

1. seminář:

Lineární programování, formulace optimalizační úlohy

Příklad 1: Sestavte matematický model úlohy:

a) Úloha rozvrhování reklamy

Jde o rozdělení prostředků na reklamní kampaň pro penzijní připojištění do jednotlivých médií (televize, rozhlas, noviny, časopisy, poutače), tak aby byl maximalizován celkový účinek reklamy vyjádřený počtem osob "oslovených reklamou". Reklama je prioritně zaměřena na určité kategorie osob dle věku, vzdělání a příjmové skupiny. Požadavky zadavatele jsou následující:

- do televize a rozhlasu půjde maximálně 50 % prostředků
- do každého z médií lze umístit aspoň 10% ale ne víc než 30 % celkového rozpočtu
- je třeba oslovit aspoň 2,5 mil. osob ve věku 30-50 let, aspoň 0,8 mil. osob v příjmové skupině nad 20000,- Kč měsíčně a aspoň 1,5 mil. osob s minimálně středoškolským vzděláním.

Celkový objem prostředků uvolněných na kampaň je 10 mil. Kč. Na základě pravidelných průzkumů prováděných reklamní agenturou bylo odhadnuto, že při vynaložení 1000 Kč bude prostřednictvím jednotlivých médií zasaženy následující počty osob z uvedených kategorií:

druh média	televize	rozhlas	časopis	noviny	poutače
celkem	750	420	300	360	180
věk 30 - 50	320	280	140	240	120
příjem > 20 000 Kč	120	90	60	60	50
SŠ vzdělání	350	200	120	140	60

Navrhněte takovou strukturu reklamní kampaně, aby byl počet oslovených maximální a přitom byly splněny požadavky zadavatele i rozpočtové omezení.

b) Úloha diverzifikace portfolia

Investiční společnost plánuje investovat 50 mil. Kč do cenných papírů. Pro tuto investici vybírá z pěti variant: akcie tří společností A_1, A_2, A_3 a dva druhy obligací O_1, O_2 . Každá z těchto pěti variant je charakterizovaná očekávanou mírou

výnosu v procentech za rok a bezrozměrným koeficientem vyjadřujícím míru rizika investice, viz tabulka:

	A ₁	A ₂	A ₃	O ₁	O ₂
výnos [%]	25	18	20	14	12
míra rizika	9	5	7	3	1

Investiční strategie společnosti předpokládá, že:

- do obligací půjde minimálně 50 % celkově investované částky
- celková míra rizika (tj. vážený průměr rizik jednotlivých variant) nepřesáhne hodnotu 5
- žádná z variant nebude nakoupena v menším objemu než 5 mil. Kč

Cílem modelu je navrhnout takovou strukturu portfolia, která bude maximalizovat celkový očekávaný výnos a přitom bude respektovat uvedenou investiční strategii.

c) Finanční analýza projektů

Investor, který má na začátku období volně k dispozici 1,5 mil. Kč se rozhoduje o účasti na třech investičních projektech A, B, C. Všechny projekty jsou plánovány na dva roky, přičemž náklady a výnosy jsou definovány v půlročních intervalech, viz údaje v tabulce [mil. Kč] (kladné hodnoty představují výnosy a záporné náklady):

období	1/2013	7/2013	1/2014	7/2014	12/2014
projekt A	-0,5	-0,3	0,3	0,6	1,0
projekt B	-1,0	-0,4	-0,2	0,7	2,3
projekt C	-0,8	0,2	0,4	0,4	0,4

Protože investor nemá dostatečné prostředky aby pokryl všechny náklady v jednotlivých obdobích, musí volit pouze částečnou participaci na některých projektech (potom jsou náklady i výnosy kráceny na poměrnou část). Pokud investorovi v kterémkoliv období zbydou nějaké volné prostředky, může je uložit jako termínovaný vklad na 6 měsíců, čímž za toto období získá 5 % uložené částky. Úkolem je navrhnout investiční strategii tak, aby byl maximalizován objem prostředků na konci dvouletého období.

Příklad 2: Pomocí grafické metody vyřešte úlohu LP:

$$z = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

za podmínek

$$x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 0$$

Doplňující otázky:

- Jak by se změnilo řešení, kdyby nerovnosti v omezeních byly ostré?
- Jak se změní řešení, jestliže obrátíme u druhého omezení znaménko nerovnosti na $x_1 + x_2 \geq 6$?
- Jak se změní řešení, jestliže kromě otočení druhé nerovnosti na $x_1 + x_2 \geq 6$ budeme účelovou funkci maximalizovat místo minimalizace?

Příklad 3: Pomocí simplexové metody ručně vyřešte úlohu LP:

$$z = 36x_1 + 12x_2 + 60x_3 \rightarrow \max.$$

za podmínek

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9$$

$$x_1 + 3x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$