8. seminář:

Nelineární optimalizace s omezením ve tvaru rovnosti i nerovností (KKT podmínky)

Příklad 1: Vyřešte úkoly 1,2 a 3 ze soutěžního příkladu MUESu, jehož kompletní zadání i s řešením naleznete v učebních materiálech ISu: soubor soutěž.pdf (použito s laskavým soulasem M. Kvasničky)

a) Předpokládejme, že Milton Friedman vlastní domeček, kde bydlí. V domečku má samozřejme i vodovod, takže spotřebovává vodu (na pití, mytí, do bazénu apod.) a ostatní statky. Friedman má roční příjem M dolarů. Dále víme, že jeho preference je možné popsat indiferenční křivkou

$$U = \sqrt{W} + \sqrt{C}$$

kde W je jeho spotřeba vody ve vhodných jednotkách, C je jeho spotřeba ostatních statků (opět ve vhodných jednotkách) a U je číslo indiferenční křivky, kterou mu daný spotřební koš zajistí. Předpokládejme dále, že jednotky, ve kterých je počítána voda i ostatní statky, jsou zvoleny tak vhodně, že cena jednotky vody i jednotky ostatních statků je právě 1 dolar. Zjistěte, kolik vody a kolik ostatních statku bude Milton Friedman spotřebovávat.

b) Po nějaké době bylo Friedmanovi v jeho domě smutno. Proto pozval další dva ekonomy, aby bydleli s ním. (Jména těchto pánů byla Keynes a Marx.) Domeček měl však pouze jeden vodoměr. Protože pánové byli tři, rozdělili vždy poplatky za vodu rovným dílem. Předpokládejme, že Keynes s Marxem spotřebují každý konstantní množství vody – právě tolik vody, kolik spotřebovával Friedman, dokud bydlel v domečku sám (protože Friedman je bezesporu racionální, spotřebovával právě optimální množství vody). Kolik bude za těchto okolností spotřebovávat Milton Friedman vody a kolik ostatních statků?

c) V minulém případě jsem vám ovšem trošku lhal: Keynes s Marxem samozřejmě nespotřebovávají konstantní množství vody. I oni jsou celkem racionální (aspoň když se starají o vlastní užitek), a tak kupují takové množství vody a ostatních statků, aby maximalizovali svůj užitek (jsou to ekonomové!). Každý z nich má stejné preference a příjem jako Friedman. Kolik tedy bude (v rovnováze) spotřebovávat každý z ekonomů vody a kolik ostatních statků, jestliže si budou dělit náklady na vodu rovným dílem?

Příklad 2: Je třeba připravit plán výroby pro výrobní linku, na které je možno vyrábět pět typů výrobků, přitom je třeba dodržet následující podmínky:

- Výrobní náklady nesmějí přesáhnout 1090 Kč.
- Výrobek pátého typu je používán pro kompletaci všech ostatních typů výrobků a alespoň 10 kusů je ho potřeba vyrobit navíc jako náhradní díly.
- Výrobků druhého typu je potřeba vyrobit o 4 kusy více než výrobků čtvrtého typu.
- Tržby za prodané výrobky závisejí na prodaném množství, při větším prodeji mohou být jednotkové tržby nižší podle funkcí uvedených v následující tabulce.

množství výrobků typu 1-5	V1	V2	V3	V4	V5
jednotkové výrobní náklady	5	5	6	5	2
tržby	57-0,03.V1	82-0,05.V2	84-0,05.V3	62-0,04.V4	12

Kolik výrobků jednotlivých typů by měla výrobní linka v následujícím období vyrobit, aby bylo dosaženo maximálních tržeb?

a) Sestavte matematický model problému

b) Sestavte Lagrangeovu funkci

c) Sestavte Kuhn-Tuckerovy podmínky

d) Najděte řešení problému pomocí MS Excelu

Příklad 3: Řešte úlohu z přednášky pomocí MS Excelu pro různé úrovně R_{min} a znázorněte efektivní hranici:

Navrhněte strukturu portfolia z dvou cenných papírů P_1, P_2, tak aby jeho očekávaný výnos byl alespoň R_{min} a riziko minimální.

Sledováním časových řad cenového vývoje cenných papírů jsme odhadli očekávané výnosy $E(X_1) = 0,03,\ E(X_2) = 0,05$, rozptyly $D(X_1) = 3,\ D(X_2) = 4$ a kovarianci $C(X_1, X_2) = 2$.