

## MAKROEKONOMICKÉ MODELOVÁNÍ – PŘEDNÁŠKA 6

### Analytické vs. numerické řešení

Porovnání analytického řešení a aproximativního řešení (z iterace hodnotové funkce).

Model z minulé přednášky. C-D produkční funkce, logaritmická užitková funkce, stoprocentní depreciace. Řešíme pomocí Guess & Verify: analytické řešení.

### Iterace hodnotové funkce

Můžeme zkusit řešit příklad analyticky (maximalizace, dosazení a tak dále) – náročné. Radši numericky. Určíme si, že kapitál ( $k$  a  $k'$ ) může nabýt pěti hodnot  $\kappa \in \{0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20\}$ . Hodnotová funkce se skládá z 5 hodnot  $v_n(0.04)$ ,  $v_n(0.08)$ , ... Parametry,  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.6$ .

1. Počáteční odhad  $v_0(k) = 0$  pro všechna  $k \in \kappa$
2. Vyřešíme  $v_1(k) = \max_{k'} \{\ln(k^{0.3} - k') + 0.6 * 0\}$ . Hledáme maximum pravé strany. Která hodnota  $k'$  (z 5 možných) maximalizuje RHS BE? Řešením je  $k' = g_1(k) = 0.04$  pro všechna  $k$ .
3. Vypočítáme hodnotovou funkci  $v_1(k)$  pro všech 5 hodnot  $k$  s  $k' = 0.04$ .
4. Opakujeme první krok, s již vypočítanou (maximální) hodnotovou funkcí  $v_1(k)$  na pravé straně. Opět hledáme pro které  $k'$  (z 5 možných) maximalizujeme výraz na pravé straně  $v_2(k) = \max_{k'} \{\ln(k^{0.3} - k') + 0.6 * v_1(k')\}$ . Řešením je  $k' = g_2(k) = 0.08$ , pro  $k = 0.04$ . Další viz tabulka.

Obrázek. Aproximace hodnotové funkce. již po 20 iteracích jsme hodně blízko. Rozhodovací pravidlo nekonverguje ke skutečnému, ani více iterací nepomáhá. Proč? Analytické rozhodovací pravidlo může nabývat kterékoliv hodnoty, zatímco při numerické aproximaci jsme se omezili na pět hodnot  $k \in \kappa$ . ( $g_{10}$  je nejlepší aproximace). Hodnotová funkce vypadá lépe, pře užitková a produkční funkce modelu přenáší do hodnotové funkce zakřivenost. Taky si všimněte, že skutečná hodnotová funkce a rozhodovací pravidlo jsou jen body. (Na obrázku vypadají spojitě, pře matlab mezi nimi udělal interpolaci).

### Stochastický neoklasický model (RBC)

Stochastické dynamické programování. Do hry vstupují očekávání.

Reprezentativní spotřebitel maximalizuje očekávanou užitkovou funkci

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

kde  $E_0$  je operátor očekávání, podmíněných informacemi dostupnými v čase  $t = 0$ .  $c_t$  je zde náhodná proměnná. (spotřebitel má 1 jednotku práce, kterou (neelasticky) každé období nabízí na trhu práce).

Produkční funkce

$$y_t = z_t F(k_t, n_t)$$

kde  $z_t$  je náhodný technologický šok. Může být modelován jako iid proměnná nebo Markovský řetězec (nebo AR proces).  $\{z_t\}_{t=0}^{\infty}$  bude iid proměnná – nezávisle a rovnoměrně rozdělená (každé období vybrána z pravděpodobnostního rozložení  $G(z)$ ). Na začátku každého období se agent dozví, co se událo za šok a teprve poté dělá svoje rozhodnutí. Další rovnice jsou stejné, jak předtím, kapitál se vyvíjí dle rovnice

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

a výstup je buď investován nebo spotřebován.

$$y_t = i_t + c_t$$

## Organizace trhů

### Arrow-Debreu

Kontrakty se uzavřou v čase  $t = 0$  na konkurenčním trhu pro každou možnou realizaci šoků. Pak se to rozběhne a kontrakty se uskutečňují. (Konkurenční rovnováha je Pareto optimální).

