Giniho formulace indexních čísel

Rozšířením techniky řetězení je postup, který pod názvem ***síťová metoda*** uplatnil italský matematik a ekonom **Carrado Gini**[1]. Opět se uvažuje **rozčlenění období mezi počátečním - „0“-*tým* - a koncovým - „m“-*tým* - obdobím na** celkem ***m*** **úseků**, v nichž jsou dostupné potřebné statistické údaje.

C. Gini formuloval (následně po něm nazvaná) indexní čísla následujících tvarů:

tzv. **GINIho indexní číslo 1. typu**

(G1)
$$P_{0m}^{G(1)} = \sqrt[m]{\prod^{N} \frac{\sum p(m) \cdot q(j)}{\sum p(0) \cdot q(j)}}\,,$$

tzv. **GINIho indexní číslo 2. typu**[2]

(G2)
$$P_{0m}^{G2}(\ ) = \sqrt[n]{\prod P_{0j} \cdot P_{jm}}\,,$$

přičemž ve druhém případě může symbol $P_{0m}^{G2}(\ )$ představovat libovolné jiné, z hlediska vlastností uspokojivé výchozí indexní číslo (definice $P_{0m}^{G2}(\ )$ tedy není jednoznačná).

Giniho konstrukty (G1), (G2) lze použít i pro data, která nemusí tvořit časové posloupnosti cen a kvantit. Určitou jejich slabinou je však okolnost, že při aktualizaci je nutný celkový přepočet indexního čísla v případě, kdy získáme statistická data za nová období (nebo individua či jiné statistické jednotky). Tato nevýhoda však nemusí být v praxi až tak citelná, neboť konstrukty byly autorem původně navrženy hlavně za účelem provádění prostorových (geografických) cenových srovnání.

Předností obou indexních čísel **(G1)**, **(G2)** je automatické splnění axiomu záměny období **(F3)** a dále skutečnost, že při velkém **m** (počtu dělení) se takto vytvořená veličina hodnotou zpravidla málo liší od hodnoty vzaté přímým výpočtem (bez dělení intervalu mezi „0“ a „m“).

poznámka ke (G1):

Všimněme si, že v případě **(G1)** (jde-li o cenové indexní číslo) stačí znát cenové vektory jen v počátečním "0" a koncovém "m" období, zatímco údaje o spotřebě komodit, které využíváme pro stanovení vah při geometrickém průměrování, je potřebné sledovat též ve všech meziobdobích $1, 2, \ldots, m$.

Jak je bezprostředně vidět z definičního vztahu **(G1)**, **volbou** $m = 1$ **dostáváme pro** $P_{01}^{G1}(\ )$ přímo **Fisherův cenový index**, zatímco pro $m = 2$ v případě $P_{02}^{G2}(\ )$ obdržíme obdobně prostý geometrický průměr obou částí P_{01} a P_{02} generujícího cenového indexního čísla.

[1] **Gini, C.: „On the Circular Test of Index Numbers“. Metron 1931.**

[2] **Ragnar Frisch nazývá tyto konstrukty *Gini' s aggregate crossing*, resp. *Gini´s two-point crossing*.**

Není obtížné ukázat, že **Giniho indexní čísla vyhovují Fisherovým postulátům (F1), (F3), (F5), (F6), (F7), (F8)** (v případě $P_{0n}^{(G)}$ je ovšem musí splňovat generující indexní číslo). Axiom záměny faktorů **(F2)** není splněn a axiom okružnosti **(F4)** platí jen za velmi speciálních podmínek (nikoliv obecně).

Stuvelova indexní čísla

Postup navržený v polovině 50. let 20. století nizozemský statistik **Gerhard Stuvel** se vrací ke klasickým přístupům z počátku století. Vyložíme jeho základní myšlenku[3]:

1) Hledá se dvojice indexních čísel (cenové P_{01}^{St}, kvantové Q_{01}^{St}) přímo splňující axiom záměny faktorů **(F2)**, tj. aby platilo

(S1)
$$P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} .$$

poznámka 1

Ke zkrácení zápisu užijeme úspornější označení výrazu na pravé straně jako $\frac{M(1)}{M(0)}$, přičemž peněžní výdaje $M(1) = \sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)$, resp. $M(0) = \sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)$, vyjadřují náklady na pořízení úplné skupiny komodit v běžném resp. základním období.[4]

2) Druhou podmínkou, kterou má hledaná dvojice splňovat, je diferenční relace, která poměřuje rozdíly mezi takto konstruovanými indexními čísly P_{01}^{St}, Q_{01}^{St} a příslušnými Laspeyresovými indexními čísly:

