

Racionální chování spotřebitele maximalizace užitku vs. minimalizace výdajů

Spotřebitel si při nákupu komodit počíná tak, že svůj peněžní příjem M rozdělí beze zbytku na nákup s komodit ($1 \leq s \leq n$), a to tak, aby dosáhl maximálního užitku. Jinými slovy: komodity kupuje v takových množstvích (ne však nutně všechny dostupné), aby žádoucí hladiny užitku dosáhl co nejlevněji. Bude preferovat - při variantní možnosti dosáhnout hladiny užitku u^* různými kombinacemi komodit - takovou kombinaci, při níž celkový výdaj na pořízení všech užitek mu přinášejících statků (závisející zřejmě na množstvích statků a na jejich jednotkových cenách) bude nejmenší možný. Je tedy mj. zřejmé, že při jinak stejném příspěvku několika komodit k užitku (při shodných mezních užitecích těchto komodit) bude preferovat nákup komodity nejlevnější.

Formulace maximalizačního problému

Pokud situaci zformalizujeme, máme optimalizační problém řešící nalezení maxima

$$(1A) \quad \text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{za podmínky}$$

$$(1B) \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M \quad \text{a za podmínek nezápornosti}$$

$$(1C) \quad x_i \geq 0 \quad \text{pro všechna } i=1, 2, \dots, n.$$

Z matematického pohledu jde o úlohu nalezení vázaného extrému (zde maxima) obecně nelineární funkce na množině rozpočtového omezení $\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M$. Jak je známo, vzhledem k tomu, že omezující podmínka spolu s podmínkami nezápornosti proměnných (1C) představuje kompaktní (tj. omezenou a uzavřenou) množinu, nabývá jakákoliv spojitá a ve všech proměnných rostoucí nelineární funkce svého maxima na hranicích takovéto množiny.

Lze tedy rozpočtové omezení stejně dobře psát ve tvaru $\sum_{i=1}^n p_i x_i = M$.

Úloha uvedeného typu se standardně řeší s použitím Lagrangeova multiplikátoru.

Při této reformulaci nabývá kriteriální funkce tvar

$$(2) \quad G(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - M \right),$$

kde λ je právě zmíněný Lagrangeův multiplikátor. S touto (hodnotou neznámou) veličinou se zachází obdobně jako s jinými proměnnými: v dalším ji budeme považovat za funkci implicitně závislou na „parametrech úlohy“ tzn. na cenách obsažených v cenovém vektoru $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ a na příjmu jednotlivce M .

Řešení maximalizačního problému (1A) – (1C)

Stejně jako v jiných extrémálních úlohách postupujeme tak, že všechny parciální derivace extremalizované funkce $u(x) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - M \right)$ v (2) podle proměnných x_1, x_2, \dots, x_n a λ položíme rovny nule. Po přeskupení členů dostaneme:

$$(3A) \quad u_r = p_r \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (\text{derivace podle } x_r)$$

$$(3B) \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i = M \quad (\text{derivace podle } \lambda).$$

Rovnice (3A) a (3B) jsou nutnými podmínkami k tomu, aby pro řešený optimalizační problém existovalo řešení, tedy maximum. Těchto podmínek je právě stejný počet ($n+1$), jako je neznámých veličin modelu (velikostí poptávek po jednotlivých komoditách x_1, x_2, \dots, x_n a pomocná proměnná λ).

V „lineární situaci“ by se dalo očekávat, že řešení bude dáno jednoznačně. Zde však n vztahů (3A) nebude až na výjimky lineárními funkcemi. Jejich podoba závisí na tvaru uživatelské funkce $u(x)$, v níž jako argumenty vystupují neznámé x_1, x_2, \dots, x_n .

Poznámka 1 Od úlohy *lineárního* programování se tento problém liší ve dvou směrech:

- Tvar omezení: (1B) je představováno jednou nadrovinou n -rozměrného prostoru (omezující množství komodit jen "shora")
- Užitková funkce $u(x)$ bude mít zpravidla komplikovanější tvar, než je obvykle lineární funkce problému lineárního programování a problém nalezení optima bude představovat zpravidla komplikovanější analytickou úlohu než je ta, která může být řešena technikami matematického programování (např. *simplexovou metodou*).

Z podmínek (3A) tedy plyne, že v **rovnovážné situaci** (kdy se poptávka spotřebitele po komoditách při maximálním užítku přizpůsobí cenovým relacím) **bude platit vztah**

$$(4) \quad \lambda = \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \dots = \frac{u_n}{p_n}$$

Vztahy (4) představují soustavu podmínek nutných pro dosažení rovnovážného stavu. Vyjadřují požadavek, aby podíl mezního užítku kterékoliv komodity a její jednotkové ceny byl konstantní pro všechny uvažované komodity. Je odtud vidět, že veličina λ (uplatňující se jako Lagrangeův multiplikátor) je rovna všem těmto podílovým hodnotám.

O rovnováze lze oprávněně mluvit tehdy, jestliže je dosaženo maximálního užítku při daném příjmu a dané množině relativních cen. Jakékoliv vychýlení z rovnováhy vede vždy ke snížení hodnoty užítku spotřebitelem pocíťovaného.

Jestliže tedy každé u_r představuje mezní užitek (úměrný v rovnovážné situaci ceně r -té komodity), můžeme veličině λ přisoudit interpretaci jako „**mezní užitek peněz**“ (který je ovšem také funkcí cen p_i , $i = 1, 2, \dots, n$ a příjmu M). Za těchto okolností pak **platí pro**

podíl mezních užitek (tedy mezní mírou substituce mezi r -tým a s -tým statkem) vztah

$$(5A) \quad m_{rs} = \frac{u_r}{u_s} = \frac{p_r}{p_s} \quad \text{a podobně} \quad (5B) \quad m_{rz} = \frac{u_r}{\lambda} = \frac{p_r}{I}$$

Můžeme tedy říci, že **mezní míra substituce mezi r -tou a s -tou komoditou je v rovnovážné situaci rovna podílu jednotkových cen těchto komodit**. Cenu p_r lze interpretovat jako mezní míru substituce mezi r -tou komoditou a penězi.

