První derivaci funkce mezních nákladů položíme rovnu nule

$\partial MC/\partial Q = 0$
$MC = 200 – 40Q + Q^2$
$\partial(200 – 40Q + Q^2)/\partial Q = 0$
$40 – 2.Q = 0$
$\underline{Q = 20}$

Mezní náklady jsou minimální při výrobě 20 čepečků.

Průměrný variabilní náklad je minimální tehdy, je-li směrnice tečny funkce průměrného variabilního nákladu rovna nule. První derivaci funkce průměrného variabilního nákladu položíme rovnu nule. Nebo můžeme postupovat tak, že mezní náklad položíme rovno průměrnému variabilnímu a řešíme rovnici. Zde je ukázán první z postupů

$\partial AVC/\partial Q = 0$
$AVC = 200 - 20.Q + (1/3).Q^2$
$\partial(200 - 20.Q + (1/3).Q^2)/\partial Q = 0$
$20 – (2/3).Q = 0$
$\underline{Q = 30}$

Průměrný variabilní náklad je minimální při výrobě 30 čepečků.

4. Denní poptávky po produkci pekařské firmy malého městečka je dána rovnicí Q= 100-10P.

a) Odvoďte rovnici celkového, mezního a průměrného příjmu firmy
b) Určete výši celkového příjmu při objemu produkce 100ks
c) Jaké množství pečiva a za jakou cenu byste doporučovali pekaři prodat v případě, že potřebuje v daný den získat z prodeje co nejvíce korun? Jaký bude její celkový příjem?
d) Určete pro kolik kusů pečiva je poptávka jednotkově elastická

a) Celkový příjem můžeme zapsat takto

$TR = P.Q$

Za cenu poptávku vyjádřenou ve tvaru P =…

$Q= 100-10P \rightarrow P = (100 – Q)/10$

$TR = [(100 – Q)/10].Q = \underline{10.Q – (1/10).Q^2}$

Mezní příjem je derivací celkového příjmu

$MR= \partial TR/\partial Q$

$MR= \partial[10.Q – (1/10).Q^2]/\partial Q = \underline{10 – (2/10).Q}$

Průměrný příjem dostaneme, pokud celkový příjem podělíme objemem produkce

$AR= TR/Q$

$AR= [10.Q – (1/10).Q^2]/Q = \underline{10 – (1/10).Q}$

b) Dosadíme do funkce celkového příjmu za Q hodnotu 100

$TR (100)= 10.Q – (1/10).Q^2 = 10.100 – (1/10).100^2 = 1000 – 1000= \underline{0}$

c) Pokud je celkový příjem maximální, je mezní příjem roven nule

$MR = 0$

$10 – (2/10).Q = 0$

$\underline{Q = 50}$

Hodnotu dosadíme do funkce celkového příjmu

$TR(50) = 10.Q – (1/10).Q^2 = 10.50 – (1/10).50^2 = \underline{250}$

Pokud bude chtít pekař maximalizovat celkový příjem, musí napéct 50 bochníků, celkový příjem bude dosahovat 250 peněžních jednotek.

d) Poptávka je jednotkově elastická, pokud je elasticita poptávky rovna -1

$$e_{PD} = \frac{\partial Q/Q}{\partial P/P} = - 1$$

Elasticitu poptávky můžeme zapsat takto

$$e_{PD} = \frac{\partial Q/Q}{\partial P/P} = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q}$$ *…………Q je objem produkce*

Nyní dosadíme za Q a za P funkci poptávky a výraz položíme rovno - 1

$$e_{PD} = \frac{\partial(100 – 10.P)}{\partial P} \cdot \frac{(100-Q)/10}{Q} = (-100+Q)/Q$$

