

Teorie portfolia

Kvantifikace očekávaného výnosu
a změny výnosu portfolia

Téma přednášky

- návrat k předchozímu cvičení
- historická metoda kvantifikace očekávaného výnosu a rizika daného aktiva
- expertní metoda kvantifikace očekávaného výnosu a rizika daného aktiva
- očekávaný výnos portfolia
- riziko očekávaného výnosu portfolia

Návrat k předchozímu cvičení

- jak upravit funkci Excelu pro výpočet kovariance v případě výběrového souboru s počtem prvků ≤ 30 ?
- proč v případě výběrového souboru s počtem prvků ≤ 30 kovarianční matice nevycházela správně, ale korelační ano?

Historická metoda

- známe-li pravděpodobnostní strukturu, to znamená, že budeme znát s jakou pravděpodobností (p_1, p_2, \dots, p_n) , bude i -tý cenný papír nabývat hodnot r_1, r_2, \dots, r_n , potom pro *střední míru zisku* (očekávanou výnosnost) cenného papíru můžeme psát

$$\bar{r}_i = \sum_{i=1}^n r_i \cdot p_i = r_1 \cdot p_1 + r_2 \cdot p_2 + \dots + r_n \cdot p_n$$

Historická metoda

- *riziko změny výnosnosti cenného papíru* potom bude

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (r_j - \bar{r}_i)^2 \cdot p_j}$$

- v praxi však většinou není pravděpodobnostní struktura známa
- proto se míra zisku i riziko změny míry zisku odhaduje z minulých pozorovaných hodnot pomocí *aritmetického průměru a směrodatné odchylky* (resp. *výběrové směrodatné odchylky*)

Historická metoda

- za hodnoty r_i dosadíme tzv. pozorované hodnoty výnosnosti cenného papíru

$$r_i = \frac{P_t - P_{t-k} + D}{P_{t-k}}$$

- vzhledem k tomu, že v ekonomice je obvykle dividendový výnos mnohem menší než výnos kapitálový, budeme dále uvažovat pouze výnos kapitálový

Historická metoda

- očekávaný výnos z portfolia za dobu jeho trvání je tvořen součtem krátkodobých výnosů akcií za tuto dobu trvání
- historický přístup patří i přes určitá negativa k základním orientačním způsobům kvantifikace výnosu
- je v podstatě jediným způsobem jak kvantifikovat kovariance mezi náhodnými veličinami, které popisují výnos jednotlivých aktiv
- tuto metodu jsme dělali na prvním cvičení

Expertní metoda

- jedná se o odhady expertů tržních cen jednotlivých aktiv v okamžiku realizace portfolia
- budeme u každého experta předpokládat, že provede odhad pro všechny cenné papíry, které chceme mít v portfoliu
- dále nebudeme uvažovat úročení nebo diskontování toku výnosů, které plynou z tohoto portfolia během jeho držení

Expertní metoda

- budeme používat následující značení
- TC_i – tržní cena i -tého aktiva v době vzniku portfolia
- N_e – počet expertů
- N_{ij} – celkový počet odhadů budoucí tržní ceny c_{ijk} a d_{ijk} i -tého aktiva, které provedl j -tý expert
- p_{ijk} - pravděpodobnost, že i -té aktivum dosáhne podle j -tého experta v okamžiku realizace portfolia k -tého výnosu z doby jeho trvání

Expertní metoda

- na trhu je známá velikost současných tržních cen všech aktiv, které jsou platné v okamžiku vzniku portfolia
- vybraní experti odhadnou čísla c_{ijk} a d_{ijk} a pravděpodobnosti jejich dosažení pro $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, N_e$; $k = 1, 2, \dots, N_{ij}$
- každý expert odhadne pravděpodobnosti tak, aby platilo

$$\sum_{k=1}^{N_{ij}} p_{ijk} = 1$$

Expertní metoda

- pravděpodobnost realizace konkrétní hodnoty tržní ceny v době realizace portfolia je dána vztahem

$$p_{i_k} = \frac{1}{N_e} \cdot \sum_{j=1}^{N_e} p_{i_{jk}}$$

- očekávaná výnosnost i-tého aktiva při realizaci portfolia v případě tržní ceny $c_{i_{jk}}$ je

$$r_{i_{jk}} = \frac{c_{i_{jk}} + d_{i_{jk}} - TC_i}{TC_i}$$

Expertní metoda – příklad

- předpokládejme, že jsme dostali od tří nezávislých expertů informace o odhadu velikosti tržních cen i -té akcie v okamžiku realizace portfolia spolu s pravděpodobnostmi, že bude dosažena jimi odhadnutá cena
- dále pro jednoduchost a přehlednost budeme uvažovat, že dividendy z tohoto cenného papíru budou rovny nule
- dále předpokládejme, že současná hodnota i -té akcie bude 100 Kč

