Makroekonomické modelování – přednáška 11

Model překrývajících se generací

Model překrývajících se generací (Overlapping Generation model, OLG). Tak trochu jiná třída modelů. Proč? Agenti nežijí nekonečně dlouho, ale mají životní cyklus. V OLG modlech žijí zároveň mladí a staří agenti, staří umírají a noví se narodí atd. Mají jiné závěry než modely s nekonečným horizontem (konkurenční rovnováha nemusí být Pareto optimální, může existovat více rovnováh). Podíváme se na úspory a akumulaci kapitálu, demografické změny a na penzijní systém.

Model

Diskrétní čas, $t = 1, 2, 3 \ldots$. Na začátku každého období $t \geq 1$ se narodí nová generace (kohorta, mladí y – index 1, staří o – index 2). Agenti žijí jen dvě období. (V čase t=1 je tam kohorta starých, kteří dožívají).
Populace roste konstantním tempem $L_t = L_{t-1}(1 + n)$.

Preference

$$U(c_{1t}, c_{2t+1}) = u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

Splňuje klasické vlastnosti.
Mladí mají jednu jednotku práce, kterou nabízejí na trhu práce. Staří nepracují. (Počáteční kohorta starých je vybavena kapitálem, daným exogenně). Mladí obdrží mzdu a rozhodují se kolik spotřebují a kolik uspoří. Staří pouze spotřebovávají, žijí ze svých úspor (a úroků).

Technologie

Firmy najímají práci L_t a kapitál K_t a vyrábějí produkt pomocí produkční funkce

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

Splňuje klasické vlastnosti, včetně CRS, lze vyjádřit per capita $y_t = f(k_t)$. Předpokládáme, že kapitál nedepreciuje $\delta = 0$.

Časový sled událostí

Obrázek.

Řešení a rovnováha

První generace a všechny další

$$\max_{c_{1t}, c_{2t+1}, s_1} u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

vzhledem k

$$c_{1t} = w_t - s_{1t}$$

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_{1t}$$

Plus původní nultá generace

$$\max_{c_{21}} u(c_{21}) \quad \text{vzhledem k} \quad c_{21} = (1+r_1)\bar{k}_1$$

Firmy

$$\max_{K_t, L_t} F(K_t, L_t) - w_t L_t - R_t K_t$$

Konkurenční rovnováha

Série alokací $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t\}_{t=1}^{\infty}$ (spotřeby a úspor) agentů a série alokací firem $\{K_t, L_t\}_{t=1}^{\infty}$ (kapitálu, práce) a série cen $\{w_t, r_t\}_{t=1}^{\infty}$ (mzdy a úrokové míry), které řeší

- optimalizační problém spotřebitelů
- optimalizační problém firem
- trhy se čistí v každém období (trh statků, trh práce, trh kapitálu)

Zdrojem pro kapitál v $t+1$ jsou úspory generace mladých v období t, tedy $K_{t+1} = L_t s_{1t}$.

Vliv úrokové míry na úspory (spotřebu)

CRRA funkce

$$U = \frac{c_{1t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta \frac{c_{2t+1}^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

Celoživotní rozpočtové omezení

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}} = w_t$$

Řešením optimalizace je (jak jinak) Eulerova rovnice

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = [\beta(1+r_{t+1})]^{\frac{1}{\theta}}$$

Růst spořeby, když spotřebitelé trpělivější nebo úroková míra vyšší. Řešení pro c_{1t}

$$c_{1t} = \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\theta}}(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}} w_t$$

případně pro úspory

$$s_{1t} = \frac{1}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}(1+r_{t+1})^{1-\frac{1}{\theta}}} w_t$$

Růst r_{t+1} způsobí (předpokládáme, že spotřebitel je v roli věřitele)

- důchodový efekt, růst důchodu, zvýšení spotřeby obou normálních statků
- substituční efekt, cena spotřeby v t je relativně vyšší (cena budoucí spotřeby nižší), více spotřebovávat levnější statek, více c_{2t+1} méně c_{1t}

Obrázek. Pro případ CRRA funkce, efekty závisí na elasticitě substituce $\frac{1}{\theta} = \sigma$.