(S2)
$$\left(Q_{01}^{St} - Q_{01}^{L}\right) \sim \left(P_{01}^{St} - P_{01}^{L}\right) .$$

Ve vztahu **(S2)** uvažoval autor dva možné případy ve specifikaci relace "$\sim$":

(S2A): relace (S2) platí přesně, tj. "$\sim$" vezmeme jako rovnost,
(S2B): relace (S2) platí s určitou, přesně specifikovanou **odchylkou.**

poznámka 2

Uvedená úvaha je vcelku oprávněná, vezmeme-li v úvahu poznatky statistické praxe, kde zvláště pro krátká časová období ukazuje, že rozdíly $P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{L}$, ale i $P_{01}^{P} \cdot Q_{01}^{P}$ od hodnoty $M(1)/M(0)$ nejsou nijak velké. Jak víme, přesně tento požadavek nesplňuje Laspeyresovo ani Paascheho indexní číslo, avšak lze snadno ověřit, že tato indexní čísla jej „splňují“ křížovým způsobem tj.

$$P_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{P} = P_{01}^{P} \cdot Q_{01}^{L} = \frac{M(1)}{M(0)} .$$

Postup zaslouží komentář ještě z tohoto důvodu:

V okruhu původních 8 Fisherových tesů není známo, že by nějaká podskupina testů vedla deduktivně jednoznačně **ke konstrukci určitého typu indexu.** Stuvelova cesta, resp. formulace podmínky **(S2)** spolu s přijetím podmínky **(S1)** k takovému jednoznačnému určení vede (stačí právě tyto dvě podmínky, abychom konkrétní indexní konstrukt, jak uvidíme, obdrželi).

---

[3] **Stuvel, G. : A New Index Number Formula. *Econometrica 1957*, Vol. 25.**

Původní Stuvelův návrh

Z povahy úlohy je zřejmé, že se hledá řešení dvou rovnic (pro neznámé P_{01}^{St} a Q_{01}^{St})

(S1) $$P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{M(1)}{M(0)} ,$$

(S2A) $$Q_{01}^{St} - Q_{01} = P_{01}^{St} - P_{01} .$$

Za daných předpokladů bude předmětem Stuvelovy úlohy nalezení řešení dvou rovnic (jedné lineární, druhé kvadratické) s neznámými P_{01}^{St} a Q_{01}^{St}, které jsou vyjádřeny pomocí známých ostatních veličin, tj. $M(1), M(0), P_{01}, Q_{01}$.

K nalezení řešení užijeme např. substituci z **(S2A)** $Q_{01}^{St} = P_{01}^{St} - P_{01} + Q_{01}$, která po dosazení do **(S1)** dává kvadratickou rovnici s neznámou P_{01}^{St}:

$$\left(P_{01}^{St}\right)^2 - \left(P_{01} - Q_{01}\right) \cdot P_{01}^{St} - \frac{M(1)}{M(0)} = 0 .$$

Následně vypočteme symetrický vztah pro Q_{01}^{St}.

Řešení získané standardním postupem, tj. nalezením kořenů kvadratické rovnice, má tvar:

(St1) $$Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01} - P_{01}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01} - P_{01}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} ,$$

(St2) $$P_{01}^{St} = \frac{P_{01} - Q_{01}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01} - P_{01}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} .$$

__poznámka 3__ Vzhledem k tomu, že pro přijatelnou ekonomickou interpretaci mají smysl jen kladné hodnoty indexních čísel, je nutno se omezit jen na kladné kořeny kvadratické rovnice. (Výrazy v odmocninách **(St1)** a **(St1)** jsou větší než výrazy před odmocninami.)

Výrazy **(St1)** a **(St1)** můžeme zapsat formou, která bude obsahovat přímo vektory cen a množství $p(0), p(1), q(0), q(1)$ - obě indexní čísla obsahují plnou čtveřici. Dostaneme

$$Q_{01}^{St} = \frac{\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}\right)^2}{4} + \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}$$

$$= \frac{\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0) + \sqrt{\left(\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0)\right)^2 + 4\sum p_i(1)q_i(1)\sum p_i(0)q_i(0)}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

Podobně bychom získali

$$P_{01}^{St} = \frac{\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1) + \sqrt{\left(\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1)\right)^2 + 4\sum p_i(1)q_i(1)\sum p_i(0)q_i(0)}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

Modifikovaný Stuvelův návrh

Analogicky předchozímu se hledá řešení dvou vztahů (pro obecně jiné neznámé P_{01}^{S*}, Q_{01}^{S*})