$(-100 + Q)/Q = -1$

Q = 50 ks
Poptávka je jednotkově elastická při prodeji 50 ks produkce

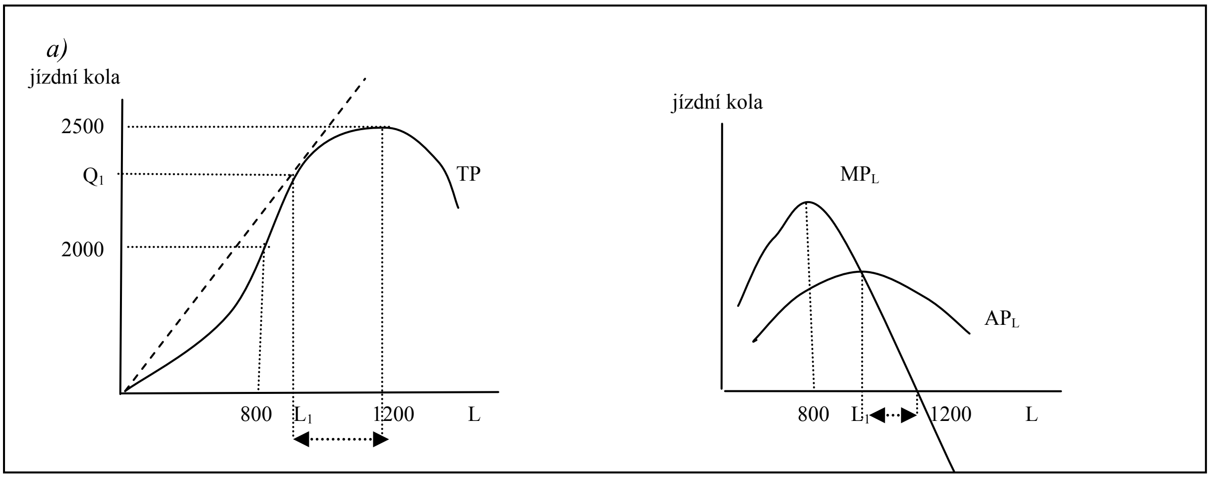
Příklady k procvičení

1. Firma Kovo vyrábí rámy na jízdní kola. Firma má velkou výrobní halu a dvě strojové linky

- Ve výrobě se nejdříve se projevují rostoucí výnosy z variabilního vstupu. Dodatečně zapojená hodina práce přispěje celkovému produktu stále více.
- Pokud firma najme 800 hodin práce – vyrobí 2 000 kol. Další najatá hodina práce přispěje již celkovému produktu méně než předchozí.
- Od najatých 1200 hodin práce začne celkový produkt klesat. S pomocí 1200 hodin práce firma vyrobí 2500 kol.

a) Zakreslete krátkodobou produkční funkci a graf průměrných a mezních veličin
b) Rozhodněte, kolik bude firma asi vyrábět

Řešení



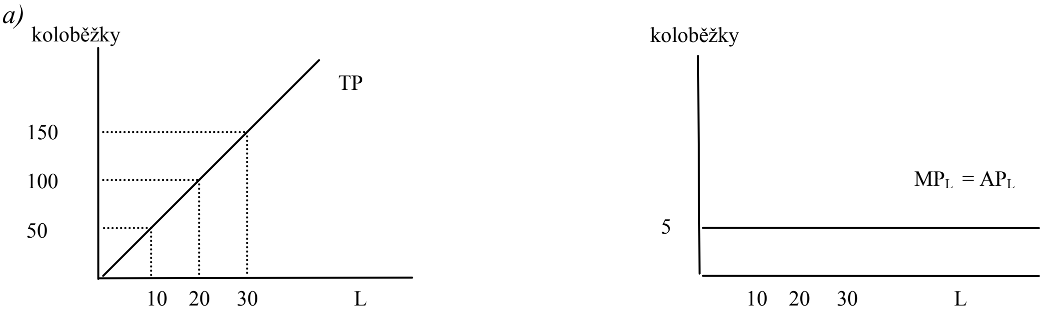
b) Firma bude vyrábět Q_1 – 2500 ks produkce. Jedná se o ekonomické pole výroby.

2. Firma Loto vyrábí koloběžky. Najme-li 10 pracovníků, celkový produkt bude 50. Pokud zaměstná 20 lidí – celkový produkt bude 100. atd. (předpokládejme normované pracovníky s 8 hodinovou pracovní dobou).

a) Zakreslete produkční funkci a mezní a průměrný produkt.
b) Zapište produkční funkci a určete výši mezního a průměrného produktu práce.
c) Jaké se ve výrobě projevují výnosy z variabilního vstupu?
d) Pokud by se ve výrobě projevovaly jen rostoucí výnosy z variabilního vstupu, jak by vypadala produkční funkce? Zakreslete.

