VELKÁ JARNÍ SOUTĚŽ MUESU

Ekonomická společnost Masarykovy univerzity (MUES) vypisuje soutěž o tři lahve šampaňského pro toho člena akademické obce Ekonomicko-správní fakulty Masarykovy univerzity, který jako první správně vyřeší přiložený příklad.

PODMÍNKY SOUTĚŽE

1. Soutěže se může zúčastnit každý člen akademické obce Ekonomicko-správní fakulty Masarykovy univerzity mimo Ing. Michala Kvasničky, Mgr. Jana Vlčka a Mgr. Josefa Menšíka.
2. Vítězem soutěže je ten účastník soutěže, který nejdříve správně vyřeší všechny problémy uvedené v zadání soutěže a předá je členům komise.
3. Správnost řešení posuzuje komise ve složení Ing. Michal Kvasnička a Mgr. Jan Vlček. Proti rozhodnutí komise není odvolání.
4. Úloha může být řešena libovolným způsobem (graficky nebo výpočetně) s využitím libovolného softwarového nebo jiného vybavení. Pouhá úvaha bez číselného řešení se nepovažuje za dostatečnou.
5. Řešení musí být předáno písemně nejpozději do 12. května 2001.
6. MUES se zavazuje předat vítězi soutěže cenu na zvláštní přednášce MUESu 22. května 2001. Vítěz soutěže se zavazuje na této přednášce veřejně vysvětlit postup řešení.
7. Cena pro vítěze soutěže jsou tři lahve šampaňského.
8. Komise může částečně nesprávné řešení vrátit s poukazem na nesprávná místa v libovolném termínu.
9. S jakýmikoli otázkami se obracejte e-mailem na Michala Kvasničku (qasar@econ.muni.cz).

ZADÁNÍ ÚLOHY

1. Předpokládejme, že Milton Friedman vlastní domeček, kde bydlí. V domečku má samozřejmě i vodovod, takže spotřebovává vodu (na pití, mytí, do bazénu apod.) a ostatní statky. Friedman má roční příjem M dolarů. Dále víme, že jeho preference je možné popsat indiferenční křivkou

$$U = \sqrt{W} + \sqrt{C}, \tag{1}$$

kde W je jeho spotřeba vody ve vhodných jednotkách, C je jeho spotřeba ostatních statků (opět ve vhodných jednotkách) a U je číslo indiferenční křivky, kterou mu daný spotřební koš zajistí.

Předpokládejme dále, že jednotky, ve kterých je počítána voda i ostatní statky, jsou zvoleny tak vhodně, že cena jednotky vody i jednotky ostatních statků je právě 1 dolar.

Zjistěte, kolik vody a kolik ostatních statků bude Milton Friedman spotřebovávat.

2. Po nějaké době bylo Friedmanovi v jeho domě smutno. Proto pozval další dva ekonomy, aby bydleli s ním. (Jména těchto pánů byla Keynes a Marx.) Domeček měl však pouze jeden vodoměr. Protože pánové byli tři, rozdělili vždy poplatky za vodu rovným dílem.

Předpokládejme, že Keynes s Marxem spotřebují každý konstantní množství vody – právě tolik vody, kolik spotřebovával Friedman, dokud bydlel v domečku sám (protože Friedman je bezesporu racionální, spotřebovával právě optimální množství vody).

Kolik bude za těchto okolností spotřebovávat Milton Friedman vody a kolik ostatních statků?

3. V minulém případě jsem vám ovšem trošku lhal: Keynes s Marxem samozřejmě nespotřebovávají konstantní množství vody. I oni jsou celkem racionální (aspoň když se starají o vlastní užitek), a tak kupují takové množství vody a ostatních statků, aby maximalizovali svůj užitek (jsou to ekonomové!). Každý z nich má stejné preference a příjem jako Friedman.

Kolik tedy bude (v rovnováze) spotřebovávat každý z ekonomů vody a kolik ostatních statků, jestliže si budou dělit náklady na vodu rovným dílem?

4. Budou si chtít jednotliví ekonomové v předchozím případě zavést každý svůj vodoměr (aby platili právě za svoji spotřebu vody)? Předpokládejme, že se za vodoměr platí každý rok konstantní částka. Jakou částku by byli ochotní za takový vodoměr zaplatit?

