Teorie produkce

***Teorie produkce* je** další z **oblastí matematické ekonomie**, v níž matematické nástroje slouží k formalizaci mikroekonomické teorie. **Analyzuje se zde chování typického výrobního ekonomického subjektu (firmy), který usiluje o racionální fungování výrobního procesu** v tržním prostředí, kde **ceny výrobních faktorů**, **příp. výrobků jsou určeny mimo vůli výrobce**, jsou tedy považovány za exogenní veličiny. Soubor *výrobních faktorů* v rámci uvažované technologie (*souborů výrobních postupů*, *zkušeností*, *informací*, *know-how*) vede k dosažení určité úrovně produkce (*výroby*, *výstupu*, *outputu*). **Výrobce** přitom primárně **usiluje o maximalizaci ziskové stránky výroby tzn. o maximalizaci rozdílu mezi objemem tržeb** z prodaných výrobků **a** mezi s výrobou souvisejícími **výrobními náklady.**

Zatím ponecháme stranou cenová hlediska a soustředíme se na ”technologickou” stránku výrobního procesu. Popíšeme elementární vlastnosti, které charakterizují abstraktně chápaný výrobní vztah, pomocí něhož se výrobní faktory transformují v rámci dané technologie do celkové produkce. Tento vztah nazýváme ***produkční funkce***. Později k tomuto připojíme analýzu cenově-nákladové stránky výroby, abychom mohli zkoumat zákonitosti, které v daném prostředí platí mezi uvažovanými ekonomickými kategoriemi. V některých směrech zde spatříme obdobu ekonomických funkčních typů, se kterými jsme se dříve setkali v prostředí analýzy spotřebitelské poptávky.

1. Produkční množiny, produkční funkce

Nejprve zavedeme základní pojmový aparát umožňující na základě množinových kategorií (tzv. **produkčních množin vstupů**, popř. v**ýstupů**) zavést pojem **produkční funkce**. Omezíme se na výrobní vztahy v naturálním pojetí, zatím bez zavedení cenových vektorů (výrobních činitelů, resp. výrobků).

Produkční funkce však není výchozím, fundamentálním pojmem. Lze uplatnit složitější analytický aparát (tzv. **produkční korespondence**, či **relace**), který však překračuje rámec aktuální potřeby výkladu. Tyto pojmy poprvé důkladně vyšetřoval počátkem 50.let americký matematický ekonom prof. **Ronald W.Shephard**, který při teoretické analýze elementárních vlastností produkčních vztahů dospěl k možnosti popsat strukturu vlastností **produkčních množin** axiomaticky.

Definice 1

Uvažujeme-li určitou hodnotu velikosti produkce $y^0 > 0$, pak pro danou technologii je příslušná **produkční množina vstupů [production input set]** $L(y^0)$ definována jako **množina kombinací** všech **výrobních faktorů, s nimiž lze** v dané technologii **dosáhnout produkce** y^0. Jestliže této technologii odpovídá konkrétní produkční funkce $F(x)$, lze $L(y^0)$ vyjádřit jako

$$L(y^0) = \{x; x \ge 0, F(x) \ge y^0\}$$

V produkční množině vstupů jsou - jak patrno z definice - obsaženy i **neefektivní kombinace výrobních faktorů** (faktory jsou přítomny ve větších množstvích, než je nutné k dosažení produkce y^0). **Je** proto **účelné se zaměřit** jen **na hraniční body množiny** $L(y^0)$, případně na oblasti vyznačující se úsporným nakládáním s výrobními faktory ve vztahu k požadované úrovni produkce.

Definice 2

Izokvanta [isoquant] $Q(y^0)$ (na hladině produkce y^0) **produkční množiny vstupů** $L(y^0)$ **je definována jako**

$$Q(y^0) = \{x \in L(y^0), \Theta \cdot x \notin L(y^0)\} \qquad \text{pro skalární } \Theta \in [0,1)$$

Jde tedy **o množinu hraničních bodů** produkční množiny vstupů**, vymezující takové kombinace výrobních faktorů**, které jsou v níže uvedeném smyslu **postačující pro dosažení produkce na úrovni** y^0**.** Izokvantu ve vztahu k produkční funkci se chápat jako obdobu indiferenční křivky vůči užitkové funkci $u(x)$. Jinak ale se produkční funkce vzhledem k objektivní možnosti měřit velikost produkce (peněžně i naturálně) od užitkové funkce liší mj. právě svým kardinálním vymezením.