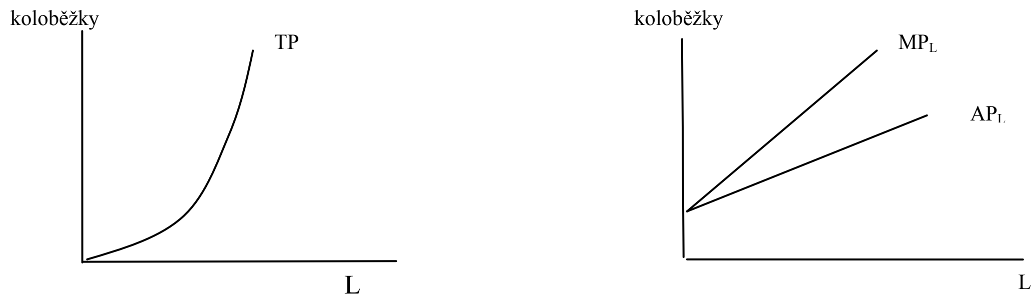
Řešení

a)



b) $Q = 5.L$, $MP_L = AP_L = 5$
c) konstantní

d)



3. Firma Leso vyrábí kolečkové brusle. Produkční funkce firmy má tvar $Q = 72L + 15\ L^2 - L^3$ (kde L jsou pracovníci s osmi hodinovou pracovní dobou).

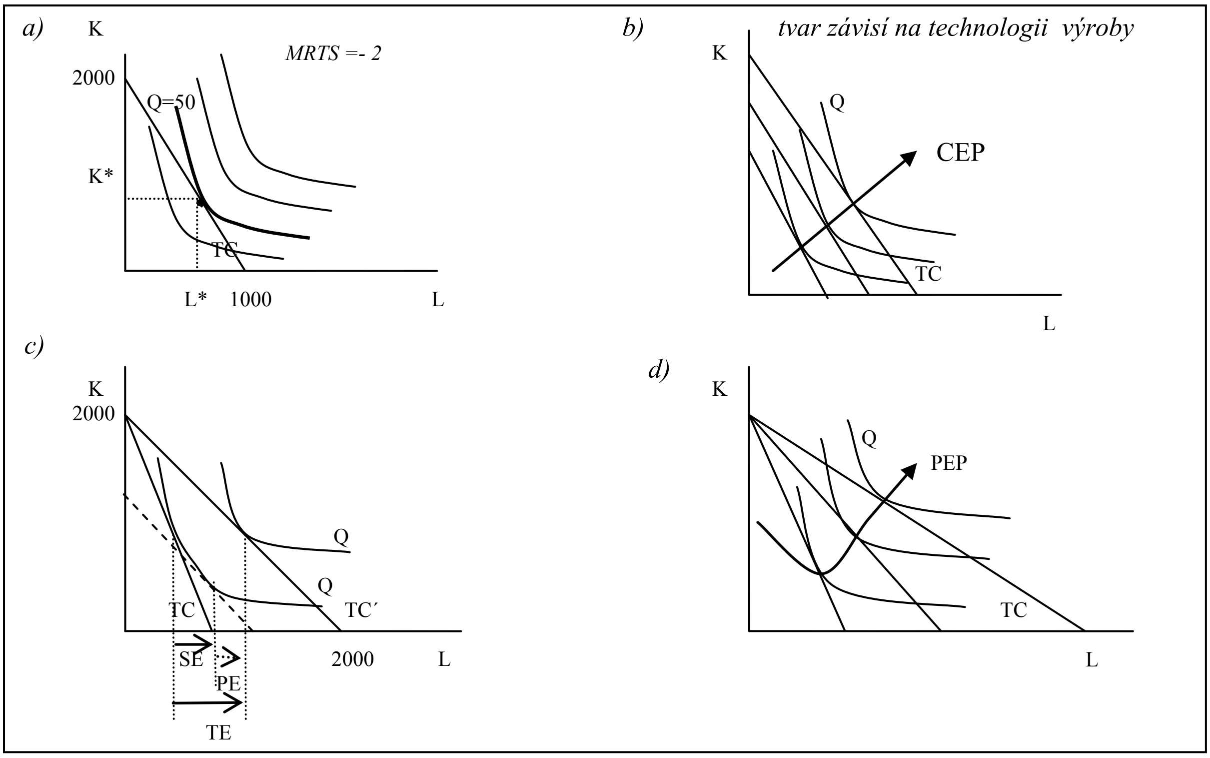
a) Napište funkci mezního a průměrného produktu práce
b) Vypočítejte hodnotu mezního produktu a průměrného produktu 7 najatých pracovníků.
c) Při kolika najatých pracovnících se začnou projevovat klesající výnosy z variabilního vstupu?
d) Při jakém objemu variabilního vstupu firma maximalizuje průměrný produkt práce?
e) Při jakém objemu najaté práce firma dosahuje maximálního výstupu?
f) Určete ekonomické pole výroby

