

4.1 Výdajová funkce a její vlastnosti

Definice 13 Máme dānu spojitou užitkovou funkci $u(\cdot)$, cenový vektor p a mějme dále určenu konkrétní velıkost užitku u^0 (skalární, v ordinálním pojetí). Potom funkci

$$(4.1) \quad E(u^0, p) = \min \{x; u(x) \geq u^0\}$$

nazveme **výdajovou funkcí [expenditure function]** ve vztahu k užitkové funkci $u(\cdot)$.

Argumenty výdajové funkce je cenový vektor a velıkost užitku požadovana spotřebitelem. Výdajová funkce představuje minimální možné náklady (spojené s nákupem nanejvy n statků při exogenně stanovený cenách p) vynaložené na komoditní kombinaci, která poskytuje užitek při nejmenım o velıkosti u^0 . Spotřebitel přitom nemusí nakupovat všechny komodity a s ohledem na kriteriální funkci v (3.11) da prednost tem, u kterych dosazenı užitku nažadovane vysi docılı nejlevnejı.

Definice 13A Vydajova funkce $E(u^0, p)$ pri slusna užitkove funkci $u(\cdot)$ s prijatymi vlastnostmi (U1) - (U5) ma tyto vlastnosti :

(V1) $E(u^0, p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, pricemz $E(u^0, p) > 0$ **pro libovolnou roveň užitku $u^0 > 0$** .

(V2) $E(u^0, p)$ je **rostoucı v u pro jakykoliv cenovy vektor $p^0 > 0$** . $E(u^0, p)$ je **neklesajcı v p a rostoucı aspon v jedne z cen p_i pro libovolnou roveň užitku u^0** .

(V3) $E(u^0, p)$ je **spojitá v u pro jakykoliv cenovy vektor $p^0 > 0$** . $E(u^0, p)$ je **spojitá v p pro libovolnou roveň užitku u^0** .

(V4) $E(u^0, p)$ je **linerne homogenní v p pro libovolnou roveň užitku u^0** .

Znamená to, že platí $E(u^0, \lambda p) = \lambda E(u^0, p)$ **pro libovolne $\lambda \in (0, +\infty)$**

(V5) $E(u^0, p)$ je **konkávní v cenách p pro libovolnou úroveň užitku u^0** .

Znamená to, že platí $E(u^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \geq \mu E(u^0, p) + (1-\mu)E(u^0, p^*)$ **pro libovolne dva cenove vektory $p, p^* > 0$ a libovolne $\mu \in (0, 1)$** .

Vlastnost (V2) konstatuje, že s růstem velıkosti užitku požadovaneho spotřebitelem (ostře) rošte i výdaj na pořízení komodit. Tataz vlastnost ve vztahu k p připouští, že růst nekterych cen (zpravidla těch, které prave nejsou ve vybírané kombinaci statků pro poskytvajıcıch užitek u^0) nemusí nutne vést k růstu výdajů spotřebitele. Očekávaný (=umerny) vývoj nákladů na komoditní kombinaci při zmne cenového měřítká všech komodit pak vyjadřuje (V4), zatímco vlastnost (V5) obrazne charakterizuje „ne výší něž lineární“ tendenci vývoje výdajů při růstu kterékoliv z cen $p_i, i = 1, 2, \dots, n$. Vlastnost (V1) zahrnuje matematická omezení funkce $n+1$ promennych v kontextu ekonomického významu $E(u^0, p)$ a konstatuje, že kladnou hodnotu užitku nelze dosáhnout zdarma. Spojitost (V3) v užitku i cenách konstatuje, že náklady nemohou skokovite růst (ani klesat) tehdy, jestliže se jen nepatrne zmne některá z cen nebo úroveň užitku u^0 .

Jestliže máme definovanou výdajovou funkci $E(p)$ s výše uvedenými vlastnostmi (jmenovitě vlastností **(V2)**), máme tím zaručeno, že k této výdajové funkci existuje funkce inverzní, která bude vyjadřovat hladinu užitku v jako funkci výdajů a cen komodit.

Význam výdajové funkce spočívá mj. v tom, že pomocí ní lze generovat celý **system poptávkových funkcí v tzv. Hicksově smyslu**. Uvedená možnost (pro diferencovatelnou výdajovou funkci) vychází z modifikace tzv. **Shephardova lemmatu**. Z uvedeného lemmatu vyplývá, že lze psát :

$$(4.2) \quad \frac{\partial E(p)}{\partial p_j} = x_j, \quad \text{kde}$$

funkce na pravé straně vyjadřuje **Hicksovskou poptávku** po komoditě x_j ¹.

4.2 Nepřímá užitková funkce a její vlastnosti

Definice 14 Máme danou výdajovou funkci $E(p)$ s cenovým vektorem p a současně tím určenu konkrétní velikost výdajů M . Potom funkci

$$(4.3) \quad \psi(M, p) = \max \{x \mid px = M\}$$

nazveme **nepřímá užitková funkce [indirect utility function]** ve vztahu k výdajové funkci $E(p)$. Argumenty této funkce jsou tedy cenový vektor a velikost příjmu spotřebitele vynaloženého na nákup komodit v množstvích x .

