

## Obecný problém dekompozice - Divisiův přístup a řešení

Odlíšný způsob k problematice indexních čísel uplatnil v polovině 20.let 20.století francouzský matematik **Francois Divisia**<sup>1</sup>. Formuloval úlohu nalezení agregátního indexu tak, že hledal - pro libovolné časové období  $t$  - multiplikativní rozklad „makroagregátu“  $P \cdot Q$  reprezentujícího součin cenového a kvantového indexního čísla do tvaru

$$(4.1) \quad P \cdot Q = \sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i,$$

tj. tak, aby ve všech okamžicích spojitě uvažovaného času platila aditivní dekompozice agregátu na dílčí součiny příslušné **cenové a kvantové „mikrofunkce“** všech komodit. Funkce  $P$  jako indikátor všeobecné cenové úrovně má přitom co nejlépe vystihovat pohyb cenové hladiny, podobně funkce  $Q$  jako reprezentant souhrnného fyzického objemu vývoj množstevního indexu.

O „mikrofunkcích“ cen a kvantit  $p_i$  resp.  $q_i$  Divisia předpokládal, že mají:

- spojitě první derivace (podle času),
- kladné hodnoty na celém uvažovaném intervalu  $\langle 0, T \rangle$ ,
- konečnou variaci na každém podintervalu  $\langle t-1, t \rangle$  spadajícího do  $\langle 0, T \rangle$ .

Takto obecně formulovaná úloha však není bez dalšího jednoznačně řešitelná, což snižuje její uplatnitelnost pro reálné potřeby. Je zřejmé, že spolu s funkcemi  $P$  a  $Q$  je řešením úlohy také

každá dvojice tvaru  $c \cdot P$  a  $\frac{Q}{c}$  pro nějakou kladnou konstantu  $c$ .

### 4.1 Spojitý přístup

Vzhledem k derivovatelnosti funkcí  $P$  a  $Q$ , můžeme derivaci (4.1) zapsat jako (4.2)

$$Q \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + P \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{p_k}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial t}.$$

Předpokládáme-li kladnost funkcí  $P$  a  $Q$  na celém intervalu  $\langle 0, T \rangle$ , můžeme dělit součinem  $P \cdot Q > 0$ . Dostaneme (4.3)

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{p_k}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i} \cdot \frac{\partial q_k}{\partial t}.$$

Dále samostatně uvažujeme aditivní rozklad cenové změny v (4.3) na

$$(4.4A) \quad \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial t},$$

resp. kvantové změny v témže výrazu na

<sup>1</sup> Divisia, F.: L'indice monétaire et la Theorie de la monnaie-revue d'Economie politique (1925)

$$(4.4B) \quad \frac{1}{Q(t)} \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t}.$$

Aditivním rozkladem změny cenové a kvantové situace a dále úpravami využívajícími aparátu Stieltjesova integrálu (pro funkce s konečnou variací) lze dospět k aproximativnímu tvaru

$$(4.5) \quad \frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^N g_k(t_k^*) \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} - p_k(t) \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t}$$

pro nějaké body  $t_k^*, t_k^*$  z intervalu  $\langle t-1, t \rangle$  a nějakou váhovou funkci  $g_k$ , např. tvaru

$$(4.6A) \quad g_k(t_k^*) = \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)}.$$

Pokud za oba tyto body vezmeme levý krajní bod intervalu, tj.  $t_k^* = t_k^* = t-1$  a podobně dosadíme za funkci  $g_k(t_k^*) = g_k(t-1)$  výraz

$$(4.6B) \quad g_k(t_k^*) = \frac{q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^N p_i(t-1) \cdot q_i(t-1)}, \quad \text{obdržíme po}$$

úpravě vztah

$$(4.7) \quad \frac{P(t)}{P(t-1)} = \frac{\sum_{i=1}^N p_k(t) \cdot q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^N p_k(t-1) \cdot q_k(t-1)},$$

neboli Laspeyresovo cenové indexní číslo vztažené k bodům  $t-1, t$  intervalu. Cenové indexní číslo pro celé uvažované období  $\langle 0, T \rangle$  pak získáme zřetěžením, tedy

$$(4.8) \quad P_{0T}^D = \overline{P_{0T}^L} = P_{01}^L \cdot P_{12}^L \cdot \dots \cdot P_{T-1, T}^L.$$

Nahrazením  $t_k^* = t_k^* = t$  a dosazením  $g_k(t_k^*) = g_k(t)$  výrazu

$$(4.9) \quad g_k(t) = \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)}$$

odvodíme tímto postupem zřetěžené Paascheho cenové indexní číslo  $P_{01}^P$ . Podobně lze jinými speciálními volbami získat i jiná zřetěžená indexní čísla, např. Edgeworthovo.