### Sekvenční trhy

Spotový trh s racionálními očekáváním. Strany se potkají a uskuteční obchod na základě svých očekávání o budoucích cenách. V rovnováze se trhy čistí každé období pro každou realizaci šoku. Racionální očekávání – očekávání o pravděpodobnostním rozdělení budoucích cen je stejné jako skutečné pravděpodobnostní rozdělení. Mohou být překvapeni, ale ne systematicky oklamáváni, využívají informace efektivně. V našem modelu je tato rovnováha stejná jako rovnováha AD.

## Problém sociálního plánovače

Konkurenční rovnováha je Pareto optimální. Můžeme přejít na řešení problému sociálního plánovače.

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} E_0 \beta^t u(c_t)$$

vzhledem k

$$c_t + k_{t+1} = z_t f(k_t) + (1 - \delta)k_t$$

protože  $f(k_t) = F(k_t, 1)$ .

Stavová proměnná  $k_t$  a  $z_t$ .

- $k_t$  je určeno minulým rozhodnutím (endogenní stavová proměnná)
- $z_t$  je dáno náhodou (exogenní stavová proměnná)

Bellmanova rovnice

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} [u(c_t) + \beta E_t v(k_{t+1}, z_{t+1})]$$

vzhledem k  $c_t = z_t f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}$ . naše řídicí proměnná je jen  $k_{t+1}$ , za  $c_t$  dosadíme z omezení ekonomiky.

$z_t$  je zdrojem nejistoty (agenti vědí jen pravděpodobnostní rozdělení), proto očekávaný užitek (očekávaná hodnotová funkce), je tam to  $E_t$ .  $E_t$  je operátor očekávání podmíněných informacemi v čase  $t$ . Řešení pomocí iterace hodnotové funkce. Předpokládejme, že jsou možné jen dvě realizace šoků  $z^1$  a  $z^2$  (např. 0.75 a 1.75) a k tomu dvě pravděpodobnosti  $p_1$  a  $p_2$ . Zatím je proměnná  $z$  modelována jako iid. Jsme v čase 0, vybíráme kapitál  $k_1$

Použijeme teorii očekávaného užitku, pro každou hodnotu kapitálu  $k_1$  dostaneme

$$E_0 v(k_1, z_1) = p_1 v(k_1, z^1) + p_2 v(k_1, z^2)$$

Nebo obecněji pro jakýkoliv čas

$$E_t v(k_{t+1}, z_{t+1}) = p_1 v(k_{t+1}, z^1) + p_2 v(k_{t+1}, z^2)$$

Bellmanova rovnice se nám rozpadne na dva případy

$$v(k_t, z^1) = \max_{k_{t+1}} [u(z^1 f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) + \beta [p_1 v(k_{t+1}, z^1) + p_2 v(k_{t+1}, z^2)]]$$

$$v(k_t, z^2) = \max_{k_{t+1}} [u(z^2 f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) + \beta [p_1 v(k_{t+1}, z^1) + p_2 v(k_{t+1}, z^2)]]$$

[očekávání v Bellmanově rovnici  $E_t v(k_{t+1}, z_{t+1})$  je rovno: diskontovaný užitek (hodnotová funkce), když si náhoda vybere  $z^1$  krát pravděpodobnost  $p_1$  + diskontovaný užitek, když si náhoda vybere  $z^2$  krát pravděpodobnost  $p_2$ ]

Hledání hodnotové funkce iterativně, např. pro  $z^1$

$$v_1(k_t, z^1) = \max_{k_{t+1}} [u(z^1 f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) + \beta [p_1 v_0(k_{t+1}, z^1) + p_2 v_0(k_{t+1}, z^2)]]$$

maximalizujeme a dosazujeme v cyklu dokud to nezkonverguje. Obdobně pro  $z^2$ . Dostaneme aproximaci hodnotové funkce a rozhodovací pravidlo: v tomto případě 2 hodnotové funkce a 2 rozhodovací pravidla (pro  $z^1$  a  $z^2$ ).