5. Jak je všeobecně známo, Keynes byl velký hráč na burze. Většinou vyhrával, ale někdy také prohrál. Jeho příjem byl proto jiný než příjem zbylých dvou ekonomů a činil nM, kde $n > 0$. Když Keynes vyhrával, bylo $n > 1$, když prohrával, bylo $n < 1$. Pokud se nic jiného nezmění, kolik bude Keynes spotřebovávat vody a kolik ostatních statků? A kolik zbylí dva ekonomové? Jak se změní situace s vodoměrem? Může se stát, že si některý aktér nebude vůbec moci dovolit v domečku zůstat? Za jakých okolností?

6. Předpokládejme znovu, že příjem všech tří ekonomů je stejný (M dolarů ročně), ale liší se jejich vztah k vodě. Je totiž známo, že Karel Marx se nerad myl. Zatímco Friedmanovy a Keynesovy preference popisuje rovnice (1), Marxovy popisuje jiná rovnice:

$$U = w\sqrt{W} + \sqrt{C}, \tag{2}$$

kde význam všech symbolů je stejný jako v rovnici (1) a w je vhodná konstanta (platí $w > 0$).

Jak se nyní změní spotřeba vody a ostatních statků jednotlivých ekonomů? Jak se změní jejich pohled na společný vodoměr? Jaké musí být w, aby Marx byl opravdu „špinavec“? A co kdyby Marx naopak miloval vodu víc než zbylí dva?

OFICIÁLNÍ ŘEŠENÍ ÚLOHY O VODĚ

1. První úloha je samozřejmě triviální. Friedmanova účelová funkce má tvar

$$U = \sqrt{W} + \sqrt{C}, \tag{3}$$

jeho rozpočtové omezení má tvar

$$M = W + C, \tag{4}$$

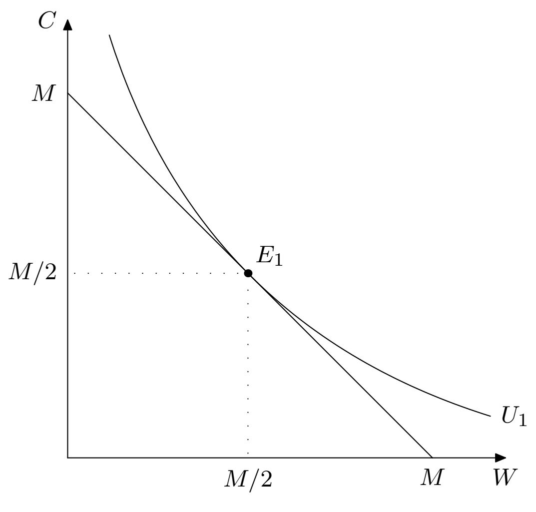
protože Friedman utrácí veškerý svůj rozpočet M buď na nákup vody W nebo nákup ostatních statků C (oba statky mají cenu 1).

Snadno tedy sestavíme Lagrangeovu funkci a najdeme optimální strutkuru a výši Friedmanovy spotřeby. Příslušná Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \sqrt{W} + \sqrt{C} + \lambda(W + C - M). \tag{5}$$

Optimální spotřebu zjistíme tak, že položíme první parciální derivace L podle W, C a λ rovno nule a dořešíme (podmínky prvního řádu jsou dostatečné, protože víme, že účelová funkce je konvexní, zatímco rozpočtové omezení kvazikonkávní).

Optimální spotřeba je pro Friedmana $W = M/2$ a $C = M/2$. Friedman tedy nakupuje vodu za jednu polovinu svého rozpočtu a ostatní statky za druhou polovinu svého rozpočtu. Situaci lze snadno znázornit graficky, viz obrázek 1.



Obrázek 1 Friedmanova spotřeba, pokud žije v domečku sám (úloha 1)

2. Nyní uvažujeme tři ekonomy. Protože mají společný vodoměr, každý z nich platí pouze jednu třetinu vlastní spotřeby vody, ale také jednu třetinu spotřeby ostatních dvou. Ostatní statky si platí každý sám. Dva z ekonomů spotřebovávají $M/2$ vody (tj. tolik, kolik Friedman v minulém příkladě), poslední z nich, Friedman, opět optimalizuje.