Definice 14A Nepřímá užitková funkce $\psi(M, p)$ příslušná k výdajové funkci $E(p)$ s vlastnostmi (V1) - (V5) je charakterizována těmito vlastnostmi:

(W1) $\psi(M, p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $\psi(M, p) = 0$.

(W2) $\psi(M, p)$ je **rostoucí v M pro jakýkoliv cenový vektor** $p^0 > 0$. Dále $\psi(M, p)$ je **nerostoucí v p (pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů M⁰)**.

(W3) **spojitá v M pro jakýkoliv cenový vektor** $p^0 > 0$ **a spojitá v p pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů M⁰**.

(W4) $\psi(M, p)$ je **homogenní funkce stupně 0 současně v cenách p a výdajích M**.

Znamená to, že platí $\psi(\lambda M, \lambda p) = \psi(M, p)$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(W5) $\psi(M, p)$ je **konkávní funkce v p pro jakoukoliv úroveň výdajů M⁰**. Znamená to, že platí $\psi(M^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \geq \mu \psi(M^0, p) + (1-\mu) \psi(M^0, p^*)$ pro $\mu \in [0, 1]$.

(W5*) $\psi(M, p)$ je **kvazikonvexní funkce v p pro jakoukoliv úroveň výdajů M⁰**. Znamená to, že platí pro $\mu \in [0, 1]$

$$\psi(M^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \leq \max \{ \psi(M^0, p); \psi(M^0, p^*) \}$$

¹ Podrobně o nákladových funkcích pojednává monografie R.W. Shephard: *Cost and Production Functions* [1953] nebo též autor: *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton U.P. [1970].

Prvá z vlastností (W1) konstatuje mj. že s nulovými peněžními prostředky žádný kladný užitek nezískáme: při kladných cenách statků nejsme bez peněz prostě žádné statky schopni zakoupit.

(W2) Ve vztahu k M se předpokládá, že zvýšený příjem je vynaložen účelně a není alokovan do neužitečných komodit. Dle téže (W2), se zvýšením kterékoliv z cen p_i (při neměnných výdajích) užitek nemůže nikdy vzrůst (nemusí však ani nutně klesnout, neboť ke zdražení cen může dojít u nenakupovaných statků).²

Spojitosť (W3) v cenách i příjmu odpovídá reálné situaci, že „nepatrná změna“ kterékoliv z cen p_i ani příjem M nemůže vyvolat skokovitou (nespojitou) změnu užitku plynoucího z nakupovaného spotřebního koše.

Vlastnost (W4) lze chápat tak, že pokud by došlo k tomu, že by se všechny ceny p_1, p_2, \dots, p_n i příjem M změnil v témže poměru (např. λ -násobně), nezmění se na situaci viděné očima spotřebitele vůbec nic: při nezměněných relativních cenových poměrech p_i/M není ze strany spotřebitele zřejmý důvod ke změně poptávkového chování po potenciálně dostupných komoditách. (Spotřebitel se bude řídit stejnými preferenčními hledisky jako dříve.)

Konečně poslední z vlastností (W5) interpretována v první verzi (*konkávnost*) obrazně znamená, že při libovolné změně cen bude užitek z „lineární směsi“ obou cenových vektorů přinejmenším roven „lineární směsi“ dílčích užiteků získaných s jedním, resp. druhým cenovým vektorem. Ve vlastnosti se nepřimo odráží „zisk v užitku“ plynoucí z toho, že při cenových změnách lze aspoň něco „ušetřit“ tím, že při substitučních možnostech lze kupovat méně z více zdražených statků a více z méně zdražených (či zlevněných nebo těch, u kterých se cena nezměnila). Druhá interpretace (*kvazikonvexnost*) pak určuje horní mez, kterou užitek ze směsi nemůže přesáhnout (ta je dána velikostí užitku z „užitkově příznivější“ cenové situace).

$$\psi(M^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \leq \max\{\psi(M^0, p); \psi(M^0, p^*)\}$$

Vlastnost (W5*), která je ... , naopak omezuje dosažený užitek při „promíchání“ cen ze dvou cenových vektorů hodnotou většího z užiteků dosaženého při použití každého cenového vektoru samostatně.

Poznámka: Všechny zde uvedené vlastnosti lze vyvodit z vlastností U(1) - U(4) **přímé užitkové funkce** a z vlastností matematické funkce **Minimum**.

² Již jsme zmínili, že výdaj v ztotožňujeme s příjmem spotřebitele M

Doplňěk Konvexnost, konkávnost, kvazikonvexnost a kvazikonkávnost

Řekneme, že spojitá funkce $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n proměnných x_1, x_2, \dots, x_n (definovaná na konvexní množině X) je pro dva body $x, z \in X$ (aniž víme, zda $G(x) < G(z)$ nebo naopak)

(A1) **ryze konvexní**, jestliže platí ostrá nerovnost

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) < \lambda G(x) + (1-\lambda)G(z)$$

(B1) **ryze konkávní**, jestliže platí ostrá nerovnost

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) > \lambda G(x) + (1-\lambda)G(z)$$

(C1) **ryze kvazikonvexní**, jestliže platí ostrá nerovnost

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) < \max\{G(x), G(z)\}$$

(D1) **ryze kvazikonkávní**, jestliže platí ostrá nerovnost

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) > \min\{G(x), G(z)\}$$

ve všech případech pro libovolné skalární $\lambda \in (0, 1)$.

