Řetězení indexních čísel - Marshallův podnět [1887][1]

U mnoha jinak „kvalitních“ indexních čísel činí **problém nesplnění axiomu okružnosti (F4)**. To platí mj. pro všechna klasická indexní čísla založená na aritmetickém nebo harmonickém průměrování. Způsob, jak této slabině částečně ulehčit, nabízí postup nazývaný ***řetězení*** [chaining].

Řetězení spočívá v postupném zjemňování dělení mezi dvěma stavy (např. stavem „0“ a stavem „1“) a v následném vyjádření jisté „atomizované“ formy k původnímu indexnímu číslu tak, že se nejprve spočtou „parciální“ indexní čísla mezi jednotlivými body tohoto dělení a tato se poté vzájemně vynásobí. Název tomuto postupu však přisoudil nikoliv **Alfred Marshall**, ale až **Irving Fisher**.

Vyčísleme nejprve hodnotu P_{st} pro jakékoliv dva body (období) z přijatého dělení intervalu základního období „0“ a běžného období označeného „T“, kde toto druhé období odpovídá symbolu „1“ v původním (neděleném) označování. (Při této dočasné úpravě notace je možné zachovat vzestupnou tendenci v označování dělících bodů přirozenými čísly). Platí tedy: $I < \ldots < \ldots$.

Definujme nyní **zřetězené indexní číslo** (příslušné nějakému prostému IČ) P^*_{st} výrazem

(1) $$P^*_{st} = \frac{P_{01}}{P_{01}} \cdot \frac{P_{12}}{P_{12}} \cdot \frac{P_{23}}{P_{23}} \cdot \ldots \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{s}} ,$$

resp. při $s <$ (a následném částečném vykrácení zlomku výše) zjednodušeněji jako

(1A) $$P^*_{st} = P_{s,s+1} \cdot P_{s+1,s+2} \cdot P_{s+2,s+3} \cdot \ldots \cdot P_{t-1,t} .$$

Buďme si vědomi toho, že jeho hodnota je obecně odlišná od prostého indexního čísla P_{st}.

Podílovou odchylku $D_{st} = \frac{P^*_{st}}{P_{st}}$ mezi zřetězeným a prostým indexním číslem

nazveme **zkreslením při zřetězení**.

Lze ukázat, že **postupným zjemňováním dělení mezi body „1“ a „T“ volbou stále více vnitřních dělicích bodů (teoreticky při T→∞) lze postupně zmenšovat hodnotu tohoto zkreslení a přibližovat tak zřetězené indexní číslo výchozímu indexnímu číslu.**

Poznámka 1 Je patrné, že řetězit má smysl především indexní čísla při časovém srovnání (pozorování musí být seřazena v časových posloupnostech), postupu nelze tedy srovnatelně smysluplně využít pro geografická data.

Poznámka 2 Hlavní bariérou, na kterou zjemňování dělícího intervalu naráží, je přirozená okolnost, že ***statistická data jsou registrována vždy pouze v určitých pevně stanovených časových okamžicích***. Podnikové i makroekonomické ukazatele bývají

---

[1] Marshall A.: Remedies for fluctuations of prices. Contemporary Review 1887.

vykazovány zpravidla v měsíčních nebo čtvrtletních intervalech. Častější vykazování hodnot lze zaznamenat pouze u burzovních indexů (vyhodnocujících cenu akciového portfolia), kde změny probíhají během hodinových či dokonce pětiminutových intervalů a údajů z oblasti měnových kursů, kde jsou dostupná denní, příp. i hodinová data. V jiných oblastech reálné ekonomiky je srovnatelná frekvence sledovanosti dat nedosažitelná.

