Walshův postup

C.M. Walsh navrhl postup, kterým lze jakékoliv “klasické” indexní číslo převést na konstrukt, který bude zaručeně splňovat axiom záměny faktorů **(F2)**. Stačí k tomu, abychom k libovolné dvojici cenového a kvantového indexního čísla P_{01}, Q_{01} zavedli příslušné ***“Walshovy modifikace”*** P_{01}^{W}, Q_{01}^{W} takto:

$$P_{01}^{W} = \sqrt{\frac{P_{01}}{Q_{01}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

$$Q_{01}^{W} = \sqrt{\frac{Q_{01}}{P_{01}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

Ilustrace: Laspeyresovo indexní číslo Vytvořme Walshovy modifikace P_{01}^{W} a Q_{01}^{W} výše zmíněnou úpravou. Po dosazení a vykrácení $\sum p_i(0) \cdot q_i(0)$ dostaneme

$$P_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \sqrt{P_{01}^{L} \cdot P_{01}^{P}} = P_{01}^{F}$$

a podobně pro kvantové Q_{01}^{W}

$$Q_{01}^{LW} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}} = \sqrt{Q_{01}^{L} \cdot Q_{01}^{P}} = Q_{01}^{F}$$

Dostaneme dvojici **Fisherových indexních čísel** P_{01}^{F}, Q_{01}^{F}. Lze se přesvědčit, že k témuž výsledku dospějeme, pokud místo Laspeyresových vezmeme za výchozí **Paascheho indexní čísla** P_{01}^{P}, Q_{01}^{P}.

Poznámka 1 K dosažení platnosti testu **(F2)** bychom nemuseli operovat s podílem P_{01}^{*}/Q_{01}^{*}, nýbrž by stačilo vzít podíl jakýchkoliv dvou výrazů, které by byly interpretovatelné jako cenové a kvantové indexní číslo. Obecná volba

$$P_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(1) q_i(1)}{\sum p_i(0) q_i(0)}} \qquad Q_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{B_{01}}{A_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum p_i(0) \cdot q_i(0)}}$$

zaručující splnění **(F2)** se obvykle ukáže jako nevhodná ve světle potřeby splnění jiných testů. Pro příklad lze uvést test proporčnosti **(F7)**, kde požadujeme, aby platilo

$$P_{01}^{AB} = c \quad \text{avšak obecně} \quad P_{01}^{AB} = \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum c p_i(0) q_i(1)}{\sum p_i(0) q_i(0)}} = \sqrt{c} \sqrt{\frac{A_{01}}{B_{01}} \cdot \frac{\sum p_i(0) q_i(1)}{\sum p_i(0) q_i(0)}}$$

a ničím není zaručeno, že výraz v poslední odmocnině je aspoň blízký hodnotě $\sqrt{c}$.

U Walshem navrženého postupu naproti tomu dostáváme

$$P_{01}^{W}=\sqrt{\frac{c}{Q^{*}_{01}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}}=\sqrt{\frac{1}{Q^{*}_{01}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}}$$

pokud P^{*}_{01} vyhovuje testu **(F7)**, což např. platí pro P^{L}_{01} nebo P^{P}_{01}, přičemž pravděpodobnost (aspoň přibližného) splnění toho, že výraz v odmocnině je roven 1, může být vysoká. Pokud za Q^{*}_{01} vezmeme Q_{01}, pak rovnost platí přesně.

von Bortkiewiczova relace

Pruský matematik a ekonom ***Ladislaus Josefovicz von Bortkiewicz*** odvodil užitečnou **strukturální relaci mezi** ***Laspeyresovým*** a ***Paascheho indexním číslem***, která může napomoci vzájemnému porovnání jejich číselných hodnot:

$$B=\frac{P_{01}^{P}}{P_{01}^{L}}=\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(0)}}=1+\frac{S_{\frac{p1}{p0}}}{E'_{\frac{p1}{p0}}}\cdot\frac{S_{\frac{q1}{q0}}}{E'_{\frac{q1}{q0}}}\cdot r_{\frac{p1}{p0}\frac{q1}{q0}}$$

V ní přítomné symboly mají následující význam:

1) $E'_{\frac{p1}{p0}}$ označuje ***vážený aritmetický průměr cenových poměrových změn*** $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ s vahami tvaru $w_i=\frac{p_i(0).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)}$. $E'_{\frac{p1}{p0}}$ je tedy ***Laspeyresův cenový index*** P_{01}^{L}.