Definice 3

Účinná (efektivní) podmnožina [efficient subset] $E(y^0)$ produkční množiny vstupů je určena definicí

$$E(y^0) = \{x \in L(y^0), z \le x;\ ale\ z \ne x \Rightarrow z \notin L(y^0)\}$$

Účinná podmnožina $E(y^0)$ **představuje takové** varianty **nasazení výrobních faktorů, při kterých jsou tyto faktory vynakládány** právě **v minimálních nutných množstvích.** Abychom si lépe uvědomili **rozdíl mezi *izokvantou* a *účinnou podmnožinou*** (téže *produkční množiny vstupů* $L(y^0)$), všimněme si, že bod x leží na izokvantě $Q(y^0)$ právě tehdy, neexistuje-li žádný jiný bod z, který by byl jeho proporčním zmenšením (ležel by tedy na polopřímce spojující počátek souřadnic s bodem x nacházejícím se na izokvantě) a který by rovněž na této izokvantě ležel. Naproti tomu bod (tzn. kombinace výrobních faktorů) x účinné podmnožiny produkční množiny vstupů $E(y^0)$ nemůže být "zmenšen" v žádném směru rovnoběžném s osami souřadnic (aby tímto zmenšením vzniklý jiný bod z ještě ležel na účinné podmnožině). **Bod účinné podmnožiny musí být bodem izokvanty,** zatímco opačně tomu tak být nemusí.

Poznámka 1

Typickou vlastností množiny $L(y^0)$ **je její konvexnost**, která připouští technologie dělitelné v čase. Jestliže x, z náleží do $L(y^0)$, pak lze produkce y^0 dosáhnout tak, že po dobu λ používáme faktory v kombinaci x a po zbývající časový úsek $(1-\lambda)$ v kombinaci z.
Stejně jako vymezuje produkční funkce $F(x)$ soustavu produkčních množin vstupů, lze také obráceně pomocí posloupnosti produkčních množin vstupů $L(y)$ s vhodnými vlastnostmi definovat produkční funkci $F(x)$ vztahem

$$F(x) = Max\{y;\ x \in L(y)\}$$

Produkční funkce je definována - při vhodných vlastnostech produkčních množin vstupů jako je jejich uzavřenost a konvexnost pro každou úroveň produkce, prázdný průnik těchto množin při $lim\ y \to \infty$, tj. při neomezeně rostoucí produkci - **jako maximální** dosažitelný **výstup, disponujeme-li** danou **množinou výrobních faktorů** x.

2 Vlastnosti obecné produkční funkce

Na základě podrobné teoretické analýzy provedené v 50.letech **Ronald W.Shephardem**, lze pro obecnou produkční funkci $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ přijmout tuto axiomatickou soustavu vlastností:

(F1) $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = 0$; tj. **hodnototvorný výrobní proces může být realizován pouze s kladnými hodnotami** (aspoň některých) **výrobních faktorů.**

(F2) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ **je konečná reálná a nezáporná funkce proměnných** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ při jakýchkoliv konečných hodnotách výrobních faktorů vzatých z nezáporných definičních oborů $\mathbf{X}_j = \langle 0, +\infty)$ pro všechna $\mathbf{j} = 1, 2, \ldots, \mathbf{n}$.

(F3) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ **je neklesající funkce v každé proměnné.** Přidáním množství kteréhokoliv výrobního faktoru nemůže dojít k poklesu produkce. **Připouští se** však, že **mezní produktivita** určitého **faktoru** v některé výrobní situaci **může být nulová**, tzn. že ne vždy vede zvýšení množství použitého výrobního faktoru k růstu produkce.

(F4) Existuje-li taková kombinace výrobních faktorů $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ **nebo** $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$**, že** $\mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) > 0$ **pro nějaké skalární** $\lambda > 0$**, pak**

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) = +\infty$$

Předpoklad charakterizuje **vlastnost neomezeného růstu produkce, jestliže proporčně zvětšujeme množství faktorů v kombinaci, která poskytuje nenulový výnos.** To např. vylučuje uplatnění (jako produkčních) funkcí, které se blíží k "asymptotě" rovnoběžné s některou ze souřadnicových os.

(F5) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ **je shora polospojitá funkce** v celém definičním oboru.

Vzhledem k předpokladu (F3) lze ekvivalentně mluvit o polospojitosti zprava. Vlastnost přiblížíme definicí z matematické analýzy :

Funkce $F(x)$ je polospojitá shora (tj. je-li neklesající, zprava) v bodě $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_n$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $S_\delta(x^0)$ takové, že pro všechna $x \in S_\delta(x^0)$ platí $F(x) < F(x^0) + \varepsilon$.

Pro uvažované výrobní situace to znamená, že za určitých okolností může dojít ke skokům v růstu produkce (při přidání "nepatrně malého" množství některého z výrobních faktorů). Vlastnost koresponduje s připuštěním "kvalitativních změn v technologii" majících příčinu např. v technických inovacích (spíše půjde o změny na straně "kapitálu" či "technického pokroku" než v práci či surovinách).

(F6) $F(x)$ **je kvazikonkávní funkce** v celém definičním oboru. Formálně vyjádřeno, platí nerovnost

$$F(\lambda x + (1 - \lambda) z) \geq Min\{F(x), F(z)\}$$

pro libovolnou dvojici bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ z definičního oboru produkční funkce a libovolné λ z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Vlastnost je přímým důsledkem konvexnosti produkčních množin vstupů a garantuje udržení produkce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ při přechodu mezi dvěma faktorovými kombinacemi aspoň v té výši, která odpovídá méně produktivní faktorové kombinaci.

Konečně poslední vlastností, která se váže nikoliv k produkční funkci,nýbrž k účinné podmnožině, je **Shephardem** formulovaný, tzv. **“asymetrický” axiom**:

(F7*) Účinná podmnožina $E(y^0)$ produkční množiny vstupů $L(y^0)$ je ohraničená pro jakoukoliv hodnotu produkce y^0.

