Bayesiánská analýza

II. Normální lineární regresní model s přirozeně konjugovanou apriorní hustotou (jediná vysvětlující proměnná)

Obsah tématu

Úvod

- Koop (2003) - kapitola 2
- Normální lineární regresní model s jedinou vysvětlující proměnnou (není třeba maticové algebry).
- Přirozeně konjugovaný prior $\Rightarrow$ analytické výsledky.
- Význam před rozvojem výpočetní techniky.
- Ukázka propojení klasické a bayesovské ekonometrie.

Obsah tématu

Lineární regresní model

- y_i – pozorovaná data vysvětlované proměnné ($i = 1, \dots, N$).
- x_i – pozorovaná data vysvětlující proměnné ($i = 1, \dots, N$).
- LRM s jedinou vysvětlující proměnnou a bez úrovňové konstanty (pro zjednodušení):

$$y_i = \beta x_i + \epsilon_i$$

- ϵ_i – náhodná složka (chyba); β – parametr.
- Vektorově pro $y = (y_1, \dots y_N)'$, $x = (x_1, \dots x_N)'$ a $\epsilon = (\epsilon_1, \dots \epsilon_N)'$:

$$y = \beta x + \epsilon$$

Předpoklady

- Předpoklady o ϵ_i a x_i determinují podobu věrohodnostní funkce.
- Klasické předpoklady (později uvolněny):
  1. ϵ_i je i.i.d. $N(0, \sigma^2)$ (independent and identically distributed).
  2. x_i je fixní proměnná (tj. nenáhodná veličina), popř. náhodná s omezeními.

Obsah tématu

Věrohodnostní funkce I

- Věrohodnostní funkce = funkce sdružené hustoty pravděpodobnosti pro všechna data podmíněná neznámými parametry:

$$p(y|\beta, \sigma^2).$$

- Získáme z definovaných předpokladů.
  - $p(y_i|\beta, \sigma^2)$ má normální rozdělení,
  - $E(y_i|\beta, \sigma^2) = \beta x_i$,
  - $var(y_i|\beta, \sigma^2) = \sigma^2$.

Věrohodnostní funkce II

- Věrohodnostní funkce:

$$p(y|\beta,\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sigma^N} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \beta x_i)^2\right].$$

Věrohodnostní funkce III

- Další vyjádření věrohodnostní funkce:

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - \beta x_i)^2 = \nu s^2 + (\beta - \widehat{\beta})^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2,$$

- kdy

$$\nu = N - 1$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$s^2 = \frac{\sum (y_i - \widehat{\beta} x_i)^2}{\nu}$$

- $\widehat{\beta}$, s^2 a ν = OLS odhady pro β, rozptyl reziduí a počet stupňů volnosti.

Věrohodnostni funkce IV

- Obvykle využíváme přesnost chyby, h, místo variability:

$$h = \frac{1}{\sigma^2}$$

- Věrohodnostní funkce:

$$p(y|\beta, h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left\{ h^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{h}{2}(\beta - \widehat{\beta})^2 \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \right] \right\} \left\{ h^{\frac{\nu}{2}} \exp\left[-\frac{h\nu}{2s^{-2}} \right] \right\}.$$

- První člen je podobný jádrové hustotě (kernelu) normální hustoty pro β; druhý člen je podobný rozdělení gama pro h.

Obsah tématu

Konjugovaná apriorní hustota

- Konjugovaná apriorní hustota – interpretovatelná jako dodatečná data.
- Jestliže je $\mathcal{F}$ třída výběrových rozdělení $p(y|\theta)$ a $\mathcal{P}$ je třída apriorních rozdělení pro θ, potom třída $\mathcal{P}$ je konjugovaná pro $\mathcal{F}$ jestliže

$$p(\theta|y) \in \mathcal{P} \quad \text{pro všechna} \quad p(\cdot|\theta) \in \mathcal{F} \quad \text{a} \quad p(\cdot) \in \mathcal{P}.$$

- Vágní definice, pokud $\mathcal{P}$ je třída všech rozdělení, potom $\mathcal{P}$ je vždy konjugovaná bez ohledu na použitou třídu výběrových rozdělení.
- Zájem o třídy přirozeně konjugovaných apriorních hustot, kdy $\mathcal{P}$ je množina všech hustot majících stejnou funkční podobu jako věrohodnostní funkce.