(A2) **konvexní**, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \lambda G(x) + (1-\lambda)G(z)$$

(B2) **konkávní**, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) \geq \lambda G(x) + (1-\lambda)G(z)$$

(C2) **kvazikonvexní**, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \max\{G(x), G(z)\}$$

(D2) **kvazikonkávní**, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(\lambda x + (1-\lambda)z) \geq \min\{G(x), G(z)\}$$

ve všech případech pro libovolné skalární $\lambda \in (0, 1)$.

Je-li známo, ve kterém z obou bodů je hodnota funkce $G(\cdot)$ větší, např. platí-li $G(x) < G(z)$, pak lze výše uvedené definice modifikovat např. takto:

(A3) **konvexní**, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(x/2 + z/2) \leq 0.5G(x) + 0.5G(z)$$

(B3) **konkávní**, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(x/2 + z/2) \geq 0.5G(x) + 0.5G(z)$$

(C3) **kvazikonvexní**, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(x/2 + z/2) \leq G(z)$$

(D3) **kvazikonkávní**, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(x/2 + z/2) \geq G(x)$$

4.3 Marshallovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.1A) s podmínkou (3.1B) pro neznámé x_1, x_2, \dots, x_n , případně i veličinu λ obdržíme pro každou komoditu

Definice 15 Poptávkovou funkci po i -té komoditě [commodity demand function] v Marshallovském tvaru [in the Marshallian form], zapsatelnou ve tvaru

$$(4.4) \quad x_i = x_i(M, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru p a příjmu spotřebitele M .

Definice 15A Máme-li poptávku po komoditě x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vyjádřenu zápisem (4.4) s nějakou poptávkovou funkcí $x_i = x_i(M, p_1, \dots, p_n)$ proměnných M a p , pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí g_1, \dots, g_n má následující vlastnosti:

(D1M) $g_i(M, p)$ je reálná konečná nezáporná funkce a platí pro ni $g_i(M, p) \geq 0$.

(D2M) $g_i(M, p)$ je nerostoucí v ceně i -té komodity p_i a neklesající v příjmu M .

(D3M) $g_i(M, p)$ je spojitá v příjmu M a spojitá v p_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

(D4M) Marshallovské poptávkové funkce $x_i = x_i(M, p)$ jsou homogenní stupně 0 současně v cenách a příjmu. Platí tedy $g_i(M, \lambda p) = g_i(M, p)$.

(D5M) Úplná soustava marshallovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^n p_i g_i(M, p) = M$.

(D6M) "Křížové" derivace marshallovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou symetrické, tzn. platí

$$\frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j} + p_j \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M} = \frac{\partial x_j(M, p)}{\partial p_i} + p_i \frac{\partial x_j(M, p)}{\partial M} \quad \text{pro všechna } i, j$$

(D7M) Matice S rozměru $n \times n$ sestávající z prvků $s_{ij} = \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j} + p_j \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M}$ je

negativně semidefinitní, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S podmínku

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j} + p_j \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M} \right] \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$$

takže lze psát $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$. Přímým důsledkem negativní semidefinitnosti S jsou podmínky $s_{ii} \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Vlastní cenové pružnosti jsou nekladné.

4.4 Hicksovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.6A) s podmínkou (3.6B) pro neznámé x_1, x_2, \dots, x_n , (případně i výraz pro Lagrangeův multiplikátor μ) obdržíme pro každou komoditu

Definice 16 Poptávkovou funkci po i -té komoditě [commodity demand function] v **Hicksovském tvaru** [in the Hicksian form], zapsatelnou ve tvaru

$$(4.5) \quad x_i = h_i(p_1, p_2, \dots, p_n, u)$$

kteřá je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru p a na spotřebitelem žádané hladině užitku u .

Definice 16A Máme-li poptávku po komoditě x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vyjádřenu zápisem (4.5) s nějakou poptávkovou funkcí $h_i(p_1, \dots, p_n, u)$ proměnných u a p , pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí h_1, \dots, h_n má následující vlastnosti:

(D1H) $h_i(p_1, \dots, p_n, u)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce** a platí pro ni $h_i(p_1, \dots, p_n, u) \geq 0$.

(D2H) $h_i(p_1, \dots, p_n, u)$ je **nerostoucí v ceně i -té komodity p_i a neklesající v užitku u** .

(D3H) $h_i(p_1, \dots, p_n, u)$ je **spojitá v užitku u a spojitá v p_i ($i = 1, 2, \dots, n$)**.

(D4H) Hicksovské poptávkové funkce $x_i = h_i(p_1, \dots, p_n, u)$ jsou **homogenní stupně 0 v cenách p** ³. Znamená to, že platí $h_i(p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n, u) = h_i(p_1, p_2, \dots, p_n, u)$.