Friedmanovy preference zůstaly zachovány, tj. stále odpovídají rovnici 3. Změnilo se však jeho rozpočtové omezení. Stále je jeho rozpočet M, výdaje na ostatní statky jsou C_F, jeho výdaje za vodu jsou však nyní $W_F/3 + M/3$, protože platí pouze jednu třetinu své spotřeby vody (tj. $W_F/3$) plus jednu třetinu spotřeby ostatních dvou. Každý ostatní ekonom spotřebuje $M/2$ vody, jsou dva, z toho jedna třetina je $M/3$. Friedmanovo rozpočtové omezení je tedy nyní

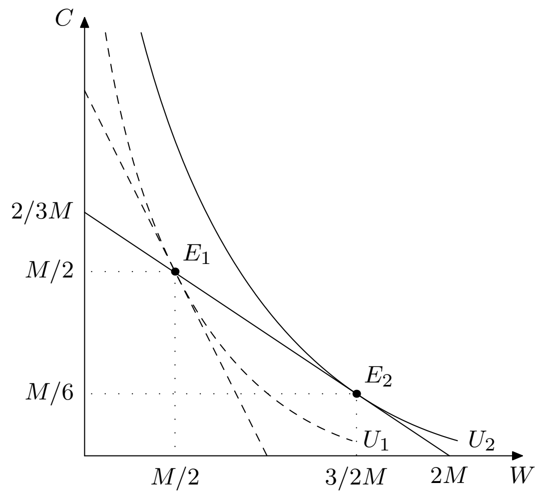
$$M = W_F/3 + M/3 + C_F. \tag{6}$$

Lagrangeova funkce je tedy nyní

$$L = \sqrt{W_F} + \sqrt{C_F} + \lambda_F(W_F/3 + M/3 + C_F - M). \tag{7}$$

Friedmanovu optimální úroveň spotřeby zjistíme odbobně jako před tím, tj. položením prvních parciálních derivací L podle W_F, C_F a λ_F rovno nule.

V tomto případě bude Friedman spotřebovávat $C_F = M/6$ ostatních statků a $W_F = 3/2M$ vody. Spotřebovává tak takovou komibnaci statků, která pro něj před tím byla nedosažitelná (k tomu by potřeboval rozpočet $5/3M$, tedy o dvě třetiny větší, než jaký má). Nyní si tuto spotřebu může dovolit, protože větší část jeho výdajů za vodu (dvě třetiny) platí jeho spolubydlící. Jeho užitek tak samozřejmě výrazně stoupne – na úkor ostatních dvou ekonomů. Situaci ilustruje obrázek 2.



Obrázek 2 Friedmanova spotřeba, pokud žije v domečku se dvěma ekonomy, kteří neoptimalizují (úloha 2)

Zajímavé je, že při „okrádání“ svých bližních potřeboval Friedman ke zvýšení svého užitku na indiferenční křivku U_2 zvýšení svého „reálného příjmu“ o dvě třetiny, zatímco kdyby bydlel v domečku sám, stačilo by mu zvýšení skutečného příjmu o pouhou *jednu třetinu*. Je tomu tak proto, že „okrádání bližních“ mu neumožňuje zvyšovat spotřebu ostatních statků, pouze spotřebu vody. Z důvodu klesajícího mezního užitku pak potřebuje více prostředků k dosažení určité indiferenční křivky, než kdyby zvyšoval rovnoměrně (v tomto případě!) spotřebu obou statků.

Podívejme se také na situaci zbylých dvou ekonomů. Ti vždy spotřebovávají množství vody $W = M/2$. Při Friedmanově spotřebě vody $3/2M$ jim na vlastní spotřebu ostatních statků zůstává pouze $M/6$ dolarů (platí jednu třetinu vlastní spotřeby, jednu třetinu spotřeby druhého neoptimalizujícího ekonoma a jednu třetinu Friedmanovy spotřeby, tj. $M - 1/2M/3 - 1/2M/3 - 3/2M/3 = M/6$). Celá jejich spotřeba je tedy tvořena množstvím $M/2$ vody a $M/6$ ostatních statků. Jejich užitek je tedy soužitím s Friedmanem (ve skutečnosti spíše jejich hloupostí) výrazně snížen. Při stejném „reálném“ rozpočtu $2/3M$ by ve skutečnosti mohli dosáhnout výrazně vyššího užitku, kdyby optimalizovali svoji spotřebu, tj. spotřebovávali stejné (při jejich účelové funkci) množství vody i ostatních statků.