(S1) $$P_{01}^{S*} \cdot Q_{01}^{S*} = \frac{M_1}{M_0},$$

(S2B) $$Q_{01}^{S*} - L_{01}^{Q} = P_{01}^{S*} - L_{01}^{P} + \Delta,$$

kde odchylka Δ má přesně specifikovaný tvar (interpretovatelný jako ***„míra nesplnění“ axiomu (F2) Laspeyresovými indexními čísly***):

(S2B) $$\Delta = L_{01}^{P} \cdot L_{01}^{Q} - \frac{M_1}{M_0}.$$

Obdobným způsobem jako dříve řešíme soustavu dvou rovnic, přičemž k řešení použijeme opět.substituci $Q_{01}^{S*} = P_{01}^{S*} - L_{01}^{P} + L_{01}^{Q} + \Delta$. Po dosazení Q_{01}^{S*} z **(S2B)** do **(S1)** máme

$$\left(P_{01}^{S*}\right)^2 - \left(L_{01}^{P} - L_{01}^{Q} - L_{01}^{P} \cdot L_{01}^{Q} + \frac{M_1}{M_0}\right) P_{01}^{S*} = \frac{M_1}{M_0}$$

a stejně jako dříve odvodíme jinou dvojici indexních čísel, která mají tvar:

(St3) $$P_{01}^{S*} = \frac{L_{01}^{P} - L_{01}^{Q}\left(1 + L_{01}^{P}\right) + \frac{M_1}{M_0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{L_{01}^{P} - L_{01}^{Q}\left(1 + L_{01}^{P}\right) + \frac{M_1}{M_0}}{2}\right)^2 + \frac{M_1}{M_0}}$$

(St4) $$Q_{01}^{S*} = \frac{L_{01}^{Q}\left(1 + L_{01}^{P}\right) - L_{01}^{P} - \frac{M_1}{M_0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{L_{01}^{Q}\left(1 + L_{01}^{P}\right) - L_{01}^{P} - \frac{M_1}{M_0}}{2}\right)^2 + \frac{M_1}{M_0}}$$

Obě nalezená indexní čísla mohou být rovněž použita k vystižení globální změny cenového a podobně i objemového komoditního indexu. Opět jsou přijatelné pouze kladné kořeny příslušné kvadratické rovnice.

poznámka 4 Jak je patrné, bylo by možné vyvodit i další indexní čísla, pokud bychom v podmínkách **(A)** resp. **(B1-B2)** uvažovali vztahy k jiným než k **Laspeyresovým indexním** číslům (např. k **Paascheho** či k **Edgeworthovým**).

Ověření Fisherových axiomů u Stuvelových čísel

Na závěr ještě vyšetříme, v jaké míře vyhovuje prvá **dvojice Stuvelových indexních čísel (S1)**, **(S2)** testům **Irvinga Fishera**:

Test identity **(F1)** je zřejmě splněn, neboť pro obě Laspeyresova indexní čísla platí, že $P_{00}^{L}=1$, $Q_{00}^{L}=1$ a výrazy pro P_{00}^{St}, Q_{00}^{St} se tedy redukují na odmocninu z podílu $\frac{M(1)}{M(0)}$, která je při ztotožnění obou období rovna 1.

Platnost **(F2)** je zřejmá, neboť jde přímo o definiční podmínku **(S1)**, z níž je dvojice hledaných indexů odvozována.

Axiom **(F3)** je u dvojice Stuvelových indexních čísel **(St1)**, **(St2)** splněn. Zmiňuje to mj. sám autor. Naše **ověření** je následující: Vyžaduje se platnost vztahu

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\left(\frac{P_{01}^{L}-Q_{01}^{L}}{2}+\sqrt{\left(\frac{P_{01}^{L}-Q_{01}^{L}}{2}\right)^{2}+\frac{M(1)}{M(0)}}\right)\cdot\left(\frac{P_{10}^{L}-Q_{10}^{L}}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q_{10}^{L}-P_{10}^{L}}{2}\right)^{2}+\frac{M(0)}{M(1)}}\right)=1$$

Pro přehlednost zápisu označíme čtveřici skalárních součinů přítomných výše jako

$$A=\sum_{i=1}^{N}p_i(0)q_i(0),\quad B=\sum_{i=1}^{N}p_i(1)q_i(0),\quad C=\sum_{i=1}^{N}p_i(0)q_i(1)\quad D=\sum_{i=1}^{n}p_i(1)q_i(1)$$