(D5H) Úplná soustava Hicksovských poptávkových funkcí je **aditivní a součtovatelná**. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^n p_i h_i(p_1, \dots, p_n, u) = M$.

(D6H) "Křížové" derivace hicksovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou **symetrické**, tzn. platí $\frac{\partial h_i(p_1, \dots, p_n, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(p_1, \dots, p_n, u)}{\partial p_i}$ pro všechna i, j .

(D7H) Matice S^* rozměrů $n \times n$ sestávající z prvků $s_{ij}^* = \frac{\partial h_i(p_1, \dots, p_n, u)}{\partial p_j}$ je **negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S^* podmínku

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i(p_1, \dots, p_n, u)}{\partial p_j} \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$$

Matice S^* je tvořena prvky s_{ij}^* , kde $s_{ij}^* = \frac{\partial h_i(p_1, \dots, p_n, u)}{\partial p_j}$, takže lze psát $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}^* \cdot \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$.

Důsledkem **negativní semidefinitnosti S^*** jsou podmínky $s_{ii}^* \leq 0$.

³ Je-li výchozí (výdajová) funkce homogenní stupně 1, je její derivace (poptávková funkce) homogenní stupně 0.

Poslední výrok tvrzení ad (D1) vyjadřuje skutečnost, že s nulovým příjmem nelze pořídit ani nejmenší množství žádného užitečného statku. Dvě vlastnosti obsažené v (D2) charakterizují závisle proměnnou (poptávku) jako monotónní funkce ceny p_i a příjmu M , přičemž zvýšení ceny neznámá nutně snížení poptávky (zájem spotřebitele může být upřen na jiné komodity) a zvýšení příjmu nemusí nutně vést (ze stejného důvodu) ke zvýšení poptávky po i -tém statku. Spojitost (D3) ve všech argumentech vylučuje skokovitý přírůstek poptávky při nepatrné změně ceny či příjmu. Vlastnosti uvedené v (D5) vyjadřují úplné rozdělení disponibilního příjmu M na nákup (ne však nutně všech) n komodit bez ohledu na to, jakou formulaci poptávkových funkcí přijmeme. V podmínkách (D4) je obsažena zásada, že proporční změna důchodu a cen neovlivní nijak chování poptávky po žádné z komodit.

Součtovatelnost (D5M) a homogenita nultého stupně (D4M) jsou důležitým nástrojem v teoretické analýze poptávkových vztahů, nicméně častěji se vyjadřují zprostředkovaně v zápisech s derivacemi poptávkových funkcí (místo původních poptávkových funkcí).

Z **podmínky součtovatelnosti (D5M)** takto vyplývají vztahy (platné pro $i = 1, 2, \dots, n$):

$$(4.6A,B) \quad \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{\partial x_k(l, p)}{\partial l} = 1 \quad \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial g_k(l, p)}{\partial p_i} + g_i(l, p) = 0$$

takže změna v příjmu M a cenách p způsobí přeskupení v nákupech, které neporuší výdajové omezení. Získáme je derivováním rozpočtového omezení $\sum_{i=1}^n p_i x_i = M$ podle příjmu, resp. podle ceny p_i .

Identity (4.6A) a (4.6B) se nazývají **Engelova** resp. **Cournotova agregační podmínka**. Z podmínky homogenity nultého stupně (D4M) Marshallovských poptávek obdobně vyplývá, že pro $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$(4.7) \quad \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{\partial x_k(l, p)}{\partial x_k} + l \cdot \frac{\partial x_k(l, p)}{\partial l} = 0$$

Ověření: Z podmínky homogenity 0-stupně vyplývá $g_k(M, \lambda p) = l_k(l, p)$ a tedy

$$\frac{\partial g_k(M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(l, p)}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial g_k(M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M, \lambda p)}{\partial (M)} \cdot \frac{\partial (M)}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_k(M, \lambda p)}{\partial (p)} \cdot \frac{\partial (p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M, \lambda p)}{\partial (M)} \cdot M + \frac{\partial g_k(M, \lambda p)}{\partial (p)} \cdot p$$

Speciální volbou $\lambda = 1$ dostaneme

$$0 = \frac{\partial g_k(l, p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(l, p)}{\partial M} \cdot M + \frac{\partial g_k(l, p)}{\partial p} \cdot p = \frac{\partial g_k(l, p)}{\partial M} \cdot M + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_k(l, p)}{\partial p_k} \cdot p_k$$

Chování poptávky spotřebitele vůči každé komoditě $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ jen v závislosti na jeho příjmu (tzn. při pevném cenovém vektoru p) pak udávají **Engelovy křivky**.

4.5 Engelovy křivky

Fixujeme-li ceny $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ v **Marshallovské poptávkové funkci** (4.4), získáme

Definice 17 Engelovu křivku pro i -tou komoditu [Engel curve] zapsatelnou ve tvaru

$$(4.8) \quad x_i = f_i(M),$$

která je charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na jeho příjmu M a odvoditelné z poptávkových funkcí $g_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ poté, co do nich dosadíme jako pevné hodnoty ceny jednotlivých komodit p_1, p_2, \dots, p_n .