2) $E'_{\frac{q1}{q0}}$ označuje ***vážený aritmetický průměr změn kvantit*** $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ s týmiž vahami, tzn. tento výraz je ***Laspeyresovým kvantovým indexním číslem*** Q_{01}^{L}.

3) $S_{\frac{p1}{p0}}$ označuje výběrovou ***směrodatnou odchylku cenových poměrových změn*** $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ s vahami $w_i=\frac{p_i(0).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)}$:

$$S_{\frac{p1}{p0}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}-P_{01}^{L}\right)^2}$$

4) $S_{\frac{q1}{q0}}$ vyjadřuje ***směrodatnou odchylku změn kvantit*** $\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ se stejnými vahami, tj.

$$S_{\frac{q1}{q0}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)}-Q_{01}^{L}\right)^2}$$

5) Výraz $r_{\frac{p1}{p0}\frac{q1}{q0}}$ značí ***vážený párový korelační koeficient*** mezi poměrově vyjádřenými cenovými a kvantovými změnami. Formálně zapsáno: $r_{\frac{p1}{p0}\frac{q1}{q0}}=\frac{cov\left(\frac{p1}{p0},\frac{q1}{q0}\right)}{S_{\frac{p1}{p0}}.S_{\frac{q1}{q0}}}$, přičemž

výraz pro ***váženou kovarianci*** v čitateli zlomku je

$$cov\left(\frac{p_1}{p_0},\frac{q_1}{q_0}\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(0).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N}p_j(0).q_j(0)}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}-E_{\frac{p1}{p0}}\right)\left(\frac{q_i(1)}{q_i(0)}-E_{\frac{q1}{q0}}\right)$$

Poznámka 2 *P*odíl směrodatné odchylky a příslušné střední hodnoty je variační koeficient, takže dva výrazy v součinu pro B jsou variačními koeficienty $V_{\frac{p1}{p2}},V_{\frac{q1}{q2}}$. Oba jsou zřejmě v důsledku kladných cen a nezáporných kvantit vždy nezáporné.

Ověření platnosti Bortkiewiczova poměru[1]

vyvodíme ze vztahů užívaných v popisné statistice. Prvním z nich je relace

(1) $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i\right)+\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}).(y_i-\bar{y})\right]$$

$$\overline{xy}=\bar{x}\bar{y}+cov(x,y)$$

která je obdobou výpočtového vzorce pro výběrový rozptyl $var\,x=\overline{x^2}-\bar{x}^2$.

ověření (1) Rozvedením vztahu pro kovarianci dvou vektorů dostaneme

$$\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}).(y_i-\bar{y})\right]=\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{N}y_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{N}x_i+N\bar{x}\bar{y}\right]$$
$$=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\right)-\bar{x}\bar{y}-\bar{x}\bar{y}+\bar{x}\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\bar{x}\bar{y},$$

následně převedením $\bar{x}.\bar{y}$ na opačnou stranu získáme hledanou relaci. □.

Analogicky odvodíme platnost obdobného vztahu pro vážené charakteristiky:

(2) $$\sum_{i=1}^{N}w_ix_iy_i=\left(\sum_{i=1}^{N}w_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}w_iy_i\right)+\sum_{i=1}^{N}w_i\left(x_i-\sum_{i=1}^{N}w_ix_i\right)\left(y_i-\sum_{i=1}^{N}w_iy_i\right)$$

kde $w_i, i=1,\dots n$ jsou nezáporné váhy normované jedničkovým součtem: $\sum w_i=1$.