Kvantová indexní čísla bychom získali obdobně z rozkladu kvantové změny v (4.4B). Dosazením  $t_k^* = t_k^* = t-1$  obdržíme  $Q_{t-1, t}^L$  a již popsaným následným zřetěžením  $Q_{0t}^L$ .

## 4.2 Diskrétní přístup

Postup lze obdobně použít také na diskrétní případ, kdy v intervalu  $\langle 0, T \rangle$  uvažujeme množinu ekvidistantních izolovaných bodů  $t = 0, 1, 2, \dots, T$ . Opět uvažujeme rozklad agregátu

$$(4.10) \quad P_{t-1,t} \cdot Q_{t-1,t} = \sum_{i=1}^N p_i \cdot q_i \quad t = 0, 1, 2, \dots, T \quad \text{v } T+1 \text{ okamžicích.}$$

Nejprve vyjádříme levou stranu změny agregátu mezi obdobími  $t-1$  a  $t$  (libovolnými následujícími):  $P_{t-1,t} \cdot Q_{t-1,t} - P_{t-2,t-1} \cdot Q_{t-2,t-1}$  v podílovém vyjádření (4.11)

$$\frac{P_{t-1,t} \cdot Q_{t-1,t} - P_{t-2,t-1} \cdot Q_{t-2,t-1}}{P_{t-2,t-1} \cdot Q_{t-2,t-1}} = \frac{P_{t-1,t} - P_{t-2,t-1}}{P_{t-2,t-1}} + \frac{Q_{t-1,t} - Q_{t-2,t-1}}{Q_{t-2,t-1}}$$

Odpovídající souhrnnou změnu  $N$  dílčích změn cen a kvantit napravo vyjádříme jako

$$(4.12) \quad \sum_{k=1}^N \frac{p_k - p_k \cdot I_{t-1,t}}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot I_{t-1,t} \cdot q_i} + \sum_{k=1}^N \frac{q_k - q_k \cdot I_{t-1,t}}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot I_{t-1,t} \cdot q_i}$$

Přijmeme-li, že se cenová a množstevní změna hodnotového komplexu odehrávají nezávisle na sobě, můžeme porovnat "stejnolehle" cenové a kvantové složky samostatně.

Pro relativní cenovou složku dostaneme rozklad tvaru

$$(4.13) \quad \frac{P_{t-1,t} - P_{t-2,t-1}}{P_{t-2,t-1}} = \frac{\sum_{i=1}^N [p_k - p_k \cdot I_{t-1,t}] \cdot q_k}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot I_{t-1,t} \cdot q_i} = P_{t-1,t}^P, t-1,$$

Kde  $P_{t-1,t}^P$  představuje Paascheho cenové indexní číslo pro změnové období  $t-1, t$ .

Obdobně odvodíme pro relativní kvantovou změnovou komponentu vyjádření

$$(4.14) \quad \frac{Q_{t-1,t} - Q_{t-2,t-1}}{Q_{t-2,t-1}} = \frac{\sum_{i=1}^N [q_k - q_k \cdot I_{t-1,t}] \cdot p_k}{\sum_{i=1}^N p_i \cdot I_{t-1,t} \cdot q_i} = I_{t-1,t}^L, t-1, \quad \text{kde}$$

$I_{t-1,t}^L$  zastupuje Laspeyresovo kvantové indexní číslo pro změnové období  $t-1, t$ .

(Po odstranění  $I_{t-1,t}$  na obou stranách dostaneme  $\frac{P_{t-1,t}}{P_{t-2,t-1}} = P_{t-1,t}^P$  a  $\frac{Q_{t-1,t}}{Q_{t-2,t-1}} = I_{t-1,t}^L$ ).

Sestavíme-li řetězové indexy  $\frac{P_{t-1,t}}{P_{t-2,t-1}}, \frac{P_{t-2,t-1}}{P_{t-3,t-2}}, \dots, \frac{P_{t-1,t}}{P_{t-2,t-1}}, \frac{P_{t-2,t-1}}{P_{t-3,t-2}}$  a tyto vynásobíme, dostaneme

vyjádření  $\frac{P_{t-1,t}}{P_{t-2,t-1}} = P_{t,1}^P \cdot P_{1,2}^P \cdot \dots \cdot P_{t-1,t-1}^P \cdot P_{t-1,t}^P = P_{0T}^{*P}$ , což je zřetěžené Paascheho cenové indexní

číslo  $P_{0T}^{*P}$ . Podobně bychom získali pro  $\frac{Q_{t-1,t}}{Q_{t-2,t-1}}$  zřetěžené Laspeyresovo kvantové indexní číslo  $Q_{0T}^{*L}$ .

