7. seminář:

Nelineární optimalizace s omezením ve tvaru rovnosti: Lagrangeovy multiplikátory

Příklad 1: Uvažujte optimalizační problém firmy, která má k dispozici dva výrobní faktory (F_1, F_2) s jednotkovými cenami $w_1 = 2$ Kč a $w_2 = 3$ Kč a rozhoduje se, jak s pomocí těchto výrobních faktorů co nejlevněji vyrobit požadované množství produktu $Q = 10$. Vyprodukované množství produktu se řídí Cobb-Douglasovou produkční funkcí s exponenty $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ pro množství výrobních faktorů F_1 a F_2.

a) zapište matematický model úlohy

b) řešte jako jednorozměrnou úlohu bez omezení

c) řešte pomocí Lagrangeových multiplikátorů, ověřte i podmínky 2. řádu

Příklad 2: Uvažujte jednoduchý regresní model

$Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n$

kde:

β je neznámý parametr

$X_1, \ldots, X_n$ jsou pevné hodnoty a

$\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_n$ jsou nezávislé stejně rozložené chyby s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2.

Gauss-Markovova věta, tvrdí, že odhad $\hat{\beta}$ získaný metodou největších čtverců je "BLUE", tedy nejlepší nestranný lineární odhad parametru β. Matematicky formulováno:

- $\hat{\beta}$ je lineární, tedy $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$ pro nějaké koeficienty $c_1, \ldots, c_n$
- $\hat{\beta}$ je nestranný, tj. $E(\hat{\beta}) = \beta$
- $\hat{\beta}$ je nejlepší takový odhad, tedy má mezi těmito odhady minimální střední kvadratickou chybu $E(\hat{\beta} - \beta)^2$ (což je v případě nestrannosti totéž jako minimální rozptyl).

Formulujte jako optimalizační problém s omezením a najděte $\hat{\beta}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů.

Příklad 3: Úloha o rozdělení spotřeby v čase:

Předpokládejme, že chceme maximalizovat užitek ze spotřeby během dvou období, ve kterých máme příjmy I_1 a I_2, přičemž nespotřebované prostředky z prvního období můžeme zúročit s úrokovou mírou r. Užitková funkce se předpokládá ve tvaru $U(C_1, C_2) = u(C_1) + \beta \cdot u(C_2)$, kde $\beta \in (0, 1)$ je koeficient vyjadřující subjektivní preferenci současné spotřeby před spotřebou budoucí.

a) Sestavte Lagrangeovu funkci a zapište podmínky prvního řádu, jako proměnné přitom uvažujte C_1, C_2, S_1 a jako omezující podmínky rozpočtová omezení v jednotlivých obdobích.

b) Najděte řešení podmínek, předpokládáme-li užitkovou funkci ve tvaru

$$u(C) = lnC$$

Příklad 4: Vyřešte úkoly 1,2 a 3 ze soutěžního příkladu MUESu, jehož kompletní zadání i s řešením naleznete v učebních materiálech ISu: soubor soutěž.pdf (použito s laskavým soulasem M. Kvasničky)

a) Předpokládejme, že Milton Friedman vlastní domeček, kde bydlí. V domečku má samozřejme i vodovod, takže spotřebovává vodu (na pití, mytí, do bazénu apod.) a ostatní statky. Friedman má roční příjem M dolarů. Dále víme, že jeho preference je možné popsat indiferenční křivkou

$$U = \sqrt{W} + \sqrt{C}$$

kde W je jeho spotřeba vody ve vhodných jednotkách, C je jeho spotřeba ostatních statků (opět ve vhodných jednotkách) a U je číslo indiferenční křivky, kterou mu daný spotřební koš zajistí. Předpokládejme dále, že jednotky, ve kterých je počítána voda i ostatní statky, jsou zvoleny tak vhodně, že cena jednotky vody i jednotky ostatních statků je právě 1 dolar. Zjistěte, kolik vody a kolik ostatních statku bude Milton Friedman spotřebovávat.

b) Po nějaké době bylo Friedmanovi v jeho domě smutno. Proto pozval další dva ekonomy, aby bydleli s ním. (Jména těchto pánů byla Keynes a Marx.) Domeček měl však pouze jeden vodoměr. Protože pánové byli tři, rozdělili vždy poplatky za vodu rovným dílem. Předpokládejme, že Keynes s Marxem spotřebují každý konstantní množství vody – právě tolik vody, kolik spotřebovával Friedman, dokud bydlel v domečku sám (protože Friedman je bezesporu racionální, spotřebovával právě optimální množství vody). Kolik bude za těchto okolností spotřebovávat Milton Friedman vody a kolik ostatních statků?

c) V minulém případě jsem vám ovšem trošku lhal: Keynes s Marxem samozřejmě nespotřebovávají konstantní množství vody. I oni jsou celkem racionální (aspoň když se starají o vlastní užitek), a tak kupují takové množství vody a ostatních statků, aby maximalizovali svůj užitek (jsou to ekonomové!). Každý z nich má stejné preference a příjem jako Friedman. Kolik tedy bude (v rovnováze) spotřebovávat každý z ekonomů vody a kolik ostatních statků, jestliže si budou dělit náklady na vodu rovným dílem?