Řešení
a) $MP_L = 72 + 30.L - 3.L^2$, $AP_L = 72 + 15.L - L^2$
b) $MP_L = 135$, $AP_L = 128$
c) $L = 5$
d) $L = 7{,}5$
e) $L = 12$
f) $L = 7{,}5$ až 12

4. Předpokládejme dlouhé období. Firma Leso najímá dva výrobní faktory, práci a kapitál. Hodina práce firmu stojí 100 Kč a hodina práce stroje 50 Kč. Výrobní faktory může vzájemně nahrazovat – k výrobě ovšem potřebuje oba.

a) Předpokládejme, že firma s náklady 100.000 vyrobila 50 ks produkce. Graficky znázorněte optimum firmy. Jaká je velikost mezní míry technické substituce v optimu?
b) Znázorněte nákladovou stezku expanze firmy. Na čem závisí její tvar?
c) Předpokládejme, že cena práce poklesla také na 50 Kč/h. Zakreslete. Rozložte celkový efekt cenové změny na substituční a produkční
d) Graficky odvoďte cenovou stezku expanze

Řešení



5. Určete, jaké se výrobě projevují výnosy z rozsahu
a) $Q = 2K + L$
b) $Q = 2.K.L$
c) $Q = K^{1/2}.L^{1/2}$

Řešení
a) konstantní
b) rostoucí
c) konstantní

6. Firma Cink vyrábí zvonky na jízdní kola. Produkční funkce má tvar Q = 2.K.L. Hodina práce stojí firmu 3 peněžní jednotky a hodina práce stroje 6 peněžních jednotek.

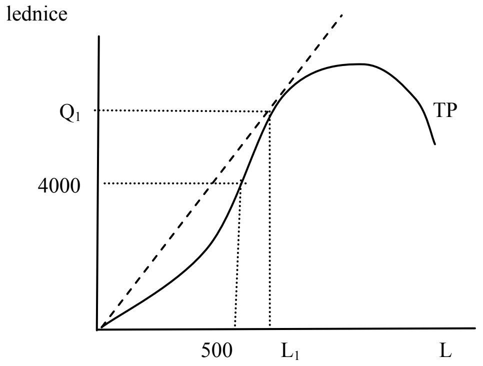
a) Vypočtěte minimální náklady při výrobě 900 kusů zvonků. Kolik práce a kapitálu firma najme?
b) Vycházejte z původního zadání. Kolik kusů produkce by firma vyráběla, pokud by do výroby chtěla vložit 90 peněžních jednotek?

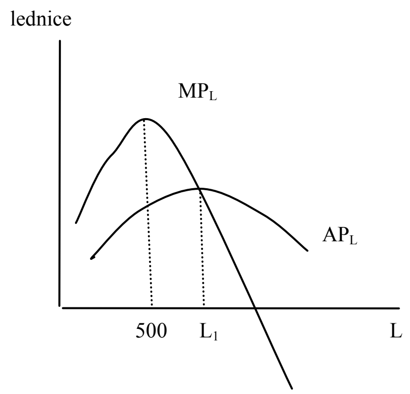
Řešení
a) L = 30, K = 15, TC = 180 peněžních jednotek
b) L = 15, K = 7,5, Q = 225

7. Firma Ledo se zabývá výrobou ledniček. I v případě, že firma nevyrábí, musí ročně hradit náklady ve výši 30 000 Kč.
- Pokud firma najme dodatečnou hodinu práce až do najatých 500 hodin práce denně, produkt vyrobený za dodatečnou hodinou práce roste.
- S 500 hodinami práce je firma schopna vyrobit 4 000 ledniček. Pokud firma zaměstná více hodin práce, budou se už přírůstky produkce snižovat.

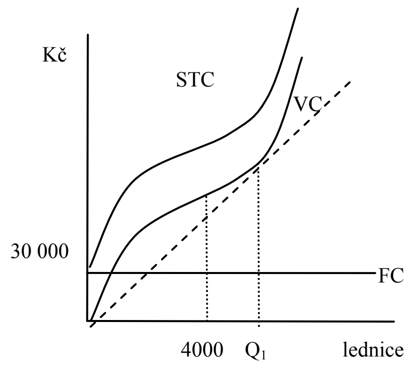
a) Zakreslete produkční funkci firmy a mezní a průměrný produkt
b) Naznačte nákladovou funkci firmy a mezní a průměrné náklady
c) Předpokládejme, že vzrostla cena kapitálu, vyznačte změnu v grafech.