**Poznámka** Pokud bychom vycházeli z dekompozice hodnotového makroagregátu způsobem

$$(4.17) \quad P_{01}^L = P_{01}^L - 1 \cdot Q_{01}^L - 1 \cdot P_{01}^L, \quad Q_{01}^L = Q_{01}^L - 1 \cdot P_{01}^L - 1 \cdot Q_{01}^L,$$

obdrželi bychom analogickou cestou dvojici zřetěžených indexních čísel  $P_{01}^{*L}, Q_{01}^{*P}$ .

Postupem podle Divisiova schématu obdržíme pro spojitý i diskrétní případ *zřetěžené indexní číslo splňující axiom záměny faktorů*. Nevyhneme se však nejednoznačnosti určení v důsledku neurčitosti volby multiplikativního rozkladu (*diskrétní případ*), resp. odhadu aproximujícího Stieltjesova integrálu (*spojitý případ*).

Problém spojený s praktickou aplikací Divisiova přístupu je ten, že ceny a kvantitely nelze měřit kontinuálně, ale vždy jen v určitých odstupech. Pro praktické užití by musely být Divisiovy indexy se spojitým časem aproximovány diskrétními, přičemž existuje více možností jak takovou aproximaci provést.

**E.Diewert [1980]** ukázal, že kromě Laspeyresova a Paascheho indexu mohou být získány jako speciální aproximace  $P(1)/P(0)$  další indexy, např. Törnquistův index, pokud vezmeme

$$\ln P_{01}^T = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (q_i(0) + q_i(1)) \cdot \ln \left( \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right), \quad \text{kde účasti } s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{j=1}^N p_j(t)q_j(t)}$$

Postup, který použil Divisia v případě indexů se spojitým časem, uplatnil již o něco dříve anglický statistik T.L.Bennet<sup>2</sup> až na to, že neuplatnil v (4.1) dělení výrazem  $p(t) \cdot q(t)$ .

**T.L.Bennet [1920]** navíc navrhl následující diskrétní aproximaci k měření diferencí (nikoliv tedy podílů jako Divisia) na agregátních cenových a množstevních úrovních:

$$(4.18) \quad \Delta P \equiv P(1) - P(0) \equiv 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (q_i(0) + q_i(1)) \cdot (p_i(1) - p_i(0)) \quad ,$$

$$(4.19) \quad \Delta Q \equiv Q(1) - Q(0) \equiv 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (p_i(0) + p_i(1)) \cdot (q_i(1) - q_i(0)) \quad .$$

Ukázal přitom, že rozdíl výdajů mezi obdobími  $\sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)$  dává přesně výraz rovný  $\Delta P + \Delta Q$ , kde  $\Delta P$  a  $\Delta Q$  jsou definovány pravými stranami (4.18), (4.19).

**Poznámka** Obecná definice Divisiova spojitého indexu je čistě matematickou konstrukcí a nemusí mít žádnou souvislost s rozklady indexních čísel, dokonce ani nemusí mít žádný vztah k ekonomickému prostředí.

**Jean Villé [1951-52]** a **C.R.Hulten [1973]** analyzovali Divisiovy indexy v prostředí cen a spotřebovaných množství za předpokladu, že spotřebitel optimalizuje své chování (z hlediska minimalizace nákladů) a že příslušná užitková funkce je lineárně homogenní<sup>3</sup>.

Protože se indexy  $P_{01}^L, P_{01}^P, P_{01}^T$  mohou lišit, Divisiův přístup nevede k jednoznačnému návodu, jak řešit problém. Jiné návrhy, jak aproximovat Divisiův index se spojitým časem pomocí diskrétních dat podali **Paul A. Samuelson a Subramanian Swamy [1974]**.

<sup>2</sup> **Bennet, T.L.:** The Theory of Measurement of Changes in Cost of Living. Journal of the Royal Statistical Society 83/1920 s.455-462

<sup>3</sup> **Lineárně homogenní funkce N – proměnných**  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  splňuje vlastnost  $F(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \cdot F(\mathbf{x})$  pro libovolné skalární  $\lambda > 0$ .