Zřetězené indexní číslo vykazuje naopak dvě teoretické přednosti: splňuje totiž Fisherovy ***axiomy okružnosti*** **(F4)** a ***záměny období*** **(F3)**, a to i tehdy, když původní indexní číslo těmto testům nevyhovuje. Ukážeme to snadno:

Ověření **(F3)**: Zvolíme např. $s < t$. Potom platí

(2) $$P^*_{st} \cdot P^*_{ts} = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdots P_{t-1,t}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdots P_{s-1,s}} \cdot \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdots P_{s-1,s}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdots P_{t-1,t}} = 1$$

a podobně při porovnání hodnot ve třech bodech (např. $r < s < t$) snadno ukážeme, že platí ***axiom okružnosti*** **(F4)**

(3) $$P^*_{rt} = P_{r,r+1} \cdot P_{r+1,r+2} \cdots P_{s-1,s} \cdot P_{s,s+1} \cdot P_{s+1,s+2} \cdots P_{t-1,t} = P^*_{rs} \cdot P^*_{st} .$$ □.

Poznámka 3 Je zřejmé, že pokud prosté indexní číslo splňuje axiom okružnosti **(F4)**, pak je hodnotou shodné s jemu příslušným zřetězeným indexním číslem (při jakémkoliv dělení), tzn. $P^*_{st} = P_{st}$.

Podobně snadno ověříme pro zřetězená indexní čísla platnost testů **(F1)** a **(F7)**[2]:

(4) **(F1)** $$P^*_{ss} = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdots P_{s-1,s}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdots P_{s-1,s}} = 1 ,$$

(5) **(F7)** $$P^{C*}_{st} = \frac{cP_{01} \cdot cP_{12} \cdot cP_{23} \cdots cP_{t-1,t}}{cP_{01} \cdot cP_{12} \cdot cP_{23} \cdots cP_{s-1,s}} = c^{t-s} P^*_{st} .$$

(Pro případ $t = s+1$ tedy zřejmě dostaneme $P^{C*}_{s,s+1} = cP^*_{s,s+1}$). □ .

Vyšetřování dalších vlastností zřetězených indexních čísel nemusí být jednoduché, resp. tyto vlastnosti budou zpravidla záviset na vlastnostech výchozích prostých indexních čísel.

Otázku, zda preferovat užití indexního čísla prostého (tj. s pevným základem) nebo zřetězeného, nelze obecně zodpovědět. V souvislosti s konstatováním učiněným v souvislosti s testem **(F4)** lze přijmout názor, že pokud pracujeme s indexními čísly, která zacházejí symetricky s vahami (což platí mj. u $P^W_{01}, P^F_{01}, P^E_{01}, P^T_{01}$), nezáleží příliš na tom, kterou verzi použijeme, protože při praktickém použití se výsledky budou lišit jen málo.

[2] Konkrétní podobu testů musíme formulovat v kontextu obecných období *s,t* v *m+1*-bodovém úseku.

Pokud statistická metodika obměňuje základ pro výpočet cenových indexů zhruba po 5 - 8 letech a používá uvedené typy indexních čísel, nebude příliš záležet na tom, zda vezmeme index prostý nebo zřetězený. **Ve statistické praxi** však **přetrvává tendence setrvávat na indexech s vahami „nesymetrickými“, což platí o Laspeyresovu i o Paascheho indexu.**

Přirozeně je však nutno přihlížet k dalším okolnostem, jako je *délka užívaných časových řad*, resp. časové odstupy, ve kterých se srovnání provádí, a míře *variability u cen i kvantit mezi jednotlivými obdobími*. Lze-li předpokládat zhruba monotónní vývoj (optimální je pozvolný růst cen i kvantit, nezbytné je vyloučení extrémního kolísání a silných kompenzačních efektů, pokud se tyto odehrají ve srovnávaných obdobích), pak mohou být rozdíly také u „nesymetrických“ indexních čísel téměř neznatelné. Čím zřetelněji bude pozorována značná rozkolísanost, tím bude nesoulad mezi oběma typy indexů pravděpodobnější.

Poznámka 4 ***von Bortkiewiczův vztah*** lze u některých indexních čísel využít ke zjištění, jakým směrem jsou tato indexní čísla vychýlena při zřetězení, tzn. zda dochází k nějaké systematické odchylce (pouze však u IČ nesplňujících ***test okružnosti*** **(F4)**) při srovnání hodnot prostého a zřetězeného indexního čísla.