V této zkrácené symbolice můžeme psát

$$P_{01}^{L}=\frac{B}{A},\ Q_{01}^{L}=\frac{C}{A},\ P_{10}^{L}=\frac{C}{D},\ Q_{10}^{L}=\frac{B}{D},\ \frac{M(1)}{M(0)}=\frac{D}{A},\ \frac{M(0)}{M(1)}=\frac{A}{D}$$

Potom $$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\left(\frac{\frac{B}{A}-\frac{C}{A}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\frac{B}{A}-\frac{C}{A}}{2}\right)^{2}+\frac{D}{A}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{C}{D}-\frac{B}{D}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\frac{C}{D}-\frac{B}{D}}{2}\right)^{2}+\frac{A}{D}}\right)$$

Po úpravách $$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\left(\frac{B-C}{2A}+\sqrt{\left(\frac{B-C}{2A}\right)^{2}+\frac{D}{A}}\right)\cdot\left(\frac{C-B}{2D}+\sqrt{\left(\frac{C-B}{2D}\right)^{2}+\frac{A}{D}}\right)$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{2A}\left(B-C+\sqrt{(B-C)^{2}+4AD}\right)\cdot\frac{1}{2D}\left(C-B+\sqrt{(C-B)^{2}+4AD}\right)$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}\left((B-C)(C-B)+(C-B)\sqrt{(B-C)^{2}+4AD}+(B-C)\sqrt{(C-B)^{2}+4AD}+\sqrt{(B-C)^{2}\cdot(C-B)^{2}+16A^{2}D^{2}+(C-B)^{2}4AD+(B-C)^{2}\cdot4AD}\right)$$

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}\left(-(B-C)^{2}+(C-B)\sqrt{(B-C)^{2}+4AD}+(B-C)\sqrt{(C-B)^{2}+4AD}+\sqrt{\left(4AD+(B-C)^{2}\right)^{2}}\right)$$

Střední dva členy v závorce se navzájem vyruší,čtvrtý je odmocnina z kvadrátu, máme tedy

$$P_{01}^{St}P_{10}^{St}=\frac{1}{4AD}\left(-(B-C)^{2}+4AD+(B-C)^{2}\right)=\frac{4AD}{4AD}=1$$ □.

Okružnost **(F4)** není Stuvelovými indexními čísly **(St1)**, **(St2)** splněna, což lze ověřit přímým vyšetřením příslušné podmínky.

Naproti tomu axiomy určenosti **(F5)** a souměřitelnosti **(F6)** platí, neboť je splňují Laspeyresova indexní čísla v jejich definici, přičemž též výraz v odmocnině **(St1)** je vždy definován a není identicky nulový (dokonce i kdyby nastala náhodná shoda $P_{01}^{St} = Q_{01}^{St}$). Souměřitelnosti pak vyhovují všechny výrazy vystupující v definici **(St1)**.

Pokud jde o axiom proporcionality **(F7)**, zde zřejmě platí $P_{01}^{St} = c$, resp. $Q_{01}^{St} = d$ pro konstantu c splňující $p(1) = c\,p(0)$, resp. konstantu d splňující $q(1) = d\,q(0)$.

Platnost **(F8)** je zřejmá.

(F9) monotónnost: Znamená to ověřit platnost implikace: Jestliže platí $p_i(1) < p_i^*(1)$ pro všechna i, potom vždy platí $P_{01} < P_{01}^*$.

(St2)
$$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}\,.$$

Vyšetříme tedy chování jednotlivých výrazů vystupujících v **(St2)**: Protože změna cen běžného období se nijak nedotkne Laspeyresova množstevního indexu: $Q_{01}^L = Q_{01}^{*L}$, vyšetříme chování P_{01}^L a podílu $M(1)/M(0)$. V prvém případě za předpokladu premisy implikace platí $P_{01}^L < P_{01}^{*L}$, ve druhém podobně $\frac{M(1)}{M(0)} \leq \frac{M^*(1)}{M(0)}$, protože jmenovatele obou výrazů nedoznají žádných změn a v čitatelích ve skalárních součinech vystupují jen nezáporné veličiny. Zbývá tak vyšetřit chování členu pod odmocninou:

$$\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(0)}{2\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)}\right)^2$$,jehož čitatel bude změnou dotčen:

$$\left(\frac{Q_{01}^{*L} - P_{01}^{*L}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i^*(1)q_i(0)}{2\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)}\right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1) - p_i(1)q_i(0)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(1) - p_i^*(1)q_i(0)\right)^2$$