ověření (2) Rozvedením vztahu pro *váženou kovarianci* dvou vektorů dostaneme

$$\left[\sum_{i=1}^{N}w_i(x_i-\bar{x}^w).(y_i-\bar{y}^w)\right]=\left[\sum_{i=1}^{N}w_ix_iy_i-\bar{x}^w\sum_{i=1}^{N}w_iy_i-\bar{y}^w\sum_{i=1}^{N}w_ix_i+\bar{x}^w\bar{y}^w\sum_{i=1}^{N}w_i\right],$$ kde

$$=\sum w_ix_iy_i-\bar{x}^w.\bar{y}^w-\bar{y}^w.\bar{x}^w+\bar{x}^w.\bar{y}^w=\sum w_ix_iy_i-\bar{x}^w.\bar{y}^w$$

jsme použili značení

$$\bar{x}^w=\sum_{i=1}^{N}w_i.x_i,\quad \bar{y}^w=\sum_{i=1}^{N}w_i.y_i,\quad cov^w(x,y)=\sum_{i=1}^{N}w_i\left(x_i-\sum_{i=1}^{N}w_ix_i\right)\left(y_i-\sum_{i=1}^{N}w_iy_i\right)$$

V této notaci můžeme výraz **(2)** zapsat ve tvaru

---

[1] **Původní odvození pochází z příspěvku:** **Bortkiewicz,L., von.: Zweck und Struktur einer Preisindexzahl. Nordisk Statistisk Tidskrift I (1922) a 3 (1924).**

(2*) $$\overline{xy}^w = \bar{x}^w \cdot \bar{y}^w + cov^w(x,y)$$

Identitu **(2*)** dále upravíme tak, že ji vydělíme výrazem $\bar{x}^w \cdot \bar{y}^w$. Dostaneme

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\bar{x}\cdot\bar{y}} = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y} + cov(x,y)}{\bar{x}\cdot\bar{y}} = 1 + \frac{cov(x,y)}{\bar{x}\cdot\bar{y}}$$

a druhý výraz pravé strany doplníme vložením směrodatných odchylek. Tím získáme vyjádření s variačními koeficienty veličin x_i a y_i a s jejich korelačním koeficientem r_{xy}.

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\bar{x}\cdot\bar{y}} = 1 + \frac{s_x}{\bar{x}}\cdot\frac{s_y}{\bar{y}}\cdot r_{xy}$$

Stejně bychom získali analogické vyjádření pro vážené veličiny $\bar{x}^w, \bar{y}^w, s^w_x, s^w_y$ a r^w_{xy}, pokud by byly všechny vážené stejnými vahami w_i, $i = 1,\ldots,n$. Vážená obdoba by vypadala následovně

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\bar{x}^w\cdot\bar{y}^w} = 1 + \frac{s_x^w}{\bar{x}^w}\cdot\frac{s_y^w}{\bar{y}^w}\cdot r^w_{xy}$$, kde máme

$$\bar{x}^w = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i,\quad \bar{y}^w = \sum_{i=1}^{N} w_i y_i,\quad s_x^w = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i\left(x_i - \bar{x}^w\right)^2}$$

$$s_y^w = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i\left(y_i - \bar{y}^w\right)^2},\quad cov^w(x,y) = \sum_{i=1}^{N} w_i\left(x_i - \bar{x}^w\right)\left(y_i - \bar{y}^w\right)$$

s nějakým vektorem nezáporných a jedničkovým součtem normovaných vah $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Sledovaného cíle dosáhneme, ukážeme-li, že levá strana výrazu, může přejít vhodnou konkretizací veličin x_i, y_i a $w_i, i = 1,\ldots,n$ ve **výraz vyjádřitelný jako podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla**.