Prior I

- Apriorní hustota – libovolná forma, obvykle určitá třída priorů, které lze snadno interpretovat a (nebo) zjednodušují výpočet.
- Apriorní hustota pro β a h: $p(\beta, h)$.
- Pravidla pravděpodobnosti: $p(\beta, h) = p(\beta|h)p(h)$.
- Forma věrohodnostní funkce – konjugovaný prior jako normální rozdělení pro $\beta|h$ a gama rozdělení pro h.

Prior II

- Normální-gama rozdělení:

$$\beta|h \sim N(\underline{\beta}, h^{-1}\underline{V})$$
$$h \sim G(\underline{s}^{-2}, \underline{\nu})$$

- Přirozeně konjugovaný prior pro β a h:

$$\beta, h \sim NG(\underline{\beta}, \underline{V}, \underline{s}^{-2}, \underline{\nu})$$

- Volba hodnoty apriorních hyperparametrů: $\underline{\beta}$, $\underline{V}$, $\underline{s}^{-2}$ a $\underline{\nu}$ (zohlednění apriorní informace).

Obsah tématu

Posterior I

- Posteriorní hustota je proporcionální součinu věrohodnostní funkce a apriorní hustoty.
- Posteriorní hustota je z normálního-gama rozdělení (apriorní hustota je tedy skutečně přirozeně konjugovaná):

$$\beta, h|y \sim NG(\overline{\beta}, \overline{V}, \overline{s}^{-2}, \overline{\nu}),$$

  přičemž platí

$$\overline{V} = \frac{1}{\underline{V}^{-1} + \sum x_i^2},$$
$$\overline{\beta} = \overline{V}(\underline{V}^{-1}\underline{\beta} + \widehat{\beta}\sum x_i^2),$$
$$\overline{\nu} = \underline{\nu} + N.$$

- $\overline{s}^{-2}$ je implicitně definováno následovně:

$$\overline{\nu s}^2 = \underline{\nu s}^2 + \nu s^2 + \frac{(\widehat{\beta} - \underline{\beta})^2}{\underline{V} + \frac{1}{\sum x_i^2}}.$$

Vlastnosti posteriorní hustoty I

- $p(\beta|y,h)$ má normální rozdělení.
- Chceme $p(\beta|y)$.
- Marginální posteriorní rozdělení pro β je t-rozdělení:

$$\beta|y \sim t(\overline{\beta}, \overline{s}^2\overline{V}^2, \overline{\nu}).$$

- Z definice t-rozdělení vyplývá:

$$E(\beta|y) = \overline{\beta},$$
$$var(\beta|y) = \frac{\overline{\nu s}^2}{\overline{\nu} - 2}\overline{V}.$$

Vlastnosti posteriorní hustoty II

- Bayesiánský bodový odhad $\overline{\beta}$ je vážený průměr OLS odhadu a apriorní střední hodnoty $\underline{\beta}$.
- Váhy jsou proporcionální k $\sum x_i^2$ a $\underline{V}^{-1}$.
- $\underline{V}^{-1}$ = důvěra v apriorní a datovou infomaci (v klasické ekonometrii je $(\sum x_i^2)^{-1}$ proporcionální k variabilitě $\widehat{\beta}$).
- Alternativní intuice: jednoduchý případ $x_i = 1$ pro $i = 1, \ldots, N \Rightarrow \sum x_i^2 = N$ a váha přiřazená k $\widehat{\beta}$ je velikost vzorku (rozumné měřítko pro objem informací v datech).

Vlastnosti posteriorní hustoty III

- Rozptyl OLS estimátoru $s^2(\sum x_i^2)^{-1}$ (využití např. k testování statistické významnosti parametru, kdy t-statistika pro testování $\beta = 0$ je $\frac{\widehat{\beta}}{\sqrt{s^2(\sum x_i^2)^{-1}}}$).
- Bayesiánská analogie – posteriorní rozptyl β (podobná podobu $\times$ zahrnuje datovou i nedatovou informaci).
- Přirozeně konjugovaná apriorní hustota $=$ prior vyplývá z fiktivní datové množiny (podobná role $\underline{\nu}$ a N).
- $\underline{\nu}$: apriorní velikost vzorku.

Vlastnosti posteriorní hustoty IV

- Fiktivní datová množina $\rightarrow$ lze využít při specifikaci $\underline{\beta}$, $\underline{V}$, $\underline{s}^{-2}$ a $\underline{\nu}$-
- Citlivostní analýza prioru – empirické výsledky lze prezentovat za využití různých priorů.
- Síla datové informace může i nemusí rozhodnout (nutnost zdůvodnění volby apriorních hyperparametrů).