Definice 17A Máme-li poptávku po i -té komoditě x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vyjádřenou zápisem (4.8) s nějakou **Engelovou křivkou** $f_i(M)$ jedné proměnné, pak každá tato Engelova křivka má následující vlastnosti :

(E1) Engelova křivka $f_i(M)$ je reálná, konečná nezáporná funkce a platí $f_i(M) \geq 0$.

(E2) Engelova křivka $f_i(M)$ je neklesající v příjmu M .

(E3) Engelova křivka $f_i(M)$ je spojitá v M .

(E4) Engelova křivka $f_i(M)$ je konkávní v M .

(E5) Úplná soustava Engelových křivek je součtovatelná, tzn. platí $\sum_{i=1}^n p_i f_i(M) = M$.

(E6) Platí Engelova agregační podmínka $\sum_{k=1}^n p_k \cdot \frac{\partial f_k(M)}{\partial M} = 1$

Vlastnosti Engelovy křivky $f_i(M)$, $i = 1, 2, \dots, n$ jsou vesměs konformní s vlastnostmi Marshallovské poptávkové funkce $g_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$, pokud při pevném \mathbf{p} omezíme pozornost na chování poptávky ve vztahu k příjmu. Navíc se předpokládá konkávnost (E4) $f_i(M)$ jako funkce jedné proměnné M a úplné vynaložení spotřebitelova příjmu na pořízení komodit (ne nutně všech) při jakékoliv úrovni M . **Engelova křivka** je (jen) slabě monotónní, neboť zvýšení příjmu nemusí nutně vést ke zvýšení poptávky právě po i -té komoditě.

Tečna k Engelově křivce vyjadřuje hodnotu mezního sklonu ke spotřebě dané komodity, tzn. poměr mezi (limitně chápanou) změnou spotřeby (realizované poptávky) x_i a

změnou důchodu M tj. $\frac{\partial x_i}{\partial M}$. Připomeňme, že

$$\text{výraz } s_{iM} = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i} = \frac{\partial x_i}{x_i} / \frac{\partial M}{M} \text{ nazýváme } \mathbf{příjmová pružnost poptávky}.$$

Na její hodnotě závisí klasifikace ekonomických statků: V rámci nich

a) je-li příjmová pružnost poptávky větší než 1, pak jde o *luxusní statek*.

b) je-li příjmová pružnost poptávky v intervalu (0,1), jde o *normální statek*.

c) je-li příjmová pružnost poptávky rovna 0, jde o *příjmově inertní statek*

d) je-li příjmová pružnost poptávky menší než 0, jde o *inferiorní statek*.

4.6 Shephardovo lemma a Royova identita

Nejdůležitějším tvrzením, které platí mezi **výdajovou funkcí** a **soustavou Hicksovských poptávkových funkcí** v rovnovážné situaci, je **Shephardovo lemma**. **Ronald W. Shephard [1953]** je formuloval původně pro vztah mezi **nákladovou funkcí** (jako obdobou výdajové funkce) a **poptávkovými funkcemi** (po výrobních faktorech) v **teorii produkce**.

Tvrzení 6 Shephardovo lemma [Shephard lemma]

Máme dānu **výdajovou funkci** $E(\zeta, p)$ příslušnou **k užitkové funkci** $u(\zeta)$ s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5). Potom každou ze **soustavy poptávkových funkcí po komoditách** získáme tímto způsobem

$$(4.9) \quad x_i = \frac{\partial E(\zeta, p)}{\partial p_i}$$

což znamená, že **tvár poptávkové funkce po komoditě ζ_i** je určen jako **parciální derivace výdajové funkce podle ceny této komodity**. Toto fundamentální tvrzení je základním východiskem při konstrukci **soustavy poptávkových funkcí** po užitek přinášejících statcích z **výdajové funkce**.

Důkaz tvrzení 6

Zvolme pevně, ale jinak libovolně cenový vektor p^0 , hladinu užitku u^0 a příslušný vektor optimálních (ve vztahu k p^0) n komoditních množství x^0 . Dále pro jakýkoliv jiný cenový vektor p definujme funkci $\chi(p)$ vztahem

$$(4.10) \quad \chi(p) = \sum_{k=1}^n p_k x_k^0 - E(\zeta^0, p)$$

Protože x^0 není nutně optimální ve vztahu k p , výdaje na pořízení množství x^0 při cenách p musí vždy být přinejmenším tak velké, jako jsou analogické výdaje na pořízení těch množství, která jsou optimální vzhledem k p^0 - tyto minimální výdaje udává výdajová funkce $E(\zeta^0, p)$. Tedy $\chi(p)$ je vždy větší nebo nejméně rovna 0. Dále víme, že $\chi(p^0)$ je rovna 0, tj. χ nabývá svého minima, pokud p je rovno p^0 . Proto všude tam, kde existují derivace $\frac{\partial \chi(p)}{\partial p_i}$, musí platit v komoditní kombinaci p^0 podmínka:

$$(4.11) \quad \frac{\partial \chi(p^0)}{\partial p_i} = x_i^0 - \frac{\partial E(\zeta^0, p^0)}{\partial p_i} = 0$$

Protože jsme pevnou hodnotu p^0 volili libovolně, je tím vztah (4.9) dokázán. \square .