Vyjádřeme tedy nejdříve podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla jako:

(3) $$\frac{P^P_{01}}{P^L_{01}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}}$$

Na základě předchozího a tvaru pravé strany Bortkiewiczova poměru vyšetříme, zda podíl zmíněných indexních čísel lze vyjádřit jako výraz korespondující se zápisem **(3)**, jehož levá strana by měla podobu vážené kovariance dělené součinem stejně vážených středních hodnot dvou vektorů vyjadřujících cenové a množstevní změny s vhodně volenými vahami. Ukazuje se, že toto vyjádření je možné, a to při následující

volbě veličin : $x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$, $y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(0)}$ a vah $w_i^* = \frac{p_i(0).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)}$. Tyto

konkretizace pro x_i a y_i lze vzhledem k symetrii výrazů přirozeně zaměnit. Dosadíme-li totiž zmíněné veličiny do **(2)**, dostaneme

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}}{\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right] \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right]} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)}}{\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)}\right] \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(0)}\right]}$$

což po dalším vykrácení součtem $\sum p_i(0).q_i(0)$ zřejmě dává výraz vyjadřující podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla. □.

Záměnou cen za kvantity a opačně bychom dospěli tímto způsobem k vyjádření

$$\frac{Q_{01}^P}{Q_{01}^L} = 1 + r_{xy} \cdot \frac{s_y}{\bar{y}} \cdot \frac{s_x}{\bar{x}}$$ (tzn. s prohozením obsahu x_i a y_i)

z něhož je mj. patrná platnost "křížového" splnění rovnosti $P_{01}^P . Q_{01}^L = P_{01}^L . Q_{01}^P$ □.

Z vlastností (vážených) středních hodnot a směrodatných odchylek lze dále dovodit, že **"neutrální hodnota" 1 von Bortkiewiczova podílu nastane v případech**, kdy :

***(1) všechny ceny se změní ve stejném poměru**, tj.* $\frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \text{konst.}$ *pro všechny komodity*.

Tento analyticky ideální případ je ovšem výjimečný.

(2) *všechny kvantity se změní ve stejném poměru* *tj .* $\frac{q_i(1)}{q_i(0)} = \text{konst.}$ *pro všechny statky.*

Tato eventualita je při užití reálných hodnot stejně vzácná jako předchozí případ.

(3) *vektory cenových a kvantových změn jsou vzájemně nekorelované*.

Tento případ zasazený do obvyklého ekonomického prostředí znamená situaci, kdy poptávka po komoditách zařazených do zkoumání není v zásadě ovlivněna změnami v jejich cenách mezi základním a běžným obdobím.

Ve všech **situacích (1)**, **(2)**, **(3)** tedy **dojde ke shodě** hodnot P_{01}^{L} a P_{01}^{P}.

Podobné úvahy nás přivedou k těmto závěrům:

Má-li být hodnota P_{01}^{P} **větší než** P_{01}^{L}, musí být (při nezápornosti ostatních prvků dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $r_{\frac{p1}{p0}\frac{q1}{q0}}$ kladná, tzn. **mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat kladná korelace**.

Má-li být P_{01}^{P} **menší než** P_{01}^{L}, musí být (při nezápornosti ostatních členů dekompozice, tj. středních hodnot a směrodatných odchylek) hodnota $r_{\frac{p1}{p0}\frac{q1}{q0}}$ záporná , tzn. **mezi vektory cenových a kvantových změn musí existovat korelace negativní**.

To odpovídá situaci, kdy **nadprůměrný růst cen některých komodit** (*oproti průměrnému růstu či poklesu cen jiných komodit*) **provází zpravidla podprůměrný růst** (popř. pokles) **poptávky po těchto komoditách**. *Právě tato situace je v ekonomické realitě obvyklá*. S ohledem na interpretaci korelačních vztahů (*v prostředí spíše růstových tendencí cen a kvantit*) lze konstatovat, že P_{01}^{L} index bude poskytovat vyšší hodnotu než P_{01}^{P}, protože "nadprůměrně" vysokým cenovým pohybům skutečně v ekonomickém prostředí odpovídají "podprůměrné" růsty či poklesy v poptávaných množstvích. Dále je zřejmé, že jak **Marshallovo-Edgeworthovo**, tak **Fisherovo** i **Walshovo** indexní číslo budou ležet v intervalu vymezeného zdola P_{01}^{P} a shora P_{01}^{L} .