Obsah tématu

Neinformativní prior I

- Neinformativní prior z nastavení $\underline{\nu} = 0$ a $\underline{V}^{-1} = 0$ (tj. $\underline{V} \to \infty$).
- V tomto případě: $\beta, h|y \sim NG(\overline{\beta}, \overline{V}, \overline{s}^{-2}, \overline{\nu})$, kde

$$\overline{V} = \frac{1}{\sum x_i^2},$$
$$\overline{\beta} = \widehat{\beta},$$
$$\overline{\nu} = N,$$
$$\overline{\nu s}^2 = \nu s^2.$$

Neinformativní prior II

- Jedná se čistě o OLS odhad.
- Rozdílná interpretace:
  - bayesovský přístup – β je náhodná veličina;
  - klasický přístup – $\widehat{\beta}$ je náhodná veličina.
- Tato apriorní „hustota“ neintegruje na hodnotu jedna $\rightarrow$ tzv. nepravý prior (improper prior).
- Problémy s použitím.

Obsah tématu

Porovnání modelů

- Dva modely M_1 a M_2.
- M_j pro $j = 1, 2$ mají různé vysvětlující proměnné:

$$y_i = \beta_j x_{ji} + \epsilon_{ji}.$$

- Přirozeně konjugovaná normální-gama apriorní hustota:

$$\beta_j, h_j | M_j \sim NG(\underline{\beta}_j, \underline{V}_j, \underline{s}_j^{-2}, \underline{\nu}_j).$$

- Posteriorní hustota:

$$\beta_j, h_j | y, M_j \sim NG(\overline{\beta}_j, \overline{V}_j, \overline{s}_j^{-2}, \overline{\nu}_j).$$

Posteriorní podíl šancí I

$$PO_{12} = \frac{p(y|M_1)p(M_1)}{p(y|M_2)p(M_2)}$$

- Apriorní pravděpodobnosti modelů $p(M_j)$ (před konfrontací s daty); neinformativní volba $p(M_1) = p(M_2) = \frac{1}{2}$.
- Marginální věrohodnost $p(y|M_j)$:

$$p(y|M_j) = \iint p(y|\beta_j, h_j)p(\beta_j, h_j)d\beta_j dh_j.$$

- Lze pro náš případ spočítat analyticky:

$$p(y|M_j) = c_j \left(\frac{|\overline{V}_j|}{|\underline{V}_j|} \right)^{\frac{1}{2}} (\overline{\nu}_j \overline{s}_j^2)^{-\frac{\overline{\nu}_j}{2}}.$$

Posteriorní podíl šancí II

- c_j konstanta nezávislá na datech

$$c_j = \frac{\Gamma\left(\frac{\overline{\nu}_j}{2}\right)\left(\underline{\nu}_j \underline{s}_j^2\right)^{\frac{\underline{\nu}_j}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\underline{\nu}_j}{2}\right)\pi^{\frac{N}{2}}}.$$

- Posteriorní podíl šancí:

$$PO_{12} = \frac{c_1\left(\frac{|\overline{V}_1|}{|\underline{V}_1|}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\overline{\nu}_1 \overline{s}_1^2\right)^{-\frac{\overline{\nu}_1}{2}} p(M_1)}{c_2\left(\frac{|\overline{V}_2|}{|\underline{V}_2|}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\overline{\nu}_2 \overline{s}_2^2\right)^{-\frac{\overline{\nu}_2}{2}} p(M_2)}.$$

Faktory ovlivňující bayesovské porovnání modelů

1. Čím větší je apriorní podíl šancí $\frac{p(M_1)}{p(M_2)}$, tím vyšší je podpora pro M_1.
2. $\overline{\nu}_j \overline{s}_j^2$ obsahuje člen $\nu_j s_j^2$, což je součet čtverců chyb (měřítko souladu modelu s daty).
3. Pokud všechny ostatní charakteristiky jsou stejné: posteriorní podíl šancí upřednostní model s větší koherencí mezi apriorní a datovou informací ($(\widehat{\beta}_j - \underline{\beta}_j)^2$ vstupuje do $\overline{\nu}_j \overline{s}_j^2$).
4. $\left(\frac{\overline{V}_i}{\underline{V}_i}\right)$ je podíl posteriorní a apriorní variancí $\Rightarrow$ pokud vše ostatní zůstane stejné, upřednostní model s větší apriorní informací (menší apriorní variancí), relativně k posteriorní informaci.
5. Použitím neinformativního prioru není marginální věrohodnost definována (stějně tak posteriorní podíl šancí).