Poznámka 1 I když výdajová funkce splňuje všechny vlastnosti (V1),..., (V5), nelze nijak obecně zaručit, že pomocí **Shephardova lemmatu** odvozený systém poptávkových funkcí splňuje všechny vlastnosti předpokládané u **funkci** deklarovaných jako (**Hicksovské poptávkové**, tj. (D1H) ,... , (D7H).

Poznámka 2 Opačný postup - tzn. sestavení výdajové funkce integrací systému poptávkových funkcí (aniž trváme na splnění vlastností (D1M),..., (D7M) - není obecně uskutečnitelný, a to ani tehdy ne, jestliže s jistotou víme, že taková výdajová funkce E^0, p existuje a že ji lze vyjádřit v explicitním tvaru. Pokud lze takovou výdajovou funkci zkonstruovat ze soustavy poptávkových funkcí, říkáme, že tato soustava splňuje tzv. "podmínku integrability".

Dalším užitečným tvrzením je věta, která charakterizuje určitou „příbuznost“ struktury mezi funkčními tvary u jednotlivých poptávkových funkcí.

Tvrzení 7 Symetrie Hicksovských poptávkových funkcí [symmetry of the Hicksian demand functions]

Mějme dánu výdajovou funkci E^0, p příslušnou k přímé užitkové funkci u s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5), která má navíc spojité všechny parciální derivace aspoň do 2. řádu včetně. Potom pro systém poptávkových funkcí vyvozených pomocí Shephardova lematu (4.9) platí:

$$(4.12) \quad \frac{\partial x_j^0, p}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k^0, p}{\partial p_j}$$

Důkaz tvrzení 7

Okamžitě vyplývá z tzv. **Youngovy věty** známé z matematické analýzy deklarující nezávislost druhých parciálních derivací na pořadí derivování, jestliže jsou tyto druhé parciální derivace spojité. Pak platí:

$$(4.13) \quad \frac{\partial x_j^0, p}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\partial x_k^0, p}{\partial p_j} \right) = \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{\partial x_j^0, p}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial x_k^0, p}{\partial p_j}$$

čímž je důkaz tvrzení proveden. \square .

V tomto smyslu lze tedy mluvit o podmínce symetrie každé funkce ze soustavy poptávkových funkcí. Je tedy zřejmé, že všechny poptávkové funkce musí mít formálně příbuznou funkční podobu, která se může u jednotlivých funkcí systému lišit různými hodnotami parametrů těchto funkcí, nemůže jít však o principiálně odlišný funkční typ. (např. jedna poptávková funkce nemůže být logaritmem součtu kvadrátů svých argumentů, zatímco druhá by byla arkustangentou součinu odmocnin těchto argumentů). Uvedená podmínka tedy výrazně snižuje „rozmanitost“ v možných vzájemných odlišnostech jednotlivých poptávkových funkcí.

Shephardovo lemma umožňuje generovat Hicksovy poptávkové funkce z výdajové funkce. Pokud bychom chtěli odvodit Marshallovské poptávkové funkce, stačí k tomu substituovat za argument u ve výdajové funkci hodnoty nepřímé užitkové funkce ψ , která má argumenty p a M . Dostaneme

$$(4.14) \quad x_i = x_i^0, p = x_i^0, p = x_i^0, p$$

tzn. soustavu poptávkových funkcí (pro $i = 1, 2, \dots, n$) v Marshallovském tvaru.

Pokud bychom byli postaveni před **opačný problém**, tj. vyvodit **Hicksovy poptávkové funkce z Marshallových**, potom lze postupovat v inverzním směru. Máme-li dány $g_i(M, p)$, $i = 1, 2, \dots, n$, dosadíme za argument M -výdaj je plně vynaložen na nákup x - hodnotu výdajové funkce $E(p)$.

$$(4.15) \quad x_i = g_i(M, p) = E_i(E(p), p) = E_i(p)$$

Vztah mezi **nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí**, jež jsou vzájemně inverzní, lze zapsat identitou

$$(4.16) \quad \psi(M, p) = E(E(p), p) = M$$

Obdobou **Shephardova lemmatu** formulovaného ve vztahu k výdajové funkci pro vyvození poptávkových funkcí (tentokrát v *Marshallovském tvaru*) z nepřímé užitkové funkce $\psi(p, M)$ je vztah známý jako **Royova identita**. Je pojmenována po francouzském ekonomu a matematikovi **René Royovi** [1943]. Nezávisle na něm ji formuloval jiný francouzský matematik **Jean Villé** [1941].

Tvrzení 8 Royova identita [Roy-Villé identity]

Máme dānu **nepřímou užitkovou funkci** $\psi(p, M)$ příslušnou **užitkové funkci** $u(x)$ s vlastnostmi (W1), (W2), (W3), (W4), (W5). Potom **soustavu Marshallových poptávkových funkcí po komoditách** získáme tímto způsobem

$$(4.17) \quad x_i(M, p) = \frac{\partial \psi(M, p)}{\partial p_i}$$

To znamená, že **Marshallovskou poptávkovou funkci** po i -té komoditě obdržíme jako záporně vzatý podíl dvou parciálních derivací nepřímé užitkové funkce $\psi(M, p)$, a to jednak podle ceny i -té komodity, jednak podle spotřebitelova příjmu M .