Duální úloha – minimalizační problém

Maximalizační problém, tak jak byl představen vztahy (1A-1C), může být formulován i obráceným způsobem. Maximalizace účelové funkce (1A) za podmínek (1B)-(1C) má svou duální formulaci následujícím tvaru

$$(6A) \quad \text{Min } M = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad \text{za podmínky}$$

$$(6B) \quad u(x) \geq u^0 \quad \text{opět při } p_i > 0 \text{ pro libovolné } i.$$

$$(6C) \quad x_i \geq 0 \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Maximalizuje-li spotřebitel svůj užitek z komoditní kombinace při rozpočtovém omezení (1B), řeší v podstatě tentýž problém, jako je minimalizace jím vynaložených výdajů spojených pořízením komodit v množstvích, která zaručí dosažení užtku na požadované hladině u^0 . V tomto smyslu lze mluvit o dvojici duálních úloh.

Řešení minimalizačního problému (6A-6C)

Obdobně jako při řešení maximalizační úlohy řešíme i tuto úlohu po reformulaci úlohy užitím Lagrangeova multiplikátoru (zde označeného μ). Kriteriační funkce má v tomto případě tvar

$$(7) \quad \text{Min } H(x, \mu) = \sum_{i=1}^n p_i x_i - \mu (u(x) - u^0),$$

Opět položíme parciální derivace $\frac{\partial H}{\partial x_r}, \frac{\partial H}{\partial \mu}$ rovny nule. Dostaneme

$$(8A) \quad \frac{\partial H(x, \mu)}{\partial x_r} = p_r - \mu \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x_r} = 0, \quad (8B) \quad \frac{\partial H(x, \mu)}{\partial \mu} = - (u(x) - u^0) = 0 \quad \text{a odtud}$$

$$(9) \quad p_r = \mu \cdot u_r \quad \text{neboli} \quad \mu = \frac{p_r}{u_r} \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n$$

Poznámka 2: Mezi Lagrangeovým multiplikátorem λ (maximalizační úlohy (1)) a Lagrangeovým multiplikátorem μ (maximalizační úlohy (6)) platí vztah reciprocity

$$(10) \quad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

Maximalizace užitku a minimalizace s tím souvisejících nákladů vedou k téže (optimální) volbě komoditních množství x_i (parametry úlohy jsou p a M), výdaj při prvé z úloh se musí rovnat minimálním nákladům v duálním problému.

❖ **Řešením maximalizační úlohy je soustava Marshallových poptávkových funkcí $g_i(M, p)$, v nichž příjem a cenový vektor vystupují jako parametry.**

V duálním minimalizačním problému jsou determinujícími veličinami - argumenty poptávkových funkcí - úroveň užitku u^0 a cenový vektor p .

❖ **Řešení minimalizačního problému tvoří soustava Hicksových (někdy také kompenzovaných) poptávkových funkcí, v nichž jako parametry vystupují hladina užitku u^0 a cenový vektor p .**

Z interpretačního hlediska jsou tyto funkce charakteristické tím, že informují o tom, jak jsou poptávky x_i ovlivněny/kompenzovány cenami p (při pevném u).

Řešení obou výše definovaných problémů musí být tedy táž. Proto lze psát

$$(11) \quad x_i = g_i(M, p) = h_i(u, p) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Každé z těchto řešení přitom můžeme zpět dosadit do výchozího příslušného problému. V prvním případě obdržíme **nejvyšší dosažitelný užitek**, ve druhém případě **nejmenší dosažitelné náklady**. Lze tedy psát:

$$(12) \quad u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(M, p), g_2(M, p), \dots, g_n(M, p) = h_1(u, p)$$

$$(13) \quad M = \sum_{k=1}^n p_k h_k(u, p) = E(u, p)$$

Funkce $\psi(M, p)$ v (12) vyjadřuje **maximální dosažitelný užitek** (při pevně daném příjmu M a cenovém vektoru p). Nazývá se **nepřímá užitková funkce (indirect utility function)**¹ a je takto definována vztahem

$$(14) \quad \psi(M, p) = \max_x \left[u(x) ; \sum_{k=1}^n p_k x_k = M \right]$$

Funkce $E(u, p)$ v (13) vyjadřuje **minimální dosažitelný výdaj** (při požadované úrovni užitku u^0 a vektoru cen p). Nazývá se **výdajová funkce (expenditure function)** a lze ji definovat vztahem

$$(15) \quad E(u^0, p) = \min_x \left[\sum_{k=1}^n p_k x_k ; u(x) = u^0 \right]$$

Nepřímá užitková a výdajová funkce jsou vzájemně velmi úzce propojeny. Protože platí $E(u, p) = M$, můžeme invertovat argument u , abychom dostali u jako funkci M a p , což nám dá $u = \psi(M, p)$. Úplně obdobně inverze vztahu $u = \psi(M, p)$ povede přímo k relaci $E(u, p) = M$. Obě funkce obsahují v podstatě tutéž informaci (zapsanou ale pomocí jiných argumentů, přičemž p zůstává v obou).

¹ Pojem **nepřímé užitkové funkce** zavedl poprvé italský matematik **Giovanni Antonelli**, nezávisle na něm pak **Harold Hotelling** [1932]: **Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions**. *Journal of Political Economics*. 40-1932. s.577-616.