Expertní metoda – příklad

c_{i_j}	$r_{i_{jk}} = \frac{c_{i_{jk}} - TC_i}{TC_i}$	$p_{i_{1k}}$	$p_{i_{2k}}$	$p_{i_{3k}}$	$\sum_{j=1}^{N_e} p_{i_{jk}}$	$p_{i_k} = \frac{1}{N_e} \cdot \sum_{j=1}^{N_e} p_{i_{jk}}$
90	-0,1	5	0	0	5	5/3
100	0	80	20	0	100	100/3
110	0,1	5	30	50	85	85/3
130	0,3	0	40	20	60	60/3
160	0,6	10	10	20	40	40/3
180	0,8	0	0	10	10	10/3

Expertní metoda – příklad

- v posledním sloupci je pravděpodobnostní rozložení pro hodnoty v druhém sloupci
- spočítáme charakteristiky aktiva (očekávanou výnosnost a riziko) a výsledkem je očekávaná výnosnost 19,33% s rizikem 23,01% ([výpočet v Excelu](#))

Očekávaný výnos portfolia

- mějme portfolio složené z n akcií
- i -tá akcie má v portfoliu váhu (podíl) X_i a očekávanou výnosnost \bar{r}_i
- každá akcie přispěje k očekávané výnosnosti portfolia svým „dílem“, můžeme tedy psát

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot X_i = \bar{r}_1 \cdot X_1 + \bar{r}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{r}_n \cdot X_n$$

Riziko očekávaného výnosu portfolia

- mějme 2 aktiva – A a B
- předpokládejme 3 možné situace na trhu – dobrou (D), průměrnou (P) a špatnou (Š)
- A má následující výnosnosti pro uvedené situace – D – 16%, P – 10%, Š – 4%
- B má následující výnosnosti pro uvedené situace – D – 1%, P – 10%, Š – 19%
- sestavíme portfolio – 60% A a 40% B

Riziko očekávaného výnosu portfolia

Stav trhu	Aktivum A	Aktivum B	Portfolio – 60% A + 40% B
Dobrý (D)	1,16	1,01	$0,6*1,16+0,4*1,01 = 1,1$
Průměrný (P)	1,10	1,10	$0,6*1,10+0,4*1,10 = 1,1$
Špatný (Š)	1,04	1,19	$0,6*1,04+0,4*1,19 = 1,1$

Riziko očekávaného výnosu portfolia

- pro výpočet rizika očekávané výnosnosti portfolia použijeme rozptyl (resp. směrodatnou odchylku)

- vyjdeme ze vzorce pro výpočet rozptylu

$$D(X) = E[X - E(X)]^2$$

- po úpravě a zobecnění dostáváme směrodatnou odchylku

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{ij}}$$

Riziko očekávaného výnosu portfolia

- pokud jsou cenné papíry v portfoliu nezávislé, potom se riziko portfolia blíží 0 s rostoucím počtem cenných papírů v portfoliu
- vzorec pro rozptyl portfolia můžeme přepsat na

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 \cdot \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (X_j \cdot X_k \cdot \sigma_{jk})$$

- pokud předpokládáme stejné váhy pro všechny cenné papíry v portfoliu, vzorec upravíme na

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\sigma_{jk}}{n \cdot (n-1)} \qquad \sigma_p^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}_j^2 + \frac{n-1}{n} \bar{\sigma}_{jk}$$

Riziko očekávaného výnosu portfolia

- oba výrazy jsou průměry – druhý představuje průměrnou kovarianci – počet kovariancí je $n*(n-1)$
- příspěvek k riziku portfolia rizik jednotlivých cenných papírů se s jejich počtem blíží k nule
- příspěvek k riziku portfolia, který přináší kovariance, se s rostoucím počtem blíží k „průměrné kovarianci“
- individuální riziko jednotlivých cenných papírů může být zcela odstraněno