Obrázek: *přechodová* množina (transition set) množina hodnot kapitálu, která nenastane v dlouhém období. *ergodická* množina (ergodic set) množina, kterou kapitál nikdy neopustí, když se tam dostane.

Ekonomika nyní nekonverguje do steady statu, protože disturbance (technologické šoky) způsobí neustálé fluktuace ve výstupu, spotřebě, investicích. Ekonomika konverguje ke stochastickému steady-statu, což je nějaká sdružená hustota pravděpodobnosti výstupu, spotřeby a investic. Lze vypočítat deterministický steady-state. Šoky nastavíme na svou střední hodnotu. Analyticky z podmínek prvního řádu (Eulerovka),  $k_t = k_{t+1} = k^*$ ,  $c_t = c_{t+1} = c^*$ .

Konečně už tu máme stochastiku. Model můžeme nasimulovat (vybereme konkrétní produkční a užitkové funkce a nakalibrujeme parametry) a pak stačí výchozí

hodnota kapitálu  $k_0$  a sekvence šoků  $\{z\}_{t=0}^T$  generovaná nějakým náhodným generátorem a podle rozhodovacích pravidel pro  $k$  a  $c$  a dopočítáním dalších proměnných dostaneme časové řady z modelu. Tyto řady připomínají detrendované časové řady dat (pro U.S.). Výstup ze simulace modelu porovnáme se skutečnými daty z hlediska statistických momentů - (střední hodnota, rozptyl, autokorelace, křížové korelace). Pokud chování základního modelu neodpovídá datům, můžeme ho nějakým způsobem modifikovat a tak dále. Případně se dá model použít pro analýzu efektů hospodářské politiky.

Poznámka: pokud je šok modelován jako Markovský proces, pak Bellmanova rovnice bude vypadat následovně

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} [u(c_t) + \beta E_t v(k_{t+1}, z_{t+1} | z_t)]$$

konkrétně s pravděpodobnostní maticí

$$v(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} [u(c_t) + \beta \sum_{z_{t+1}} P(z_{t+1} | z_t) v(k_{t+1}, z_{t+1})]$$

a rozepsaně

$$v(k_t, z^1) = \max_{k_{t+1}} [u(z^1 f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) + \beta [p_{11}v(k_{t+1}, z^1) + p_{12}v(k_{t+1}, z^2)]]$$

$$v(k_t, z^2) = \max_{k_{t+1}} [u(z^2 f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) + \beta [p_{21}v(k_{t+1}, z^1) + p_{22}v(k_{t+1}, z^2)]]$$

Řešení pomocí diferenciací Bellmanovy rovnice, případně pomocí Lagrangianu vede na podmínku optimality – stochastická Eulerova rovnice.

$$u'(c_t) = \beta E_t [u'(c_{t+1})(1 + f'(k_{t+1}) - \delta)]$$

(nelineární stochastická rovnice, řešení pomocí log-linearizace a pak numericky)

## Vlastnosti řešení

- **Uhádni a ověř (guess and verify)** analytické řešení (+), funguje jen v pár případech (–)
- **Iterace hodnotové funkce (value function iteration)** uchovává „zakřivení modelu“ (rozhodovacího pravidla), dobré druhé momenty (+), funguje i když ekonomika dále od steady-statu (+), výpočetně náročné pro složitější modely (když hodně stavových proměnných, hodně stavů např. šoků, větší diskretizace) (–)
- **Lineární kvadratické dynamické programování** (Kvadratická aproximace cílové funkce, linearizace rozpočtového omezení, (reformulace problému, hodně derivací)
- **Log-linearizace** podmínek prvního řádu a rozpočtového omezení. Poměrně jednoduché a také nejpoužívanější. Softwarové nástroje na řešení.