Zbývá tedy vyšetřit, zda platí

$$\sum_{i=1}^N \left(p_i(0)q_i(1)^2 - 2p_i(0)q_i(1)p_i(1)q_i(0) + p_i(1)q_i(0)^2\right) \leq$$
$$\sum_{i=1}^N \left(p_i(0)q_i(1)^2 - 2p_i(0)q_i(1)p_i^*(1)q_i(0) + p_i(1)^*q_i(0)^2\right).$$

Protože první člen je shodný na obou stranách a třetí na pravé straně je nejméně roven třetímu členu nalevo, zbývá vyšetřit, zda, resp. za jakých podmínek platí

$$\sum_{i=1}^{N} 2p_i(0)q_i(1)p_i(1)q_i(0) \le \sum_{i=1}^{N} 2p_i(0)q_i(1)p_i^*(1)q_i(0)$$ tj. $$-2\sum_{i=1}^{N} r_i p_i(1) \le -2\sum_{i=1}^{N} r_i p_i^*(1).$$

To ale neplatí nikdy, protože při nezáporných r_i a $p_i(1) < p_i^*(1)$ bude pravá strana více záporná než levá. *Není tedy zatím jasné, šetření bude pokračovat.*

(F10) Ověření **testu střední hodnoty** $\min_{i=1..N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \le P_{01}^{St} \le \max_{i=1..N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ bude obtížné:

Vyjádříme nejprve některé členy v **(St2)** následovně:

podíl $M(1)/M(0)$: $$\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{p_i(1)}{p_i(0)}\cdot\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$$, kde $$w_i = \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}$$

rozdíl $$\frac{P_{01}-Q_{01}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0) - \sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(1)}{2\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right)$$

$$\left(\frac{Q_{01}-P_{01}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)} = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} - \frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{p_i(1)}{p_i(0)}\cdot\frac{q_i(1)}{q_i(0)} =$$

Není tedy zatím jasné, šetření bude pokračovat.

(St2) $$P_{01}^{St} = \frac{P_{01}-Q_{01}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}-P_{01}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}.$$

(F11) test invariance vůči změnám v měřítkách splněn není.

Vyšetříme postupně, jak odolné jsou vůči uvažovaným změnám $p^*(0) = a\,p(0)$ a $p^*(1) = a\,p(1)$, $q^*(0) = b\,q(0)$ a $q^*(1) = c\,q(1)$ jednotlivé fragmenty vystupující v indexním čísle **(St1)** $$Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01}-P_{01}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{01}-Q_{01}}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}},$$

$$Q_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a\,p_i(0)c\,q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} a\,p_i(0)b\,q_i(0)} = \frac{c}{b}Q_{01},\quad P_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a\,p_i(1)b\,q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} a\,p_i(0)b\,q_i(0)} = P_{01}$$

$$\frac{M(1)}{M(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a\,p_i(1)c\,q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} a\,p_i(0)b\,q_i(0)} = \frac{c}{b}\frac{M(1)}{M(0)}$$

Dohromady tedy máme

$$Q_{01}^{L} - \tilde{P}_{1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) c q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) b q_i(0)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) b q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) b q_i(0)} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) c q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) b q_i(0)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) b q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) b q_i(0)} = \frac{c \sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(1) - b \sum_{i=1}^{N} p_i(1) q_i(0)}{b \sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)} = \frac{c}{b} Q_{01}^{L} - \tilde{P}_{1}^{L}$$

$$Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01}^{L} - \tilde{P}_{1}}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - \tilde{P}_{1}}{2}\right)^{2} + \frac{M(1)}{M(0)}} = \frac{\frac{c}{b} Q_{01}^{L} - \tilde{P}_{1}^{L}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{c}{b} Q_{01}^{L} - \tilde{P}_{1}^{L}}{2}\right)^{2} + \frac{c}{b}\frac{M(1)}{M(0)}}$$

$$Q_{01}^{St} = \frac{c\, Q_{01}^{L} - b\, P_{01}^{L}}{2b} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^{L} - P_{01}^{L}}{2}\right)^{2} + \frac{c}{b}\frac{M(1)}{M(0)}}$$, z čehož plyne, že pro

obecný případ požadovanou shodu $P_{01}^{L} = \tilde{P}_{1}^{L}$ **nedostaneme**. **Test (F11)** tedy **neplatí.**

Test (F12) je splněn, protože při neomezeně ubývající poslední (jinak ale libovolné) komoditě jsou limitními hodnotami všech fragmentů, z nichž sestává **(St2)**, výrazy analogické výchozím, pouze spočtené z $N-1$ zbývajících komodit.