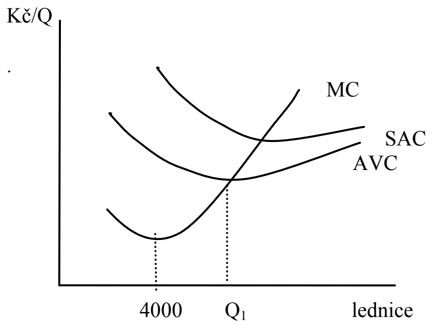
a)



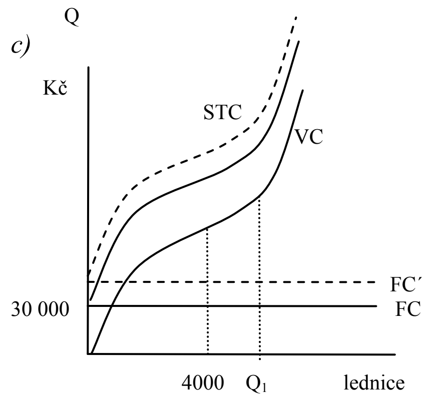


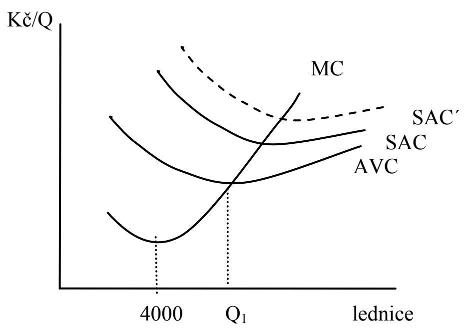
b)





c)





Produkční funkce se nezmění

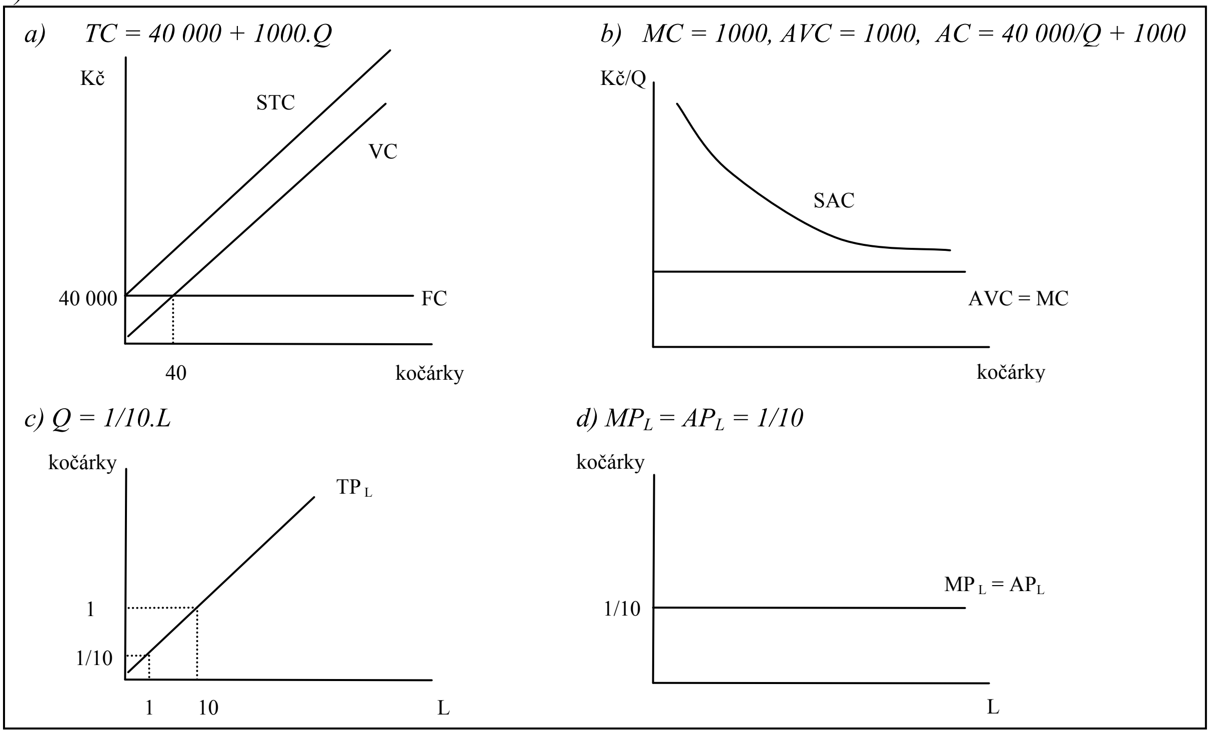
8. Firma vyrábí dětské kočárky. Měsíčně musí bez ohledu na objem výroby zaplatit 20 000 nájemné za budovy 10 000 pojištění a 10 000 opotřebení strojů. Každý dodatečně vyrobený kočárek zvedne náklady o 1 000 Kč.