- $\frac{1}{\theta} = \sigma > 1$ $SE > IE$, spotřeba c_{1t} klesá, úspory s_{1t} rostou
- $\frac{1}{\theta} = \sigma < 1$ $IE > SE$, spotřeba c_{1t} roste, úspory s_{1t} klesají
- $\frac{1}{\theta} = \sigma = 1$ $IE = SE$, log funkce, oba efetky se vykrátí, úroková míra nemá vliv na spotřebu a úspory

Co když spotřebitel vydělává i ve druhém období?

$$c_{1t} = \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\theta}}(1 + r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}} \left(w_t + \frac{w_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \right)$$

SE i IE zůstávají, nový efekt bohatství, spotřeba c_{1t} klesá, úspory s_{1t} rostou.

Dynamická analýza modelu

Logaritmická užitková funkce, Cobb-Douglasova produkční funkce. Úspory jako funkce mzdy

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1 + \beta} w_t$$

jako funkce kapitálu

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1 + \beta}(1 - \alpha)k_t^{\alpha}$$

Z rovnice pro vyčištění trhu kapitálu

$$k_{t+1} = \frac{s_{1t}}{1 + n}$$

Vývoj kapitálu v čase (jako funkce kapitálu)

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1 - \alpha)}{(1 + \beta)(1 + n)} k_t^{\alpha}$$

Balanced growth path

$$k^* = \left[\frac{\beta(1 - \alpha)}{(1 + \beta)(1 + n)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Kapitál na hlavu (capital labor ratio) je konstatní k^*. Jak roste K_t?

$$K_{t+1} = K_t(1 + n)$$

Vliv demografických změn na míru úspor

Agregátní úspory

$$S_t = K_{t+1} - K_t = nK_t$$

Agregátní míra úspor (v steady-statu)

$$S^* = \frac{S_t}{Y_t} = \frac{nK_t}{Y_t} = \frac{nk}{y} = \frac{n\beta(1 - \alpha)}{(1 + \beta)(1 + n)}$$

Pokles n (např. snížení porodnosti, populace stárne).

- Počet mladých agentů je relativně menší vůči starým. Úspory jsou dělány mladými (úspory budou nižší). Posun nabídky vlevo.
- Menší počet mladých snižuje nabídku práce. Kapitál bude méně vybaven prací, mezní produkt kapitálu bude menší. Posun poptávkové křivky vlevo.

Množství úspor poklesne, poklesne i výstup (ale méně). Míra úspor se tedy sníží. Jak snížení n ovlivní rovnovážnou úrokovou míru?

$$r^* = \frac{\alpha(1+\beta)(1+n)}{\beta(1-\alpha)}$$

Pokles n způsobí pokles r^*.

Rovnováha OLG modelu obecně

Z našeho příkladu

$$s_{1t} = \frac{1}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}(1+r_{t+1})^{1-\frac{1}{\theta}}} w_t$$

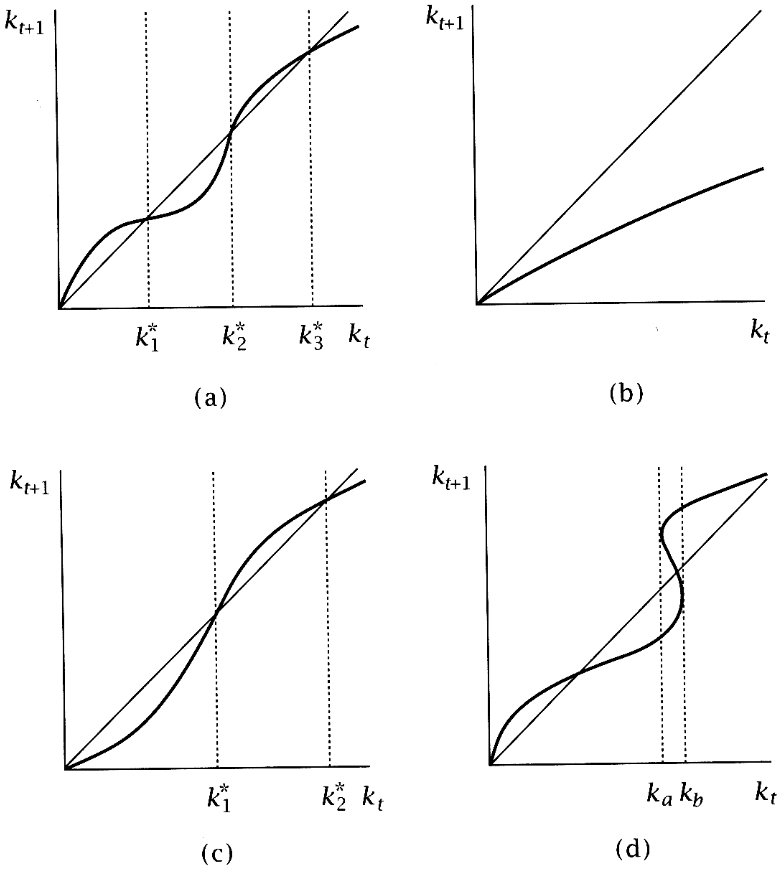
tedy úspory jsou funkcí r_{t+1} krát w_t, tedy $s_{1t} = s(r_{t+1})w_t$. Kapitál závisí na úsporách, což po dosazení dává