3. Z předchozího úkolu je zřejmé, že ani Keynes, ani Marx nemohou být se svou situací spokojení. Kdyby ji optimalizovali, tj. spotřebovávali jinou kombinaci vody a ostatních statků, mohli by si polepšit. Pokud každý ekonom optimalizuje své postavení, musí vzít v úvahu chování ostatních dvou ekonomů. Jeho rozhodnutí je pak závislé na jejich rozhodnutí. Naším cílem je zde tedy nalezení *rovnováhy*, tj. takového chování všech agentů, při kterém 1) je jejich chování vzájemně kompatibilní a 2) si žádný z nich nemůže pomoci změnou svého jednání.

   Každý agent má nyní užitkovou funkci popsanou rovnicí 3 a rozpočet daný vztahem

$$M = W_F/3 + W_K/3 + W_M/3 + C_i, \tag{8}$$

   kde W_F je Friedmanova spotřeba vody, W_K Keynesova spotřeba vody, W_M Marxova spotřeba vody a C_i jeho vlastní spotřeba ostatních statků.

   Lagrangeova funkce má pak (pro Friedmana) tvar

$$\begin{aligned} L =& \sqrt{W_F} + \sqrt{C_F} + \\ &+ \lambda_F(W_F/3 + W_K/3 + W_M/3 + C_F - M). \end{aligned} \tag{9}$$

   Lagrangeova funkce pro další dva ekonomy je obdobná.

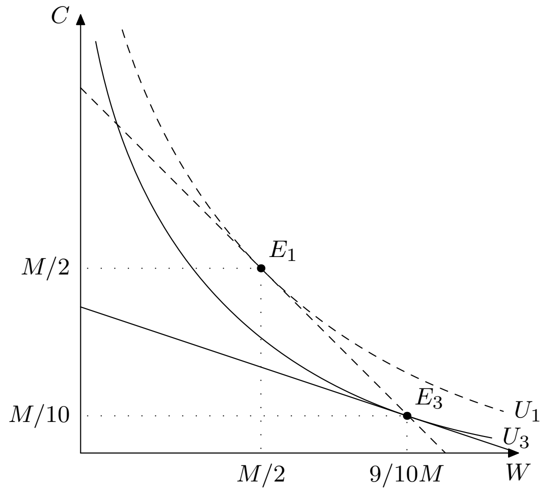
   Optimální chování jednoho agenta (např. Friedmana) najdeme tak, že položíme první parciální derivace L podle W_F, C_F a λ_F rovno nule a dořešíme. Tím dostaneme optimální spotřebu jednoho agenta (tady Friedmana) závislou na skutečné spotřebě zbylých dvou agentů. Friedmanova optimální spotřeba je taková, že

$$\begin{aligned} C_F &= M/4 - W_K/12 - W_F/12, \\ W_F &= 9/4M - 3/4W_K - 3/4W_F. \end{aligned} \tag{10}$$

   Optimální chování ostatních agentů je identické. Po dořešení rovnic 10 pro všechny agenty, získáme rovnovážné řešení (v tomto případě existuje pouze jediná rovnováha). V rovnováze každý agent spotřebuje stejné množství statků (to je zřejmé – mají stejný rozpočet i preference): spotřebuje $W_i = 9/10M$ vody a $C_i = M/10$ ostatních statků.

   V rovnováze tedy už žádný agent není schopen „okrádat své bližní“ – jediné, k čemu dochází je změna struktury spotřeby: místo efektivní rovnoměrné spotřeby obou statků nastupuje neefektivní nadměrná spotřeba vody, viz obrázek 3. Díky neefektivitě ve spotřebě je na tom teď každý ekonom hůř, než kdyby bydlel sám.