Obsah tématu

Predikční hustota

- Chceme předpovědět y^* v bodě x^*:

$$y^* = \beta x^* + \epsilon^*.$$

- y^* není pozorováno.

$$p(y^*|y) = \iint p(y^*|y, \beta, h) p(\beta, h|y) d\beta dh.$$

- Lze ukázat:

$$y^*|y \sim t(\overline{\beta} x^*, \overline{s}^2 \{1 + \overline{V} x^{*2}\}, \overline{\nu}).$$

- Bodová předpověď a s ní spojená nejistota (např. směrodatná odchylka predikce).

Bayesovské průměrování modelů

- Předpokládáme, že známe $p(M_j|y)$, pro $j = 1, 2$
- Bayesovské průměrování modelů v sobě zahrnuje průměrování přes všechny modely.
- Zákony pravděpodobnosti implikují:

$$p(y^*|y) = p(y^*|y, M_1)p(M_1|y) + p(y^*|y, M_2)p(M_2|y).$$

- Nezaměřovat na jediný model a pracovat např. s $p(y^*|y, M_1)$ × průměrování výsledků přes oba (všechny) modely s váhami danými posteriorními hustotou pravděpodobnosti.

Obsah tématu

Umělá data

- Umělá data pro ilustraci s $N = 50$, $\beta = 2$ a $h = 1$.
- Neinformativní prior a informativní prior s $\underline{\beta} = 1.5$, $\underline{V} = 0.25$, $\nu = 10$ a $\underline{s}^{-2} = 1$.
- „Originální" data obsahem *data_NLRM1.mat* + skript *priklad_NLRM1.m*.

Apriorní a posteriorní charakteristiky parametru β

	Prior	Posterior	
	Informativní	(Inf. prior)	(Neinf. prior)
Stř. hodnota	1.500	1.794	1.862
Sm. odchylka*	0.559	0.199	0.216

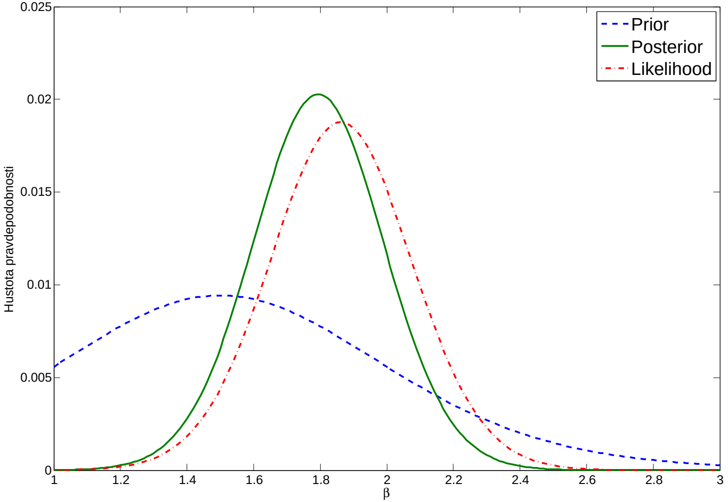
* Jedná se o směrodatnou odchylku příslušného t-rozdělení, apriorní či posteriorní V tedy neudává přímo hodnotu rozptylu.

Apriorní a posteriorní charakteristiky parametru h

	Prior	Posterior	
	Informativní	(Inf. prior)	(Neinf. prior)
Stř. hodnota	1.000	1.215	1.283
Sm. odchylka*	0.447	0.222	0.257

* Jedná se o směrodatnou odchylku odpovídajícího gama rozdělení.

Marginální apriorní a posteriorní hustoty pro parametr β.



Apriorní a posteriorní charakteristiky pro model jen s úrovňovou konstantou

	β		h	
	Prior	Posterior	Prior	Posterior
Stř. hodnota	1.500	0.990	1.000	0.917
Sm. odchylka	0.559	0.145	0.447	0.167

Další výsledky

- Posteriorní podíl šancí je 7346 *Rightarrow* $p(M_1|y) = 0.9999$ a $p(M_2|y) = 0.0001$.
- Predikce pro $x^* = 0.5$:
  - při využití informativního prioru je $y^*|y \sim t(0.897, 0.833, 60)$,
  - V případě neinformativní apriorní hustoty je $y^*|y \sim t(0.931, 0.7915, 50)$.