$$k_{t+1} = \frac{s_{1t}}{(1+n)} = \frac{s(r_{t+1})w_t}{(1+n)} = \frac{1}{1+n} s(f'(k_{t+1}))[f(k_t) - kf'(k)_{t+1}]$$

Trochu upravíme

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} s(f'(k_{t+1})) \frac{[f(k_t) - kf'(k)_{t+1}]}{f(k_t)} f(k_t)$$

Zprava doleva. Výstup; část výstupu jako odměna práci (labor share); část výstupu, která je uspořena (míra úspor).
Jednoduchý model, ale můžeme dostat různé typy dynamického chování. Obrázek. Panel (a), vícenásobná rovnováha (multiple equilibria). (i) když labor share je větší při vyšších hodnotách k_t nebo (ii) když pracovníci spoří velkou část příjmu, když je malá míra návratnosti (mezní produkt, tedy velké k_t). Panel (b), konvergence k 0. Panel (c) opět multiple equilibria, pro malé k_t konvergence k 0, pro velké k_t konvergence k pozitivní hodnotě. Panel (d) ukazuje, že k_{t+1} není jednoznačně určeno. Rozsah k_a až k_b, kde jsou možné tři hodnoty k_{t+1}. Může nastat, když jsou úspory klesající funkcí r. Může docházet k fluktuacím ekonomiky i bez exogenních disturbancí. *Self-fulfilling prophecies* nebo *sunspots*.



Pareto neefektivnost

Srovnání OLG modelu s Ramseyho modelem.
Ekonomika s depreciací kapitálu.
Omezení ekonomiky

$$K_{t+1} - (1-\delta)K_t + c_{1t}L_t + c_{2t}L_{t-1} = F(K_t, L_t)$$

$$(1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t + c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n} = f(k_t)$$

Spotřeba na pracovníka (obou generací)

$$c_t = c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n}$$

Spotřeba v s.s.

$$c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^*$$

Max spotřeby

$$f'(k_{gr}) = n + \delta$$

Zlaté pravidlo. Ekonomika může být

- dynamicky efektivní, $k^* < k_{gr}$, (zvýšení kapitálu zvýší spotřebu v dlouhém období, ale na náklady nižší spotřeby v krátkém období)
- dynamicky neefektivní, $k^* > k_{gr}$, ekonomika akumuluje příliš mnoho kapitálu (snížení kapitálu zvýší spoteřebu ve všech obdobích)

Ramseyho model

Bez růstu technologie, ale s růstem populace.
Eulerova rovnice z minulé přednášky (růst populace, technologie, nejistota)

$$\frac{\gamma\eta}{\tilde{c}_t} = \beta E_t \frac{1}{\tilde{c}_{t+1}} \left[(1-\delta)z_t + \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1}(h_t)^{1-\alpha}\right]$$

Pro náš případ vypadá

$$(1+n)u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[1 + f'(k_{t+1}) - \delta]$$

V steady statu, plus použijeme $\beta = \frac{1}{1+\rho}$.

$$(1+n)(1+\rho) = (1-\delta) + f'(k^*)$$

$$f'(k^*) = n + \delta + \rho$$

$$f'(k^*) = n + \delta + \rho > n + \delta = f'(k_{gr}) \tag{1}$$

Rovnice (1) je tzv. *modifikované zlaté pravidlo*. Kapitál splňující modifikované zlaté pravidlo je striktně menší než $f'(k_{gr})$.
Domácnost by mohla spotřebovávat více ve steady-statu, ale je netrpělivá a nechce snížit dnešní spotřebu, aby dosáhla vyšší spotřeby dle zlatého pravidla (raději si vybere víc vyhlazenou spotřebu).
Ramseyho model: ve steady statu nemůže být dynamicky neefektivní. Navíc je sociálně optimální, což je důležitější než spotřeba dle zlatého pravidla.