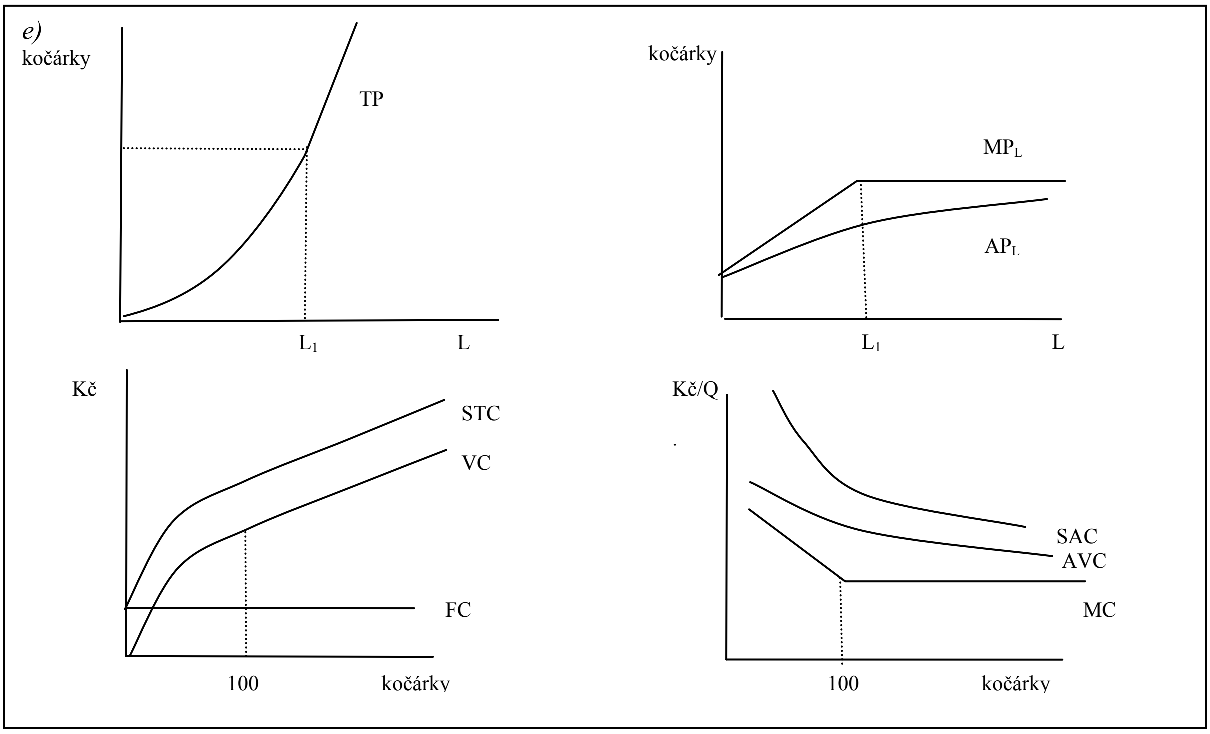
a) Zapište funkci celkových nákladů a zakreslete
b) Zapište funkci průměrných a mezních nákladů a zakreslete
c) Zapište produkční funkci a zakreslete za předpokladu, že mzda je 100 Kč/h (w = 100)
d) Zapište funkci mezního a průměrného produktu a zakreslete
e) Zakreslete produkční a nákladovou funkci této firmy (+ funkce mezních a průměrných veličin) za předpokladu, že se ve výrobě projevují nejdříve rostoucí a od výroby 100 ks produkce konstantní výnosy z variabilního vstupu.