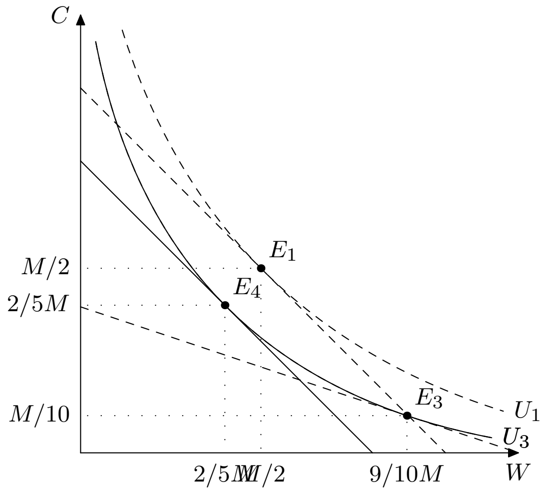
4. Už jsme viděli, že pokud všichni ekonomové optimalizují svoji spotřebu, existence společného vodoměru vede k plýtvání, které způsobí, že na tom jsou všichni hůře, než kdyby měl každý svůj vlastní vodoměr. Je to tím, že společný vodoměr snižuje náklady na *vlastní* spotřebu – spotřeba vody je tak relativně levnější než spotřeba ostatních statků. To



Obrázek 3 Friedmanova spotřeba, pokud žije v domečku se dvěma ekonomy a každý z nich optimalizuje svoji situaci (úloha 3)

   se projeví snížením sklonu rozpočtového omezení každého ekonoma. Toto relativní zlevnění vody motivuje ekonomy k větší spotřebě vody. Protože více spotřebovávají i ostatní ekonomové, odsávají si navzájem své prostředky – jejich „disponibilní“ důchod klesá, což se projevuje posunem rozpočtového omezení dolů.

   Z obrázku 4 je zřejmé, že stejného užitku U_3, jako v případě s jedním vodoměrem, mohou ekonomové dosáhnout s *mnohem nižším příjmem*, pokud bude každý platit právě za svoji spotřebu, tj. když si každý koupí svůj vodoměr. Tento příjem je $4/5M$.



Obrázek 4 Friedmanova spotřeba, pokud žije v domečku se dvěma ekonomy a každý z nich optimalizuje svoji situaci, ale navíc má každý svůj vodoměr (úloha 4)

   Každý ekonom si tedy rád koupí vlastní vodoměr, pokud za něm bude muset zaplatit méně než $M/5$. V takovém případě totiž dosáhne vyšší indiferenční křivky než je U_3.

5. Pokud má jeden z ekonomů jiný rozpočet než ostatní, je řešení v principu stejné jako u třetí úlohy. Jediný rozdíl je v tom, že musíme zvlášť vyřešit optimum pro tohoto ekonoma. Jeho rozpočtové omezení má tvar

$$nM = W_F/3 + W_K/3 + W_M/3 + C_K, \tag{11}$$

Lagrangeova funkce pak má tvar

$$L_K = \sqrt{W_K} + \sqrt{C_K} + \lambda_K \Big(W_F/3 + W_K/3 + W_M/3 + C_K - nM \Big). \tag{12}$$

Keynesova optimální spotřeba může být zjištěna stejným způsobem jako v případě 3. Keynes spotřebuje

$$\begin{aligned} C_K &= nM/4 - W_F/12 - W_M/12 \\ W_K &= 9/4M - 3/4W_F - 3/4W_M \end{aligned} \tag{13}$$

Tento výsledek lze samozřejmě získat přímo úpravou rovnice 10.

Společným řešením rovnic 10 pro Friedmana a Marxe a rovnice 13 pro Keynese dostaneme rovnovážné řešení pro případ, kdy se jeden ekonom odlišuje od ostatních svých rozpočtem:

$$\begin{aligned} W_F = W_M &= \left(\frac{18}{5} - \frac{27}{10}n\right) M \\ W_K &= \left(\frac{63}{10}n - \frac{27}{5}\right) M \\ C_F = C_M &= \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}n\right) M \\ C_K &= \left(\frac{7}{10}n - \frac{3}{5}\right) M \end{aligned} \tag{14}$$

Je zřejmé, že pokud je $n = 1$, tj. všichni mají stejný rozpočet, pak rovnice 14 dává stejné výsledky jako rovnice 10. Pokud je $n < 1$, tedy pokud má Keynes nižší rozpočet než ostatní, pak je jeho spotřeba nižší než spotřeba ostatních ekonomů, pokud $n > 1$ (a Keynes je bohatší než ostatní), pak je jeho spotřeba větší.