Zřetězení Carliho/Sauerbeckova indexního čísla

Nejprve vyjádříme u tohoto indexního čísla příslušné zkreslení při zřetězení. To má tvar

(6)
$$D^S_{012} = \frac{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(0)}}$$

Nyní využijeme již dříve uvedeného vztahu

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = \bar{x}\bar{y} + s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}$$

v níž uplatníme následující konkretizace vektorů x a y. Pro sledovaný účel vezmeme

$$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad \text{a podobně} \quad y_i = \frac{p_i(2)}{p_i(1)}$$

neboli podíly cenových poměrů komodit vzatých ve dvou po sobě jdoucích úsecích.

Výraz **(6)** tak přejde do tvaru

(7)
$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\cdot\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right) + s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}$$

s tím, že na levé straně po zkrácení uvnitř sumace dostaneme $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(0)}$. Nyní vydělíme výraz pro D^S_{012} prvním členem pravé strany **(7)**, což je vlastně součin $\bar{x}\bar{y}$. Po úpravě dostaneme

(8)
$$D^S_{012} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}}{\bar{x}\bar{y}}\right)},$$

kde příslušné průměry, směrodatné odchylky a korelační koeficient se vztahují (prostým, neváženým způsobem) k výše definovaným hodnotám x_i a y_i.

S ohledem na dosazené hodnoty x_i a y_i můžeme říci, že výraz ve jmenovateli **(8)** bude menší než 1, neboť znaménko výrazu $\left(\frac{s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}}{\bar{x}\bar{y}}\right)$ závisí jedině na znaménku r_{xy}. Toto znaménko bude v převážné většině situací záporné, neboť lze důvodně předpokládat, že ve dvou po sobě jdoucích obdobích (0→1) a (1→2) - nebudou-li časové odstupy příliš krátké - bude vzestup cen u komodit s podprůměrným růstem v prvém z těchto období následován (s ohledem na tendenci vedoucí k přibližování cenových úrovní) převážně nadprůměrným růstem v navazujícím období. Výraz pro D^S_{012} bude proto zpravidla větší než 1 a Sauerbeckovo indexní číslo bude tedy zkresleno směrem nahoru.

Zřetězení Laspeyresova indexního čísla

Obdobně jako v předešlém případě se pokusíme vyjádřit zkreslení indexního čísla D_{012} výrazem vyskytujícím se na pravé straně **von Bortkiewiczova poměru**. Po zkrácení máme

(10) $$D_{012} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(2).q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(1)} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(0)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(2).q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(0)}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(2).q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(2).q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(0)}}.$$

Nyní nalezneme vhodnou náplň vektorů x a y a pro váhy w_i, pro kterou by platila relace

(11) $$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\bar{x}_w \bar{y}_w} = 1 + \frac{s_{xw} s_{yw} r_{x,y}}{\bar{x}_w \bar{y}_w}$$ při použitém značení

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i,\quad \bar{y}_w = \sum_{i=1}^{N} w_i y_i,\quad s_{xw} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i (x_i - \bar{x}_w)^2},\quad s_{yw} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i (y_i - \bar{y}_w)^2},$$

a $$\mathrm{cov}_w(x,y) = \sum_{i=1}^{N} w_i (x_i - \bar{x}_w)(y_i - \bar{y}_w)$$

a takovou, při níž by levá strana **(11)** byla vyjádřitelná jako výraz pro zkreslení D_{012}.