Řešení

a) $TC = 40\,000 + 1000.Q$

b)





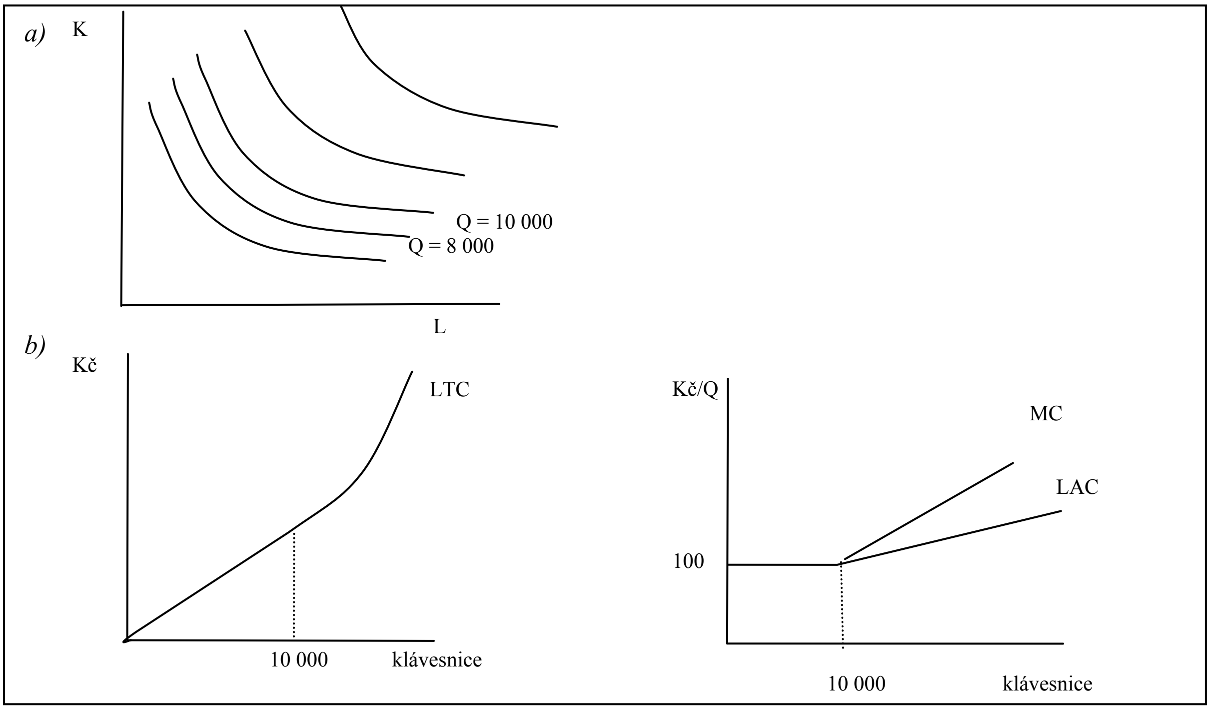
9. Firma Solar vyrábí solární panely. Její nákladová funkce má tvar TC = 100 000 + 20.Q-10.Q^2 + Q^3.

a) Zapište funkci fixních a variabilních celkových nákladů
b) Zapište funkci mezních a průměrných nákladů
c) Určete, při jakém objemu výroby bude firma vyrábět s minimálními průměrnými variabilními náklady.
d) Určete, od jakého objemu produkce se ve výrobě začnou projevovat klesající výnosy z variabilního vstupu
e) Určete, při jakém objemu výroby je průměrný produkt práce maximální

Řešení
a) *FC=100 000, VC = 20.Q-10.Q^2 + Q^3*
b) *MC = 20 – 20.Q + 3.Q^2, AC = (100 000/Q) + 20 – 10.Q + Q^2*
c) *Q = 5*
d) *Q = 3,33*
e) *Q= 5*