OLG model

V OLG modelch může být $k^* > k_{gr}$. Příklad z minula. Logaritmická užitková funkce, Cobb-Douglasova produkční funkce.

$$s_{1t} = \frac{\beta}{1+\beta} w_t = \frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)k_t^\alpha$$

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)} k_t^\alpha$$

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Mezní produkt kapitálu

$$f'(k^*) = \alpha(k^*)^{\alpha-1}$$

$$f'(k^*) = \alpha \frac{(1+\beta)(1+n)}{\beta(1-\alpha)} = \frac{\alpha(2+\rho)(1+n)}{1-\alpha}$$

Když je α nebo ρ jsou nízké, může se stát, že steady state v OLG modlech je dynamicky neefektivní, tzn. $k^* > k_{gr}$

$$f'(k^*) = \frac{\alpha(2+\rho)(1+n)}{1-\alpha} < n + \delta = f'(k_{gr})$$

Co s tím? Můžeme zvýšit spotřebu ve všech obdobích přeskupením zdrojů.

Pareto optimální alokace

je sekvence alokací $\{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t\}_{t=1}^{\infty}$ která splňuje rozpočtové omezení ekonomiky a má následující vlastnost: neexisuje žádná jiná alokace $\{\tilde{c}_{1t}, \tilde{c}_{2t+1}, \tilde{s}_t\}_{t=1}^{\infty}$, která splňuje rozpočtové omezení a

$$u(\tilde{c}_{1t}, \tilde{c}_{2t+1}) \geq u(c_{1t}, c_{2t+1}) \quad \forall \quad t \geq 1$$

s ostrou nerovností alespoň pro jeden případ ($t \geq 1$).
(Problémy: Může existovat PO steady-state, ale nikoliv cesta, která k němu vede. Máme dva steady-staty, které můžeme porovnat z hlediska blahobytu, ale ne z hlediska cesty, která k nim vede.)

Pareto zlepšující alokace (formálně)

Předpoklad, že ekonomika je ve steady statu (k^*). Provedeme realokaci, snížíme kapitálovou zásobu o $\Delta k^* < 0$ (dezinvestice).

$$k^{**} = k^* + \Delta k^*$$

Rozpočtové omezení (před změnou)

$$(1+n)k^* + c^* = y^* + (1-\delta)k^*$$

Rozpočtové omezení (po změně)

$$(1+n)k^{**} + c^{**} = y^{**} + (1-\delta)k^{**}$$

$$(1+n)(k^* + \Delta k^*) + c^{**} = y^* + f'(k^*)\Delta k^* + (1-\delta)(k^* + \Delta k^*)$$

Odečtením od sebe dostaneme

$$\Delta c^* = f'(k)\Delta k^* + (1-\delta)\Delta k^* - (1+n)\Delta k^*$$

$$\Delta c^* = [f'(k) - (n+\delta)]\Delta k^*$$

Pokud jsme za k_{gr} pak výraz $f'(k^*) - (n+\delta) < 0$, takže $\Delta c^* > 0$.

Pareto zlepšující alokace (intuitivně)

Sociální plánovač zavede následujcí transfer:

- sníží úspory mladých o jednotku $\Delta k = 1$ a dá je staré generaci (v období t)
- mladých je $(1+n)$ krát starých, takže spotřeba starých se zvýší o $(1+n)$.

- podobně, mladí až zestárnou dostanou také dodatečných $(1+n)$ jednotek spotřeby. Mladí si ale mohou spotřit na stáří sami. Míra návratnosti $r = R - \delta = f'(k^*) - \delta$
- pokud je ekonomika dynamicky neefektivní, pak $f'(k^*) < (n+\delta)$, tzn. míra návratnosti tohoto transferu je vyšší než míra návratnosti soukromých úspor. Mladí budou tento transfer preferovat. (spotřeba v mládí nezměněna, ve stáří jim vzroste)

V OLG modelech jsou úspory jedním způsobem přesunu spotřeby do stáří (mladí musí spořit i když je míra návratnosti nízká). Může se stát, že ekonomika spoří příliš (a akumuluje moc kapitálu). V Ramseyho modelu je agent „mladý“ (pracovník) a „starý“ (kapitalista) zároveň. Transfer probíhá implicitně mezi domácnostmi v každém období.