Uvedený axiom se nazývá asymetrický proto, že jeho obdoba není formulovatelná pro analogicky k $L(y^0)$ zkonstruované **produkční množiny výstupů** $P(x^0)$.

Většina funkčních tvarů užívaných k popisu produkčních vztahů jako analytické vyjádření produkční funkce, však **tento asymetrický axiom nesplňuje**.

Poznámka 2 – doplňující předchozí výklad

Produkční množina vstupů $L(y^0)$ obsahuje všechny možné vstupy (kombinace výrobních faktorů x), s nimiž je dosažitelný výstup (hodnota produkce) y^0.

$$L(y^0) = \{x : (x, y^0) \in Z(x,y)\}$$ [1]

2A Vlastnosti produkční množiny vstupů $L(y^0)$ pro libovolné m [2]**:**

(L1) $0 \notin L(y)$ **pro jakékoliv** $y > 0$, $L(0) = E_n^+$

S nulovými množstvími výrobních faktorů nelze získat kladnou **velikost produkce.**

(L2) Jestliže $x \in L(y)$ a $x^* \geq x$ **, pak platí** $x^* \in L(y)$

(L3) Jestliže (a) $x > 0$ **nebo**

(b) $x \geq 0$ **a současně** $\lambda * x \in L(y^*)$ **pro nějaké** $\lambda > 0$ **a** $y^* > 0$,

potom paprsek $\{\lambda x | \lambda \geq 0\}$ **protíná** všechny **množiny** $L(y)$ **pro všechna** $y \in [0,+\infty)$

(L4) Pro $y^2 \geq y^1 \geq 0$ **platí** $L(y^2) \subseteq L(y^1)$ **vnořování [nesting]**

(L5) $\bigcap_{0 \le y \le y^0}^{\infty} L(y) = L(y^0)$ **pro** $y^0 > 0$

(L6) $\bigcap_{y \in [0,+\infty)}^{\infty} L(y) = \emptyset$ **průnik je prázdná množina.**

(L7) $L(y^0)$ **je uzavřená množina pro všechna** $y^0 \in [0,+\infty)$

Z tohoto důvodu je *izokvanta* vždy součástí *produkční množiny vstupů.*

(L8) $L(y^0)$ **je konvexní množina pro všechna** $y^0 \in [0,+\infty)$

Úsečka spojující dvě faktorové kombinace poskytující produkci o velikosti y^0 je celá součástí produkční množiny vstupů odpovídající této produkci.

(L9) $E(y^0)$ **je ohraničená množina pro všechna** $y^0 \in [0,+\infty)$

---

[1] Zápisem $Z(x,y)$ rozumíme **množinu výrobních možností**, tj. množinu dvojic (vektorů) (x, y) kde výstupy x jsou dosažitelné s vstupy y.

[2] **Vlastnosti** (množinové) **jsou uvedeny v monografii Shephard , R.,W.: Theory of Cost a Production Functions. Princeton U.P. 1970 str. 14.**

V případě, že pracujeme s m **výrobky** (vyráběnými v dané technologii s nasazením n výrobních faktorů) **má smysl definovat** také **„duální“ množinovou strukturu**, tzv. **produkční množiny výstupů** $P(x)$.

V obecném schématu *produkčních korespondencí/produkčních relací* se pracuje s ***n*** výrobními faktory a **m** výrobky.

Produkční množina výstupů $P(x^0)$ **obsahuje všechny možné výstupy** (kombinace výrobků y), **které jsou dosažitelné** (vyrobitelné) **pomocí vektoru výrobních faktorů** x^0 .

$$P(x^0) = \{y;\ (x^0, y) \in Z(x,y)\}.$$

2B Vybrané vlastnosti produkční množiny výstupů $P(x^0)$ (jen informativně)

(P1) $P(x^0)$ **je uzavřená množina.**
Izokvanta je vždy součástí produkční množiny výstupů.

(P2) $P(x^0)$ **je konvexní množina.**
Úsečka spojující dvě faktorové kombinace je součástí produkční množiny výstupů.

(P3) Jestliže $\lim \mathbf{x}^t = +\infty$, potom $\bigcup_{t=1}^{\infty} P(\mathbf{x}^t) = E_n^+$. Sjednocením všech produkčních množin vstupů je celý nezáporný orthant. Zvětšujeme-li bez omezení množství všech výrobních faktorů, není velikost produkce shora limitována žádnou hranicí.

(P4) Pro $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1$ platí $P(\mathbf{x}^1) \subseteq P(\mathbf{x}^2)$ vnořování
Dosáhneme-li s určitou kombinací výrobních faktorů určité úrovně produkce, dosáhneme s většími hodnotami faktorů vždy aspoň stejnou hodnotu produkce.

(P5) $0 \in P(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \geq 0$.
Triviální konstatování, že nulová produkce je součástí produkční množiny výstupů: K výrobě „ničeho“ mohou být uplatněny výrobní faktory v jakýchkoliv množstvích (i nulových).