Ukazuje se, že tomuto účelu vyhovují dosazení

(12A) $x_i = \dfrac{p_i(2)}{p_i(1)}$ a podobně vymezení $y_i = \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}$

(resp. vice versa) a volba vah w_i ve tvaru

(12B) $$w_i = \frac{p_i(1).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1).q_j(0)}.$$

Při uvedené konkretizaci dostaneme totiž

(13)

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} w_i y_i\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1).q_j(0)} \cdot \frac{p_i(2)}{p_i(1)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1).q_j(0)} \cdot \frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1).q_j(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right)}$$

,

přičemž po následném zkrácení uvnitř sumací a následně dvou ze tří přítomných výrazů $\sum p_i(1).q_i(0)$ dospějeme k výrazu rovnému právě D_{012}. □

Také v tomto případě lze na základě přítomných výrazů učinit jisté úvahy o očekávaném směru zkreslení. Opět je zřejmé, že směr zkreslení bude záviset na znaménku korelačního koeficientu r_{xy} mezi vektory x a y výše definovanými.

Protože každé x_i vyjadřuje pro příslušnou komoditu cenovou změnu mezi obdobím 1 a 2, potom lze důvodně předpokládat, že ***korelace cenových vektorů mezi obdobími 0→1 a 1→2 bude záporná.*** Na druhé straně lze přinejmenším stejně oprávněně vyslovit tvrzení, že ***korelace v témže období (0→1) mezi cenovými a množstevními změnami bude rovněž záporná.*** Odtud lze tedy dovodit, že ***cenové změny za období 1→2 budou se změnami kvantit v období 0→1 převážně korelovány kladně***.

Z těchto úvah plyne, ***že Laspeyresovo indexní číslo bude (shodně jako Sauerbeckovo) při zřetězení vychýleno směrem nahoru.***

Poznámka 5 S ohledem na skutečnost, že průměrování provádíme s pomocí vah w_i, které mohou více nebo méně pozměnit vliv jednotlivých složek v agregátních součtech, platí výše uvedené vývody pouze s určitou podmíněností.

Zřetězení Paascheho indexního čísla

Obdobnými úvahami o vztazích mezi cenovými a kvantovými změnami v navazujících obdobích bychom dospěli k závěru, že ***Paascheho indexní číslo se při zřetězení chová tak, že se jeho zřetězená verze vychyluje hodnoty oproti přímo určenému číslu směrem dolů.*** Lze to prokázat touto konkrétní volbou vektorů x, y a vah w:

(14) $$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)}, \quad y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(2)}, \quad w_i = \frac{p_i(0).q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(2)} .$$

Vyšetřujeme korelaci poměrových cenových změn v období **0→1** s poměrovými změnami spotřeb během období **1→2** vzatými však v časově obráceném pořadí.

Při zkoumání převažujícího směru korelovanosti obou vektorů lze usuzovat takto:

- **cenové změny uskutečněné během období 0→1 budou negativně korelovány s cenovými změnami v navazujícím období 1→2.** Tyto **následné cenové změny budou opět negativně korelovány s množstevními změnami během téhož období 1→2 (shodná úvaha jako při určení směru zkreslení u Laspeyresova indexního čísla)**. Vzhledem k tomu, že však tentokrát uvažujeme vektor y_i s inverzně zadanými složkami oproti předchozímu případu, bude korelace veličin $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ a $\frac{q_i(1)}{q_i(2)}$ záporná.

Ověření: odvozením výrazu pro D^P_{01}: Při uvedené konkretizaci x_i, y_i, w_i dostaneme

(15)

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} w_i y_i\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0).q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(2)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(2)}}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0).q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(2)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0).q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0).q_j(2)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(2)}\right)} =$$

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(2)}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(2)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(2)}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(2)}\right)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(1)\right)\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(2)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(0).q_i(1)\right)\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(1).q_i(2)\right)}$$

Posledně zapsaný výraz je shodný s definičním výrazem pro D^P_{012} po zkrácení dvou ze tří výrazů $\sum$ [illegible] vyskytujících se v definičním vzorci $D^P_{012} = \frac{P^P_{01} \cdot P^P_{12}}{I_{02}}$. □ .

U složitějších indexních čísel nelze zpravidla směr tranzitivního zkreslení tak snadno odvodit nebo o něm nelze vůbec vyslovit přiměřeně určitý a ekonomickými důvody podložený závěr.