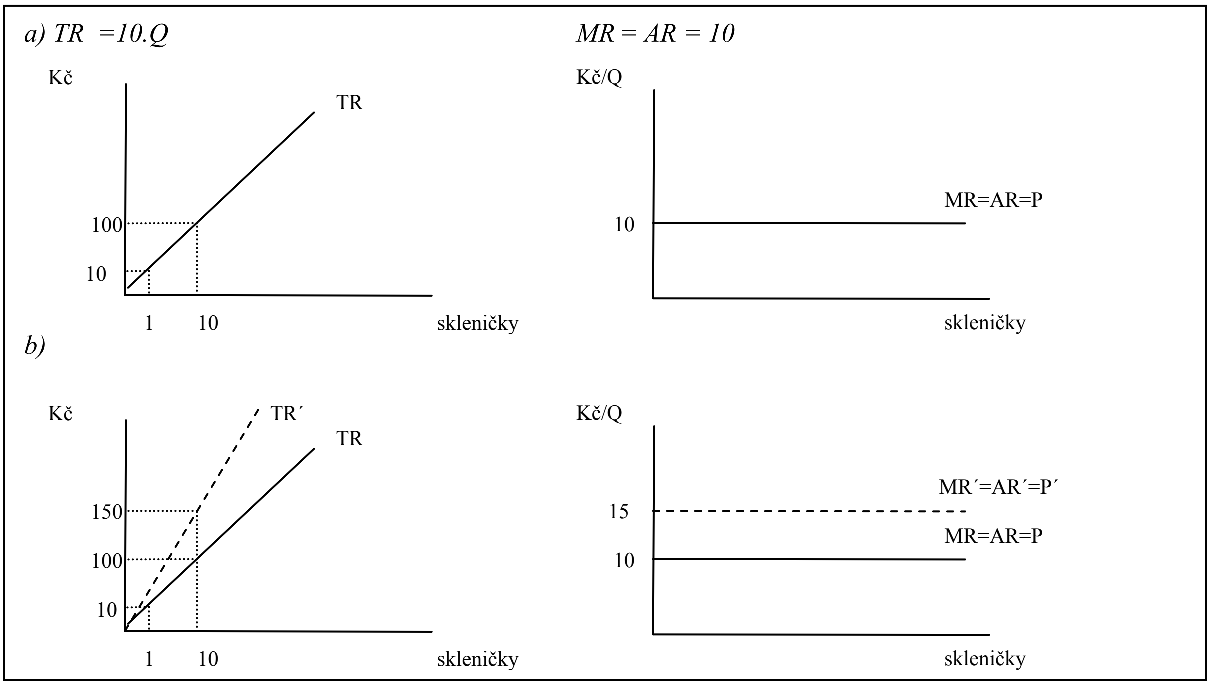
10. Firma vyrábí klávesnice. Pokud vyrobí měně než 10 000 klávesnic, projevují se ve výrobě konstantní výnosy z rozsahu a na každou vyrobenou klávesnici potřebuje 0,5 hodinu lidské práce a 1 hodinu práce stroje (hodina práce stojí 100 Kč a hodina práce stroje 50 Kč). Pokud vyrobí 10 000 klávesnic, jsou výnosy z rozsahu klesající.

a) Nakreslete produkční funkci firmy
b) Nakreslete funkci celkových a mezních a průměrných nákladů



11. Firma vyrábí skleničky. Každou skleničku může na trhu prodat za 10 Kč.
a) Zapište funkci celkového, mezního a průměrného příjmu firmy a zakreslete
b) Předpokládejme, že díky růstu poptávky vzrostla cena skleniček na trhu na 15 Kč. Zakreslete změnu do grafu.

Řešení



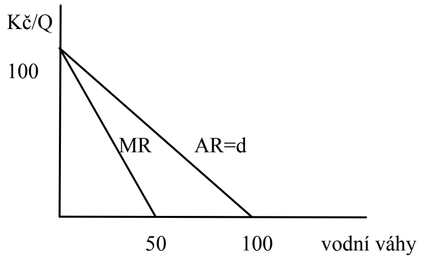
12. Firma VD je monopolním výrobcem speciálních vodních vah. Poptávku po vodováhách lze vyjádřit rovnicí P = 100 – Q

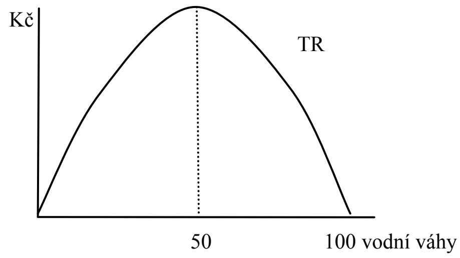
a) Zapište funkci celkového, mezního a průměrného příjmu firmy a zakreslete

b) Vypočítejte cenovou elasticitu poptávky a určete, pro kolik vah je poptávka cenově neelastická, jednotkově elastická a cenově elastická.
c) Vypočítejte výši cenové elasticity poptávky pro 25 vodních vah.
d) Jaké množství vodních vah musí firma vyrobit, pokud by chtěla v daný den maximalizovat celkový příjem?
e) Předpokládejme, že poptávky po vodováhách vzrostla na P = 120 – Q. Zakreslete změnu do grafu.

Řešení

a) $TR = 100.Q - Q^2$, $MR = 100 - 2.Q$, $AR = 100 - Q$





b) b) $e_{PD} = (-100 + Q)/Q$, jednotkově elastická pro 50 ks, elastická pro méně než 50 ks a neelastická pro více než 50 ks produkce

c) e_{PD} =- 3

d) Q=50

e)