Důkaz tvrzení 8

Vztahem (4.7) jsme zapsali, že **výdajová funkce a nepřímá užitková funkce jsou vzájemně v inverzním vztahu**. Ten můžeme vyjádřit zápisem identity:

$$(4.18) \quad \psi(E(p), p) = M$$

Když tuto **identitu** (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot p a u) **derivujeme podle pevně zvolené ceny** p_i , dostaneme **uplatněním řetězového pravidla pro derivaci složené funkce**

$$(4.19) \quad \frac{\partial \psi(E(p), p)}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi(u, p)}{\partial p_i} + \frac{\partial \psi(u, p)}{\partial u} \cdot \frac{\partial E_i(u, p)}{\partial p_i} = 0, \text{ neboť}$$

při pevném u je $\frac{\partial \psi}{\partial p_i} = 0$ a $\frac{\partial \psi}{\partial u} = 1$, neboť $\frac{\partial E_j}{\partial p_i} = \delta_{ij}$, (**Kroneckerovo δ**), $i, j = 1, 2, \dots, n$ a dále $E_i(u, p) = 1$, neboť příjem M je rozdělen beze zbytku.

Vztah (4.19) můžeme tedy po substituci $E(u, p) = I$ přepsat do tvaru

$$(4.20) \quad \frac{\partial E(u, p)}{\partial I} \cdot \frac{\partial E(u, p)}{\partial p_i} + \frac{\partial E(u, p)}{\partial p_i} = 1$$

Ze **Shephardova lemmatu** dále víme, že $\frac{\partial E(u, p)}{\partial p_i} = x_i(u, p) = x_i$ (tj. Hicksovská poptávka po i -tém statku). Odtud tedy již snadno odvodíme

$$(4.17) \quad x_i = \frac{\partial E(u, p)}{\partial p_i} = \frac{\partial E(u, p)}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial p_i} \quad \square$$

Poznámka 3 Jestliže nepřímou užítkovou funkci vyjádříme v normalizovaném tvaru, tzn. argumenty představujícími jednotkové ceny statků dělené příjmem, tj.

$\psi\left(\frac{p_1}{M}, \frac{p_2}{M}, \dots, \frac{p_n}{M}, 1\right) = \psi^*(r_1, r_2, \dots, r_n)$, kde pracujeme s n -členným vektorem normovaných cen (r_1, r_2, \dots, r_n) , pak lze **Royovu identitu** zapsat jako

$$(4.21) \quad \frac{p_i x_i}{M} = \frac{\frac{\partial \psi^*(r)}{\partial \log r_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi^*(r)}{\partial \log r_j}}$$

tedy ve tvaru vyjadřujícím rozpočtovou účast i -té komodity na celkovém příjmu M jako podíl parciální derivace nepřímé užítkové funkce podle logaritmované ceny této komodity a součtu analogicky vyjádřených parciálních derivací $\psi^*(r)$ podle všech logaritmovaných cen.

*/ Podrobněji R.W. Shephard: *Cost and Production Functions* [1953] nebo tentýž autor: *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton U.P. [1970].

⁴ Vzhledem k vlastnosti (W2) je ve výrazu (4.17) čítecil nekladný, zatímco jmenovatel je kladný. Výraz pro Marshallovskou poptávku na levé straně musí být přirozeně nezáporný.

4.7 Schématické vyjádření vztahů

mezi *přímou užitkovou, nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí a soustavami poptávkových funkcí v Marshallovském a Hicksovském tvaru*

K vyjádření vztahů mezi ekonomickými funkčními typy může sloužit schéma

rozpočtové omezení

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M$$

Minimalizační úloha

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ & \text{za podmínky} \\ & u(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \end{aligned}$$

substitute

$$x_i = x_i^0(p)$$

VÝDAJOVÁ FUNKCE

$$E(p)$$

Shephardovo lemma

$$x_i = \frac{\partial E}{\partial p_i}(p)$$

derivate E podle p_i

spotřebitel

užitková funkce

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Maximalizační úloha

$$\begin{aligned} & \text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \text{za podmínky} \\ & \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M, x_i \geq 0 \end{aligned}$$

substitute

$$x_i = x_i^M(p)$$

NEPŘÍMÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

$$\psi(M, p)$$

← inverze →

Royova identita

$$x_i = - \frac{\partial \psi}{\partial p_i}(M, p)$$

záporný podíl derivací ψ podle p_i, M

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH V HICKSOVĚ TVARU

$$x_i = x_i^H(p)$$

← substitute →

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH V MARSHALLOVĚ TVARU

$$x_i = x_i^M(p)$$

4.8 Problém „integrability“

Poznámka 4

Poptávkové funkce v Marshallovském tvaru lze získat v podstatě třemi způsoby:

(A) Z **přímé užitkové funkce** **přímým řešením maximalizačního problému (1A)** při **rozpočtovém omezení (1B)**.