ALE, ale Pareto zlepšující alokace je možná pouze v případě, že je nekonečný počet generací. Předpokládejme poslední generaci T, která se narodí v T a žije jen toto období. Není zde potřeba úspor, spotřeba pouze v čase T.

$$U = u(c_{1T})$$

Rozpočtové omezení ekonomiky

$$c_T = f(k_T) + (1-\delta)k_T$$

Snížení kapitálu způsobí pokles spotřeby

$$\Delta c_T = f'(k^*)\Delta k^* + (1-\delta)\Delta k^*$$

$$\Delta c_T = [1 + f'(k^*) - \delta]\Delta k^* < 0$$

Na konci světa vezmeme od mladých v čase T, ale už jim nic nedáme v dalším období, protože další období neexistuje. Tato poslední generaci si pohorší. Není možné udělat Pareto zlepšující alokaci. I když můžeme zvýšit spotřebu všech předchozích generací, poslední generace ztratí.

Zdroj Pareto neefektivity. V první přednášce jsme měli, že konkurenční rovnováha je Pareto efektivní (platí 1. teorém blahobytu) při platnosti určitých podmínek (absence externalit atd.). Jedním z podmínek i je i konečný počet agentů. Tady je nekonečný počet generací. To umožňuje sociálnímu plánovači provést efektivnější alokaci, která není dostupna trhu. Proto OLG modely mohou být Pareto neefektivní.
Jak dosáhnout snížení úspor?

- daň z kapitálu
- vládní dluh
- nefondový system sociálního zabezpečení (Pay-As-You-Go)

Příklad PAYGo systému

Zjednodušená forma OLG modelu. Řešení v rámci dvou období, spotřeba když mladý a starý, c_1 a c_2. Příjem mladého agenta je y, když je starý pouze si užívá důchodu a žije z úspor s (a úroku). Populace roste tempem n, výstup roste tempem g (technologický pokrok). Vláda zdaňuje mladé (τ) a starým vyplácí důchod b, má vyrovnaný rozpočet.

$$\max_{c_1,c_2,s} \log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

vzhledem k

$$c_1 + s = y(1-\tau)$$

$$c_2 = (1+r)s + b$$

$$b = (1+n)(1+g)\tau y$$

Spotřebitel profituje z toho, že když je starý, je kolem něj více mladých k zaplacení penze a tito lidé mají také větší příjem kvůli technologickému pokroku. Po dosazení

$$c_1 + s = y(1-\tau)$$

$$c_2 = (1+r)s + (1+n)(1+g)\tau y$$

Mezičasové rozpočtové omezení

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (1-\tau)y + \frac{(1+n)(1+g)\tau y}{1+r} = Y(\tau)$$

Řešení (např. Lagrangiánem, Eulerovka, dosazení do rozpočtového omezení)

$$c_1 = \frac{Y}{1+\beta}$$

$$c_2 = \frac{\beta}{1+\beta}(1+r)Y$$

$$s = (1-\tau)y - \frac{Y}{1+\beta}$$

Jak tento systém ovlivňuje úspory? Úpravami poslední rovnice dostaneme

$$s = \frac{\beta y}{1+\beta} - \frac{(1+n)(1+g)+\beta(1+r)}{(1+r)(1+\beta)}\tau y$$

S rostoucím τ (větší PAYGo systém), soukromé úspory s klesají. Tzn. větší pay-as-you-go systém snižuje úspory, investice a tím i akumulaci kapitálu. Může tento systém zvyšovat blahobyt? A za jakých podmínek?

$$Y(\tau) = (1-\tau)y + \frac{(1+n)(1+g)\tau y}{1+r}$$

$$Y(\tau) = y - \tau y + \frac{(1+n)(1+g)\tau y}{1+r}$$

$$Y(\tau) = y\left[\frac{(1+n)(1+g)}{1+r} - 1\right]\tau y$$

$$(1+n)(1+g) > 1+r$$

což je aproximatinvě

$$n+g > r$$

Populační růst plus růst důchodu (ekonomiky) je větší než míra návratnosti ze soukromých úspor. PAYGo systém dává smysl v některých zemích, s vysokým populačním růstem. Nyní ale moc ne (příklad Německo, ale i jiné země) $n = 0\%$, $g = 2\%$, průměrný výnos z akciového trhu $r = 7\%$. Nutná reforma. Problém chybějící generace.

Empirické testování dynamické efektivnosti: U.S. růst ekonomiky + populační růst $n+g = 3\%$, výnos z vládních obligací $r = 1\%$. Z národních účtů, porovnání (čistého) mezního produktu kapitálu $f'(k) - \delta = R - \delta$ s růstem $n+g$. $R - \delta = 10\% > n+g = 3\%$. Podobně pro případ nejistoty: čistý kapitálový důchod > investice (dynamická efetktinost).