Můžeme s jistým překvapením zjistit ještě další fakt: v systému s jedním vodoměrem *bohatší „okrádá“ chudšího!* Dokonce existují takové velikosti n, že si některý ekonom nemůže soužití s ostatními vůbec dovolit, protože jeho spotřeba by byla nulová nebo dokonce záporná. Pokud je $n \leq 6/7$, pak si soužití v „domečku“ nemůže dovolit Keynes, protože by si nemohl dovolit kupovat ani vodu ani ostatní statky a ještě by doplácel za spotřebu vody svých bohatších sousedů; pokud je $n \geq 4/3$, nemohou si ze stejného důvodu dovolit soužití Friedman s Marxem. Bohatší ekonom si může dovolit přenášet část svých nákladů na své chudší spolubydlící.

Bude chtít bohatší spolubydlící zavést vodoměr? To záleží na tom, jak velký je jeho rozpočet, přesněji řečeno, kolikrát je větší než rozpočet jeho spolubydlících. Pokud je menší pouze „o kousek“, pak je přínos přesunu části nákladů na ostatní menší než pokles užitku z důvodu nerovnoměrné spotřeby statků a vodoměr by zvýšil jeho užitek; pokud je však jeho rozpočet výrazně větší, pak je přínos z přesunu nákladů na spotřebu vody na ostatní větší a vodoměr by mu naopak uškodil. Hraniční poměr příjmů je $n = 24/23$. Pokud má Keynes příjem větší méně než o jednu dvaceti třetinu, pak bude spolu s ostatními hlasovat pro zavedení individuálních rozpočtů; pokud je však jeho příjem vyšší více než o jednu dvaceti třetinu, pak bude hlasovat proti zavedení takových vodoměrů.

6. I řešení posledního problému je v principu stejné. Optimální chování Friedmana a Keynese je stejné jako ve 3. úloze, tzn. že je popsané rovnicí 10. Musíme však odhalit Marxovo optimální chování.

   Marx má stejný rozpočet jako ostatní; jeho rozpočtové omezení tedy popisuje rovnice 4. Liší se jeho účelová funkce. Ta je nyní dána rovnicí

$$U_M = w\sqrt{W_M} + \sqrt{C_M}. \tag{15}$$

Lagrangeova funkce má potom tvar

$$L_M = w\sqrt{W_M} + \sqrt{C_M} + \lambda_M \Big(W_F/3 + W_K/3 + W_M/3 + C_M - M \Big). \tag{16}$$

Za těchto podmínek je Marxova optimální spotřeba

$$\begin{aligned} C_M &= \frac{3M - W_F - W_K}{3\,(1 + w^2)} \\ W_M &= \frac{3w^2\,(3M - W_F - W_K)}{1 + 3w^2} \end{aligned} \tag{17}$$

Rovnovážné řešení opět objevíme tak, že simultánně vyřešíme rovnice 10 pro Friedmana a Keynese a rovnice rovnice 17 pro Marxe. Tímto způsobem získáme rovnovážné objemy spotřeby pro všechny ekonomy:

$$\begin{aligned} C_F = C_K = C_M &= \frac{M}{7 + 3w^2}, \\ W_F = W_K &= \frac{9M}{7 + 3w^2}, \\ W_M &= \frac{9Mw^2}{7 + 3w^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Velikost w určuje, zda má Marx raději vodu než ostatní ekonomové, nebo méně rád. Pokud je $w > 1$, má Marx raději vodu než ostatní (spotřebovává více vody a méně ostatních statků), pokud je $w < 1$, pak je Marx „špinavec“.

Čím je w větší, tím více vody Marx spotřebovává – a díky společnému vodoměru „okrádá své bližní“, kteří musejí snížit svoji spotřebu. V tomto případě však neexistuje žádná limitní hodnota w, při které by musel některý obyvatel „domeček“ opustit. (Je zřejmé, že pokud je $w > 1$, pak je Marx čistotnější než ostatní; pokud je však $w < 1$, pak je Marx skutečně „špinavec“, jak svědčí historici.)