(B) Z **nepřímé užitkové funkce** pomocí **Royovy identity (4.15)**

(C) Z **Hicksovských poptávkových funkcí (4.5)** **substitucí (4.13)**

Jen u druhého způsobu je však zajištěn úspěch. **Cesta řešením maximalizačního problému zpravidla nevede k vyjádření Marshallovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru** a pokud je toto možné, **bude zpravidla zejména v obecných n-komoditních případech výsledný výraz pro poptávky komplikovaný** (obecně se všemi parametry výchozí přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). **Ani v případě (C) nemusíme vždy získat explicitní tvar poptávek** (Problém je ale méně vážný než v případě (A)).

Poznámka 5

Poptávkové funkce v Hicksovském tvaru lze získat rovněž třemi způsoby:

(A) Z **přímé užitkové funkce** **přímým řešením minimalizačního problému (6A)** při **užitkovém omezení (6B)**.

(B) Z **výdajové funkce** pomocí **Shephardova lemmatu (4.9)**

(C) Z **Marshallovských poptávkových funkcí (4.4)** **substitucí (4.13)**

I zde je úspěch zajištěn jen ve druhém případě. **Řešení minimalizačního problému nemusí vést k vyjádření Hicksovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru** a pokud **to tak bude, budou** v obecných n-komoditních případech **výsledné výrazy pro poptávky komplikované** (se všemi parametry přímé užitkové funkce, všemi cenami a užitkem). Ani zde u (C) **nemusíme obecně získat explicitní tvar poptávek** (byť problém je méně vážný než v (A)).

Vztah (11) $x_i(E(u^0, p)) = x_i(u^0, p)$ a **Shephardovo lemma (4.9)** dovolují psát obě **soustavy** (Hicksovských i Marshallovských) **poptávkových funkcí** vyjádřeními v **parciálních diferenciálních rovnicích**

$$(4.22A,B) \quad x_i(E(u^0, p)) = \frac{\partial x_i(u^0, p)}{\partial p_i} \quad \text{resp.} \quad x_i(M, p) = \frac{\partial x_i(\Psi(M, p), p)}{\partial p_i}.$$

Řešením jedné či druhé soustavy (4.22) pro $E(u, p)$, resp. $\Psi(M, p)$ bychom tedy mohli – *aspoň v principu* – získat **výdajovou, resp. nepřímou užitkovou funkci**.

Vytvoření **výdajové funkce** $E(u, p)$ z úplné soustavy **Hicksovských poptávkových funkcí** $h_i(u, p)$ z (4.5) je však **možné jen za předpokladů (D6H), (D7H)**, tzn., že **matice S^* musí být symetrická a pozitivně semidefinitní**.

Zpětná rekonstrukce nepřímé užitkové funkce $\psi(u, p)$ z úplné soustavy marshallovských poptávkových funkcí $g_i(u, p)$ z (4.4) je možné jen za předpokladů (D6M), (D7M), tzn. pokud Sluckého substituční matice S bude symetrická a pozitivně semidefinitní.

4.9 Alternativní vyvození Sluckého rovnice

Sluckého rovnici (6.18) odvozenou v části 6 přímo můžeme vyvodit také jiným způsobem, při kterém využijeme Shephardova lemmatu.

Vydeme přitom z identity $h_i(u, p) = x_i(E(u, p), p)$,

kterou derivujeme podle ceny j -tého statku p_j . Dostaneme tak

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial E(u, p)} \cdot \frac{\partial E(u, p)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial p_j},$$

Protože však zřejmě $E(u, p) = 1$, $\frac{\partial E(u, p)}{\partial p_j} = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo δ) a protože dle

Shephardova lemmatu (4.9) platí $\frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial p_j} = x_j \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial E(u, p)}$, dostáváme z předchozího

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial E(u, p)} \cdot x_j + \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial p_j}, \text{ neboli}$$

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M} \cdot x_j + \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j},$$

Poznámka 1 Povšimněme si, že výraz vlevo reprezentuje Hicksovské, zatímco oba výrazy vpravo Marshallovské pojetí. Po přeskupení členů již dostáváme Sluckého rovnici v obvyklém zápisu

$$\frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial p_j} = -x_j \cdot \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial E(u, p)} + \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial p_j}, \text{ resp.}$$

$$\frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j} = x_j \cdot \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M} + \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j}, \quad \square.$$

Zznamenejme, že důchodový člen je reprezentován Marshallovským zápisem, zatímco substituční člen (obecně definovaný jako $X_{ij} = \lambda \cdot \frac{|U_{ij}|}{|U|} = \frac{p_j}{p_i} \cdot \frac{|U_{ij}|}{|U|}$) je vyjádřen v Hicksovské notaci (s nepřítomností M).

Poznámka 2 Vzhledem k symetrii Hicksovských poptávkových funkcí

$$\frac{\partial x_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(u, p)}{\partial p_i}$$

platí pro **Marshallovské poptávkové funkce** tato symetrie

$$\frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M} \cdot x_j + \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(M, p)}{\partial M} \cdot x_i + \frac{\partial x_j(M, p)}{\partial p_i}$$

□.